# JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK




SIGILL : COLL : HARVARD : CANTAB : NOV : ANGL : 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE
GIFT OF
THOMAS WREN WARD,
OF NEW YORK.
Dec. 31, 1868.





# Journal

für die

# reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

---

Als Fortsetzung des von

A. L. Crelle

gegründeten Journals

herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

**Schellbach, Kummer, Kronecker, Weierstrass**

von

C. W. Borchardt.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preussischer Behörden.

---

**Acht und sechzigster Band.**

Erstes Heft.

---

Berlin, 1867.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

1868, Dec. 31.

14 nos.

# Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre.

(Par *L. Cremona* à Milan.)

. . . . Es ist daraus zu sehen, dass diese Flächen fortan fast eben so leicht und einlässlich zu behandeln sind, als bisher die Flächen zweiten Grades.

STEINER,
(dieses Journal, B. LIII, p. 133.)

Cet écrit, étant destiné au concours publié en 1864 par l'Académie royale des sciences de Berlin, pour le prix fondé par STEINER, contient la démonstration de *tous* les théorèmes énoncés par ce grand géomètre dans son Mémoire *Ueber die Flächen dritten Grades* (1856). On y trouvera, en outre de cela, tous ou presque tous les résultats obtenus par d'autres mathématiciens qui ont traité ce sujet; et l'auteur se flatte qu'on y remarquera aussi plusieurs propriétés qui sont dues à ses propres recherches.

Puis, attendu que la théorie des surfaces du troisième ordre a son principal fondement dans la théorie générale des surfaces d'ordre quelconque, au sujet de laquelle on ne connaît aucun traité géométrique; et que l'exposition d'un grand nombre de propriétés n'offre pas plus de facilité pour les surfaces cubiques, que pour les surfaces d'ordre quelconque; l'auteur a jugé convenable de commencer par quelques chapitres relatifs à ces dernières. Dans ces premiers chapitres, il a disposé les théorèmes fondamentaux touchant les surfaces polaires, les systèmes de surfaces, les surfaces nodales conjuguées*), etc. tout en se bornant à ce qui est susceptible d'être appliqué aux surfaces du troisième ordre.

Les chapitres suivants contiennent, outre l'application des principes généraux aux surfaces cubiques**), les propriétés si nombreuses qui résultent

*) L'auteur s'est permis d'employer les mots *Hessienne* et *Steinerienne* pour distinguer entre elles les deux surfaces qu'on devrait, d'après STEINER, appeler *conjugirte Kernflächen*. De même, il a appelé simplement *surface polaire* d'un plan ou d'une droite, ce que STEINER avait nommé *zweite Polare*. Cette dernière diction est, sans doute, préférable en cas qu'on ait à considérer (pour les surfaces d'ordre plus élevé) toute la série des enveloppes polaires relatives aux points d'un lieu quelconque.

**) On doit entendre la surface cubique *générale, sans points multiples*. A cause de l'extension et de l'importance des matières traitées, le temps nous a fait défaut pour nous occuper aussi des surfaces cubiques d'une classe inférieure à la douzième: ce que, du reste, l'Académie semble n'avoir pas voulu demander.

de la coïncidence des deux surfaces nodales en une surface unique *(Hessienne)* de quatrième ordre, qui possède dix points doubles et dix droites (sommets et arêtes d'un pentaèdre très-remarquable), et dont les points sont conjugués deux à deux: d'où il suit par exemple une transformation de figures formées par les droites et les plans qui passent par un point double de la Hessienne.

En suite, on trouvera d'autres chapitres touchant les manières différentes d'engendrer une surface cubique; le système des vingt-sept droites, les arrangements de celles-ci; la géométrie des courbes tracées sur une surface cubique (à l'aide de la représentation sur un plan); les systèmes de surfaces de second ordre qui coupent la surface cubique le long de trois coniques; les hyperboloïdes qui la rencontrent suivant six droites; les trièdres conjugués, etc. On donne enfin la classification des surfaces du troisième ordre (et de la douzième classe) en cinq espèces, eu égard à la réalité des vingt-sept droites. Dans ce dernier chapitre on trouvera aussi le moyen de construire toutes les cinq espèces, auquel effet on se sert de la discussion (que nous croyons nouvelle) des cas différents offerts par l'intersection de deux surfaces de second ordre.

Par respect aux souhaits de l'Académie, on aurait dû consacrer des recherches expresses à la courbe gauche du neuvième ordre, qu'on obtient par l'intersection de deux surfaces cubiques. Mais, en premier lieu, il a paru à l'auteur que la géométrie pure ne soit pas encore préparée convenablement à des spéculations d'une si grande difficulté; et secondement, le temps lui a manqué, non seulement pour se vouer à ces recherches, mais aussi pour développer davantage certains autres arguments*), et pour remédier aux graves imperfections dont se ressent ce travail, à cause de sa rédaction précipitée. En défaut d'une véritable théorie de ces courbes du neuvième ordre, l'auteur présente (chapitre 8$^e$) l'énumération des courbes gauches qui résultent de l'intersection d'une surface cubique avec une surface du second ou du troisième ordre, et l'indication du procédé très-simple pour étudier ces courbes dans leurs représentations sur un plan. A la considération de cela et des contributions apportées à d'autres points de la théorie, l'auteur ose se promettre l'indulgence de l'Académie.

Il nous reste à parler de l'instrument de recherche, avec lequel ce travail a été conduit. Obéissant aux prescriptions de l'Académie et heureux

---

*) Par ex. la théorie des surfaces qu'on pourrait appeler *covariantes* (art. 65 et suiv.).

d'ailleurs de pouvoir suivre son propre penchant, l'auteur s'est servi exclusivement de la géométrie pure, dite (peut-être improprement) synthétique; et il se flatte qu'on jugera que le procédé uniforme et facile, qu'il a suivi dans tout le cours de cet écrit, rentre dans l'esprit de ces méthodes puissantes et lumineuses qui ont valu à Steiner la découverte d'un si grand nombre de propriétés très-importantes, propriétés que ce célèbre sphinx géométrique a léguées à ses successeurs, comme autant d'énigmes à déchiffrer.

A ce propos, l'auteur déclare qu'il aurait cru manquer à la probité scientifique, s'il se fût borné à démontrer géométriquement les théorèmes de Steiner, en supposant connues et démontrées les propriétés sur lesquelles ces théorèmes sont naturellement fondés. L'auteur a censé de son strict devoir de s'appuyer seulement sur ce qui avait été démontré *par la géométrie pure;* et dès lors, il a admis, par exemple, comme étant connues, la théorie des courbes planes, la génération des courbes polaires qui demeure la même pour les surfaces polaires, les formules de M. Plücker qui expriment les relations entre les caractéristiques des courbes planes (car ces formules ont été démontrées géométriquement autre part), les formules que M. Cayley a déduites sans calcul de celles de M. Plücker et qui établissent des relations entre les caractéristiques d'une courbe gauche, etc. Au contraire, d'autres propriétés (par exemple celles, si importantes et fécondes, des chapitres 2ᵉ et 3ᵉ), qu'on connaissait seulement sous la forme d'identités algébriques, se trouvent ici démontrées par la synthèse, afin qu'elles servent ensuite de base au développement des théorèmes qui sont le véritable sujet de ce travail. De sorte que, quoiqu'en grande partie ces propriétés ne soient pas énoncées ici pour la première fois, néanmoins elles paraîtront nouvelles par leur traitement géométrique.

Du reste, c'est à l'Académie de juger jusqu'à quel point l'auteur a mis du nouveau et du sien propre dans ce Mémoire. Ainsi, par respect à ce jugement, s'est-il abstenu des citations fréquentes; et il se borne à déclarer ici qu'outre le Mémoire de Steiner (objet du concours) et les ouvrages d'argument général des MM. Chasles, Hesse, Jonquières etc., il a consulté les écrits suivants qui traitent particulièrement des surfaces du troisième ordre:

Cayley, *On the triple tangent planes of surfaces of the third order* (Cambridge and Dublin Math. Journal, IV. 1849).

Salmon, *On the triple tangent planes to a surface of the third order* (ibidem).

Sylvester, *On elimination, transformation and canonical forms* (Camb. and Dub. Math. Journal, VI. 1851).

Grassmann, *Die stereometrischen Gleichungen dritten Grades und die dadurch erzeugten Oberflächen* (dieses Journal, XLIX. 1854).

Brioschi, *Intorno ad alcune proprietà delle superficie del terzo ordine* (Annali di scienze mat. e fis. Roma 1855).

Schläfli, *An attempt to determine the twenty-seven lines upon a surface of the third order etc.* (Quarterly Journ. of Math. II. 1858).

Clebsch, *Zur Theorie der algebraischen Flächen* (dieses Journal, LVIII. 1860).

——, *Ueber eine Transformation der homogenen Functionen dritter Ordnung mit vier Veränderlichen* (ibidem).

Salmon, *On quaternary cubics* (Philosoph. Transactions, 1860).

Clebsch, *Ueber die Knotenpunkte der Hesseschen Fläche, insbesondere bei Oberflächen dritter Ordnung* (dieses Journal, LIX. 1861).

Schiaparelli, *Sulla trasformazione geometrica delle figure ed in particolare sulla trasformazione iperbolica* (Memoire dell' Accad. di Torino, 1862).

August, *Disquisitiones de superficiebus tertii ordinis* (Dissert. inaug. Berolini 1862).

Schröter, *Nachweis der 27 Geraden auf der allgemeinen Oberfläche dritter Ordnung* (dieses Journal, LXII. 1863).

Clebsch, *Zur Theorie der algebraischen Flächen* (dieses Jour., LXIII. 1863).

Schläfli, *On the distribution of surfaces of the third order into species etc.* (Philosoph. Transact. 1863).

Salmon, *Analytic geometry of three dimensions*, 2[d] ed. (Dublin 1865).

Avertissement. Les notes renfermées dans les crochets carrés [ ] ont été ajoutées en janvier 1867.

---

## Chapitre premier.

## Les surfaces polaires par rapport à une surface fondamentale d'ordre quelconque.

1. Considérons une surface *fondamentale* quelconque, d'ordre $n$. Un point, pris arbitrairement dans l'espace, sera le pole de $n-1$ surfaces polaires, dont la première est de l'ordre $n-1$, la deuxième de l'ordre $n-2$, ... et la dernière est un plan.

Nous omettons la définition de ces polaires, de même que la démonstration de plusieurs propriétés qui suivent, car nous n'aurions qu'à reproduire ce qui a été déjà exposé géométriquement pour les courbes planes *).

De plus, notre but n'étant autre chose que l'application de ces propriétés générales aux surfaces du troisième ordre, nous traiterons presque exclusivement de la première et de la dernière polaire.

2. Si la $r^{ème}$ polaire d'un point $o$ passe par un point $o'$, la $(n-r)^{ème}$ polaire de $o'$ passe par $o$. Donc, par trois points donnés arbitrairement dans l'espace il passe une seule première polaire, dont le pole est l'intersection des plans polaires des points donnés. C'est-à-dire que les premières polaires de tous les points de l'espace forment un *système linéaire* **).

Les premières polaires qui passent par un même point donné ont $(n-1)^3$ points communs et forment un réseau; leurs poles sont dans un plan (le plan polaire du point donné).

Les premières polaires qui passent par deux mêmes points donnés forment un faisceau, dont la base est une courbe gauche de l'ordre $(n-1)^2$; leurs poles sont dans une droite (l'intersection des plans polaires des points donnés).

3. Les plans qui passent par un point donné ont leurs poles dans la première polaire de ce point. Les plans qui passent par une droite ont leurs poles dans la courbe gauche d'ordre $(n-1)^2$, commune aux premières polaires de deux points quelconques de la droite ***). Un plan a $(n-1)^3$ poles: ce sont les intersections des premières polaires de trois points quelconques du plan.

4. Le plan polaire d'un point quelconque par rapport à la surface fondamentale est le plan polaire de ce point par rapport aux autres surfaces polaires du même pole.

---

*) Voir par ex. la *Teoria geom. delle curve piane* de Cremona (Bologna 1862).

**) On nomme *réseau* de surfaces un assemblage de surfaces du même ordre, tel qu'il n'en passe qu'une seule par deux points quelconques donnés. Parmi les surfaces d'un réseau, toutes celles qui passent par un même point donné forment un faisceau.

Des surfaces du même ordre forment un *système linéaire* quand il n'en passe qu'une par trois points quelconques donnés. Toutes les surfaces d'un système linéaire qui passent par un même point forment un réseau; toutes celles qui passent par deux mêmes points forment un faisceau. [Voir Cremona, *Preliminari di una teoria geometrica delle superficie*, 42. Bologna 1866.]

***) Nous donnons à cette courbe gauche le nom de *courbe polaire de la droite donnée*.

5. Si le pole se trouve sur la surface fondamentale, toutes les polaires passent par le pole et sont tangentes, en ce point, à cette surface. Le plan polaire coupe la polaire du second ordre (*quadrique polaire*) suivant deux droites qui sont osculatrices au pole, à la surface fondamentale et aux autres surfaces polaires; c'est-à-dire qu'au pole, les coniques indicatrices de la surface fondamentale et des surfaces polaires ont les mêmes asymptotes. Si ces asymptotes coïncident ensemble, la quadrique polaire devient nécessairement un cone; le pole est, dans ce cas, un *point parabolique* pour la surface fondamentale (et pour les autres surfaces polaires).

6. Les points de contact de la surface fondamentale avec les droites tangentes issues d'un point quelconque $o$, sont les points de la courbe d'ordre $n(n-1)$, intersection de la surface avec la première polaire de $o$. Donc la classe de la surface fondamentale, c'est-à-dire le nombre des plans tangents qui passent par deux points $o$, $o'$, est $n(n-1)^2$: ce nombre étant celui des points communs à la surface fondamentale et aux premières polaires de $o$, $o'$. On voit encore que la classe d'une section plane de la surface fondamentale, ou, ce qui est la même chose, l'ordre du cone circonscrit (le sommet étant un point quelconque $o$) est $n(n-1)$.

7. Si $o$ est un point de la surface fondamentale, cette surface et la première polaire de $o$ se touchent en ce point; d'où il suit que $o$ sera un point double pour la courbe d'ordre $n(n-1)$, intersection de ces deux surfaces (6.). Le cone circonscrit, de sommet $o$, se décompose, dans ce cas, dans un cone d'ordre $n(n-1)-2$ et dans le plan polaire de $o$; et ce plan, étant tangent à ce cone le long des deux droites osculatrices à la surface en $o$, coupera le même cone suivant $n(n-1)-2-4=(n+2)(n-3)$ autres droites. Parmi les droites qui sont tangentes à la surface fondamentale en un point donné, il y en a donc $(n+2)(n-3)$ qui la touchent de nouveau ailleurs.

8. Si une droite menée par un point quelconque $o$ de l'espace est osculatrice à la surface fondamentale en un de ses points, le point de contact appartient évidemment à la première et à la deuxième polaire de $o$. Donc le nombre des droites osculatrices qui passent par un point quelconque de l'espace est $n(n-1)(n-2)$.

Le cone circonscrit, de sommet $o$, qui est de l'ordre $n(n-1)$ et de la classe $n(n-1)^2$, a donc $n(n-1)(n-2)$ génératrices stationnaires. D'après les formules connues de M. Plücker, ce cone aura en outre:

$\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3)$ génératrices doubles; il y a donc ce nombre de tangentes doubles qu'on peut mener par $o$ à la surface donnée; $4n(n-1)(n-2)$ plans tangents stationnaires; c'est-à-dire que ce nombre est la classe de la développable formée par les plans stationnaires (qui touchent la surface donnée aux points paraboliques (5.)); et $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n^3-n^2+n-12)$ plans tangents doubles; c'est-à-dire que ce nombre est la classe de l'enveloppe des plans bitangents (qui touchent la surface donnée en deux points distincts).

En supposant la surface fondamentale sans lignes multiples, une quelconque de ses sections planes sera de l'ordre $n$, de la classe $n(n-1)$, sans points multiples, et par suite elle aura $3n(n-2)$ points d'inflexion et $\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$ tangentes doubles; il y a donc, dans un plan quelconque, ces nombres de droites osculatrices et de droites bitangentes à la surface donnée.

9. Si la surface fondamentale a un point multiple $o$, dont $r$ soit le degré de multiplicité, ce même point sera multiple suivant $r-1$ pour la première polaire d'un point quelconque; et par conséquent la classe de la surface donnée en sera diminuée de $r(r-1)^2$ unités.

Le même point $o$ sera multiple suivant $r$ pour toutes les surfaces polaires de $o$; d'où il suit que la polaire $(n-r)^{\text{ème}}$ sera un cone d'ordre $r$, et les polaires d'ordre moins élevé seront indéterminées.

Si la surface fondamentale possède une ligne multiple suivant $r$, la première polaire d'un point quelconque passe $r-1$ fois par cette ligne. Dans notre but, nous n'avons pas besoin de nous arrêter à chercher l'influence d'une ligne multiple sur la classe de la surface donnée.

Nous nous bornons à observer que, si la surface donnée est le système d'un plan et d'une autre surface, et que le pole soit pris dans ce plan, la première polaire sera composée du même plan et de la première polaire relative à la deuxième surface.

10. Les polaires du même ordre par rapport aux surfaces d'un faisceau, le pole étant un point fixe, forment un autre faisceau qui est projectif au premier. De même, si au lieu d'un faisceau, on a un réseau ou un système linéaire, les premières polaires d'un point fixe forment un réseau ou un système linéaire, respectivement.

Si par la courbe d'intersection de deux surfaces d'ordre $n$, on peut faire passer un cone du même ordre, le sommet de ce cone aura les mêmes polaires par rapport aux deux surfaces.

11. Soit $F_n$ la surface fondamentale donnée; $o$, $o'$ deux points quelconques; $P_o$, $P_{o'}$ les premières polaires de $o$, $o'$ par rapport à $F_n$; $P_{oo'}$ la première polaire de $o$ par rapport à $P_{o'}$; et $P_{o'o}$ la première polaire de $o'$ par rapport à $P_o$. Nous allons démontrer que $P_{oo'}$ et $P_{o'o}$ ne sont qu'une seule et même surface d'ordre $n-2$.

Soit $E$ un plan mené arbitrairement par $o'$; et $K_n$ le cone dont $o$ est le sommet, et la courbe $(EF_n)$ est la directrice. D'après un théorème connu*), les surfaces $F_n$, $K_n$ se couperont suivant une autre courbe située sur une surface $F_{n-1}$ d'ordre $n-1$. La surface donnée appartient au faisceau déterminé par le cone $K_n$ et par le lieu composé $EF_{n-1}$; donc (10.) la polaire $P_{o'}$ appartiendra au faisceau déterminé par le cone $K_{n-1}$, polaire de $o'$ par rapport à $K_n$, et par le lieu composé $EF_{n-2}$, où $F_{n-2}$ soit la première polaire de $o$ par rapport à $F_{n-1}$; car (9.) ce lieu composé est la première polaire de $o'$ par rapport au lieu $EF_{n-1}$. Or la polaire $P_{oo'}$ coïncide (10.) avec la première polaire de $o$ par rapport à $EF_{n-2}$, donc elle passera par la courbe d'intersection de la surface $F_{n-2}$ avec le plan $E$ (9.).

Puisque la surface $F_n$ passe par la courbe $(K_n, EF_{n-1})$, la polaire $P_o$ coïncidera avec la polaire de $o$ par rapport au lieu $EF_{n-1}$ (10.), et passera conséquemment (9.) par la courbe $(EF_{n-1})$. Donc la surface $P_{o'o}$ passe par la courbe polaire de $o'$ par rapport au lieu $EF_{n-1}$, c. à. d. par la courbe $(EF_{n-2})$.

On conclut d'ici que tout plan $E$ mené par $o'$ coupe les polaires $P_{oo'}$ et $P_{o'o}$ suivant une seule et même courbe d'ordre $(n-2)$. Donc ces surfaces coïncident en une seule et même surface, que nous appellerons *deuxième polaire mixte des points oo'*.

Il est très-facile maintenant de passer à un théorème plus général, relatif aux polaires d'un ordre quelconque.

12. Des théorèmes (11.), (2.) on tire sans peine cet autre énoncé: Si la première polaire d'un point $x$ par rapport à la première polaire d'un autre point $o$ passe par un troisième point $o'$, la première polaire de $x$ par rapport à la $(n-2)^{\text{ème}}$ polaire de $o'$ passera par $o$.

*) On sait que par la courbe commune à deux surfaces d'ordre $n$ il passe un nombre infini de surfaces du même ordre. Par conséquent, si deux surfaces d'ordre $n$ passent par une courbe d'ordre $nr$ $(r < n)$ située dans une surface d'ordre $r$, elles se couperont en outre suivant une autre courbe d'ordre $n(n-r)$, située dans une surface d'ordre $n-r$.

Et de même un théorème analogue pour les polaires d'ordre quelconque.

13. Si la première polaire de $o$ a un point double $o'$, la première polaire d'un point quelconque $x$ par rapport à la première polaire de $o$ passera (9.) par $o'$, et par conséquent (12.) la première polaire de $x$ par rapport à la quadrique polaire de $o'$ passera par $o$. De plus, puisque la deuxième polaire de $o$ passe par $o'$, il en suit que $o$ est situé dans la quadrique polaire de $o'$ (2.). Donc, $o$ est un point double pour la quadrique polaire de $o'$; c'est-à-dire que la quadrique polaire de $o'$ est un cone de sommet $o$.

Analoguement, si la surface $r^{\text{ème}}$ polaire de $o$ a un point double $o'$, la surface $(n-r-1)^{\text{ème}}$ polaire de $o'$ a un point double en $o$.

14. Si le pole parcourt une droite $R$, de quelle classe est la développable enveloppée par le plan polaire? Les plans passant par un point arbitraire $i$ ont leurs poles dans la première polaire de ce point; cette surface rencontre $R$ en $n-1$ points; l'enveloppe cherchée est donc de la classe $n-1$ *). Nous donnerons à cette surface la dénomination de *développable polaire* de la droite $R$ **).

Les plans tangents de la développable qui passent par un point $i$ sont les plans polaires des $n-1$ points où $R$ est coupée par la première polaire de $i$; donc, si cette polaire est tangente à $R$, le point $i$ appartient à la développable. C'est-à-dire que

La développable enveloppée par les plans polaires des points d'une droite est le lieu des poles des premières polaires tangentes à cette droite.

Chacune des droites génératrices de la développable est le lieu des poles dont les premières polaires touchent $R$ au même point. Parmi ces premières polaires il y en aura une, laquelle sera osculée par $R$; le pole de cette polaire appartient donc aussi à la génératrice infiniment voisine. Ce qui revient à dire que la courbe cuspidale de la développable est le lieu d'un point dont la première polaire est osculée par $R$. De même, la courbe nodale de la développable sera le lieu d'un point dont la première polaire a un double contact avec $R$.

---

*) Si la surface fondamentale a un point $o$ multiple suivant $r$, ce point est multiple suivant $r-1$ pour la première polaire d'un pole quelconque (9.); d'où il suit que, si $R$ passe par $o$, l'enveloppe des plans polaires sera de la classe $n-r$.

**) On démontre pareillement que la développable polaire d'une courbe d'ordre $m$ est de la classe $m(n-1)$.

On peut très-facilement déterminer l'ordre de la développable polaire et de ses courbes singulières. Les points d'une droite arbitraire sont les poles d'un faisceau de premières polaires; dans ce faisceau il y en a $2(n-2)$ tangentes à $R$; donc ce nombre est l'ordre de la développable. Un plan quelconque mené par $R$ coupe les premières polaires de ses points suivant un réseau de courbes d'ordre $n-1$; dans ce réseau il y a $3(n-3)$ courbes osculées par $R$, et $2(n-3)(n-4)$ courbes touchées par $R$ en deux points distincts; par conséquent, la courbe cuspidale est de l'ordre $3(n-3)$, et la courbe nodale est de l'ordre $2(n-3)(n-4)$.

D'après les relations connues entre les caractéristiques d'une développable *), on trouve que la courbe cuspidale a $4(n-4)$ points stationnaires, c'est-à-dire qu'il y a autant de points dont les premières polaires ont un contact du troisième ordre avec $R$; etc.

15. Considérons la surface enveloppée par les plans polaires des points d'une surface donnée $S_m$ d'ordre $m$. Les plans polaires qui passent par une droite arbitraire ont leurs poles (3.) dans une courbe de l'ordre $(n-1)^2$; donc l'enveloppe cherchée est de la classe $m(n-1)^2$. Les plans tangents qu'on peut mener par une droite quelconque à cette surface, que nous désignerons par $K$, sont les plans polaires des intersections de la surface donnée $S_m$ avec la courbe d'ordre $(n-1)^2$ correspondante à cette droite; donc cette droite sera tangente à $K$, si la courbe correspondante touche $S_m$. Par conséquent, si deux droites, se coupant en un point $i$, correspondent à deux courbes d'ordre $(n-1)^2$ tangentes à $S_m$, le point $i$ appartiendra à $K$. Or, ces deux courbes, d'après leur définition (3.), sont situées sur la première polaire de $i$; donc la surface $K$ est le lieu d'un point dont la première polaire est tangente à $S_m$.

Si $m=1$, $K$ est l'enveloppe des plans polaires des points d'un plan donné $E$ et en même temps le lieu des poles des premières polaires tangentes à ce plan. Cette surface, de la classe $(n-1)^2$, est de l'ordre $3(n-2)^2$; en effet, les premières polaires des points d'une droite arbitraire sont coupées par $E$ suivant un faisceau de courbes de l'ordre $n-1$, et dans ce faisceau il y a $3(n-2)^2$ courbes avec point double.

Les premières polaires des points d'un plan quelconque coupent $E$ suivant un réseau de courbes d'ordre $n-1$; or, on sait que dans un tel réseau

*) [Voir la *Teoria geometrica delle superficie* déjà citée, 10—12.]

il y a $\frac{3}{2}(n-2)(n-3)(3n^2-9n-5)$ courbes avec deux points doubles, et $12(n-2)(n-3)$ courbes avec un point stationnaire; la surface $K$ possède donc une courbe nodale et une courbe cuspidale, dont ces nombres expriment les ordres.

D'aprés ce qui précède, si la première polaire d'un point $i$ touche le plan $E$ au point $i'$, réciproquement le plan polaire de $i$ est tangent à $K$ en $i$. Soit $i'$ un. point commun au plan $E$ et à la surface fondamentale; le plan polaire de $i'$ sera tangent en $i'$ à cette surface et en $i$ à $K$; donc la surface $K$ est inscrite dans la développable qui est circonscrite à la surface fondamentale le long de sa section par le plan $E$.

16. On a vu (3.) que le lieu des poles des plans passant par une droite est une courbe gauche d'ordre $(n-1)^2$. On peut de même demander le lieu des poles des plans tangents d'une surface quelconque de la classe $m$.

Si la surface donnée est développable, elle aura $m(n-1)^2$ plans tangents communs avec la surface de classe $(n-1)^2$, enveloppe des plans polaires des points d'un plan quelconque $E$ (15.); et dès lors, ce plan $E$ contiendra autant de points du lieu demandé. Donc, le lieu des poles des plans tangents d'une développable de la classe $m$ est une courbe gauche d'ordre $m(n-1)^2$.

Si la surface donnée n'est pas développable, elle aura $m(n-1)$ plans tangents communs avec la développable de classe $n-1$ formée par les plans polaires des points d'une droite quelconque $R$ (14.); d'où il résulte qu'une droite quelconque contient $m(n-1)$ points du lieu demandé. Ainsi le lieu des poles des plans tangents d'une surface quelconque de la classe $m$ est une autre surface d'ordre $m(n-1)$.

## Chapitre deuxième.

## Systèmes de surfaces d'ordre quelconque.

17. Si l'on se donne deux faisceaux projectifs de surfaces d'ordre $n_1$ et $n_2$ respectivement, le lieu de la courbe d'intersection de deux surfaces correspondantes est une surface d'ordre $n_1+n_2$, qui passe par les courbes d'ordre $n_1^2$ et $n_2^2$, bases des faisceaux donnés.

En un point quelconque de la première base, la surface d'ordre $n_1+n_2$ est touchée par la surface d'ordre $n_1$, qui correspond à la surface d'ordre $n_2$ passant par ce point.

18. Soient donnés trois faisceaux projectifs de surfaces d'ordre $n_1$ $n_2$, $n_3$ resp. Les deux premiers faisceaux engendrent (17.) une surface d'ordre $n_1+n_2$; de même, le premier et le troisième faisceau donnent une surface d'ordre $n_1+n_3$. Ces deux surfaces passent par la courbe d'ordre $n_1^2$, base du premier faisceau, et par suite elles se couperont suivant une autre courbe d'ordre $(n_1+n_2)(n_1+n_3)-n_1^2$. qui passe évidemment par les $n_1^2(n_2+n_3)$ points où la base du premier faisceau rencontre la surface engendrée par les deux autres faisceaux, etc. Donc

Le lieu des points où se coupent trois surfaces correspondantes de trois faisceaux projectifs d'ordre $n_1$, $n_2$, $n_3$, est une courbe gauche d'ordre $n_2n_3+n_3n_1+n_1n_2$, qui a $n_1^2(n_2+n_3)$ points communs avec la base du premier faisceau, etc.

19. Soient donnés quatre faisceaux projectifs de surfaces d'ordre $n_1$, $n_2$, $n_3$, $n_4$ resp. Le troisième et le quatrième faisceau engendrent (17.) une surface d'ordre $n_3+n_4$ qui passe par la base du troisième faisceau et a par suite $n_3^2(n_1+n_2)$ points communs avec la courbe d'ordre $n_2n_3+n_3n_1+n_1n_2$ engendrée (18.) par les premiers trois faisceaux. Donc, cette courbe et cette surface se couperont en $(n_3+n_4)(n_2n_3+n_3n_1+n_1n_2)-n_3^2(n_1+n_2)$ autres points, c'est-à-dire que

Il y a $n_2n_3n_4+n_1n_3n_4+n_1n_2n_4+n_1n_2n_3$ points, dont chacun est commun à quatre surfaces correspondantes de quatre faisceaux projectifs d'ordre $n_1$, $n_2$, $n_3$, $n_4$.

20. Dans un faisceau de surfaces d'ordre $n$, combien il y en a qui soient douées d'un point double? Prenons quatre points arbitrairement dans l'espace; leurs premières polaires formeront (10.) quatre faisceaux projectifs d'ordre $n-1$. Si une des surfaces données a un point double, la première polaire d'un pole quelconque passe par ce point; et par conséquent les points doubles sont les points de l'espace par lesquels passent quatre surfaces correspondantes des quatre faisceaux de polaires. Le nombre des surfaces du faisceau donné, qui ont un point double, est donc (19.) $4(n-1)^3$.

21. On demande le lieu des poles d'un plan par rapport aux surfaces d'ordre $n$ d'un faisceau. Soient $a$, $b$, $c$ trois points pris arbitrairement dans le plan donné; si $x$ est le pole du plan $abc$, réciproquement (2.) les premières polaires de $a$, $b$, $c$ passent par $m$. Or, les premières polaires de $a$, $b$, $c$ forment trois faisceaux projectifs d'ordre $n-1$; le lieu cherché

est donc (18.) une courbe gauche d'ordre $3(n-1)^2$, qui passe par les $4(n-1)^3$ points doubles (20.) du faisceau donné.

22. Soient donnés deux réseaux projectifs de surfaces d'ordre $n_1$, $n_2$; un faisceau quelconque, compris dans le premier réseau, et le faisceau, qui lui correspond dans l'autre réseau, engendrent une surface $\Phi$ d'ordre $n_1+n_2$. Les surfaces $\Phi$ forment elles-mêmes un réseau. Soient, en effet, $a$ et $b$ deux points arbitraires dans l'espace. Par $a$ passent deux surfaces correspondantes $R$, $R'$ des deux réseaux; et de même, deux autres surfaces correspondantes $Q$, $Q'$ passent par $b$. Les surfaces $(R, Q)$, $(R', Q')$ déterminent deux faisceaux projectifs, à l'aide desquels on peut engendrer la surface $\Phi_1$: la seule qui passe par $a$ et $b$.

Soit $P$, $P'$ une autre couple de surfaces correspondantes des deux réseaux, qui n'appartiennent pas resp. aux faisceaux $(RQ)$, $(R'Q')$. Les faisceaux $(PR)$, $(P'R')$ engendreront une autre surface $\Phi_2$; et de même les faisceaux $(QP)$, $(Q'P')$ une troisième surface $\Phi_3$. Les surfaces $\Phi_1$, $\Phi_2$ passent par la courbe $RR'$ d'ordre $n_1 n_2$; elles ont donc une autre courbe commune, de l'ordre $(n_1+n_2)^2-n_1 n_2$. Un point quelconque de cette courbe, considéré comme situé sur $\Phi_1$, est commun à deux surfaces correspondantes $S$, $S'$ des faisceaux $(RQ)$, $(R'Q')$; et le même point, considéré comme situé sur $\Phi_2$, appartient aussi à deux surfaces correspondantes $T$, $T'$ des faisceaux $(PR)$, $(P'R')$. Les deux faisceaux $(PQ)$, $(TS)$, appartenant à un même réseau, ont une surface commune $U$, à laquelle correspondra, dans l'autre réseau, une surface $U'$ commune aux faisceaux $(P'Q')$, $(T'S')$; d'où il suit que tout point de la courbe d'ordre $n_1^2+n_2^2+n_1 n_2$, savoir tout point commun aux surfaces $S$, $S'$, $T$, $T'$, est un point commun aux bases des faisceaux $(TS)$, $(T'S')$, et par conséquent il est commun aux surfaces $U$, $U'$. Donc cette courbe d'ordre $n_1^2+n_2^2+n_1 n_2$, commune aux surfaces $\Phi_1$, $\Phi_2$, est située aussi sur $\Phi_3$, et peut être regardée comme base du réseau des surfaces $\Phi$. (Ce réseau est déterminé par les trois surfaces $\Phi_1$, $\Phi_2$, $\Phi_3$, lesquelles n'appartiennent pas au même faisceau, car $\Phi_2$ ne contient pas la courbe $RR'$).

Concluons donc que les surfaces d'ordre $n_1+n_2$, sur lesquelles sont situées les courbes d'intersection des surfaces correspondantes de deux réseaux projectifs d'ordre $n_1$, $n_2$, forment un réseau et passent toutes par une même courbe gauche de l'ordre $n_1+n_2^2+n_1 n_2$.

Deux surfaces $P$, $Q$ du premier réseau donné se rencontrent suivant

une courbe d'ordre $n_1^2$, à laquelle correspond une courbe $P'Q'$ d'ordre $n_2^2$ dans l'autre réseau. Ces deux courbes, en général, ne se coupent pas; mais pour celles qui se coupent, les points d'intersection appartiennent évidemment à la courbe d'ordre $n_1^2+n_2^2+n_1n_2$. Autrement: chaque point de cette courbe est commun aux bases de deux faisceaux correspondants, au lieu que par un point arbitraire de l'espace ne passe plus qu'une couple de surfaces correspondantes.

23. Trois réseaux projectifs de surfaces d'ordre $n_1$, $n_2$, $n_3$ resp. étant donnés, quel est le lieu d'un point par lequel passent trois surfaces correspondantes? Soit $G$ une droite arbitraire, $x$ un point quelconque de $G$. Par $x$ passent deux surfaces correspondantes des premiers deux réseaux; la surface correspondante du troisième rencontrera $G$ en $n_3$ points $x'$. Si l'on fixe arbitrairement un point $x'$ sur $G$, les surfaces du troisième réseau qui passent par $x'$ forment un faisceau, auquel correspondent, dans les autres réseaux, deux faisceaux qui, étant projectifs, engendrent (17.) une surface d'ordre $n_1+n_2$. Cette surface coupera $G$ en $n_1+n_2$ points $x$. Il y aura donc, d'après un lemme connu, $(n_1+n_2)+n_3$ coïncidences de $x$ avec $x'$, c'est-à-dire que le lieu cherché est une surface de l'ordre $n_1+n_2+n_3$. Il est évident que cette surface passe 1°. par un nombre infini de courbes gauches d'ordre $n_2n_3+n_3n_1+n_1n_2$, chacune desquelles est engendrée (18.) par trois faisceaux correspondants dans les trois réseaux donnés; 2°. par les $n_1^3$ points communs aux surfaces du premier réseau, et de même pour les autres réseaux; 3°. par la courbe d'ordre $n_1^2+n_2^2+n_1n_2$ engendrée (22.) par les deux premiers réseaux; et de même pour les autres combinaisons binaires des trois réseaux.

24. On donne quatre réseaux projectifs de surfaces d'ordre $n_1$, $n_2$, $n_3$, $n_4$ resp.; cherchons le lieu d'un point où se coupent quatre surfaces correspondantes. Les surfaces correspondantes des premiers trois réseaux se coupent sur une surface (23.) d'ordre $n_1+n_2+n_3$; et de même le premier, le deuxième et le quatrième réseau donnent une surface d'ordre $n_1+n_2+n_4$. Ces deux surfaces ont en commun la courbe d'ordre $n_1^2+n_2^2+n_1n_2$ engendrée (22.) par les premiers deux réseaux, elles se couperont donc suivant une autre courbe d'ordre $(n_1+n_2+n_3)(n_1+n_2+n_4)-(n_1^2+n_2^2+n_1n_2)$; d'où il suit que

Le lieu d'un point par lequel passent quatre surfaces correspondantes de quatre réseaux projectifs d'ordre $n_1$, $n_2$, $n_3$, $n_4$

est une courbe gauche de l'ordre

$$n_2 n_3 + n_3 n_1 + n_1 n_2 + n_1 n_4 + n_2 n_4 + n_3 n_4.$$

Cette courbe contient évidemment un nombre infini de systèmes de $n_2 n_3 n_4 + n_1 n_3 n_4 + n_1 n_2 n_4 + n_1 n_2 n_3$ points, chaque système étant engendré (19.) par quatre faisceaux correspondants dans les réseaux donnés.

25. Dans quel lieu sont distribués les points doubles des surfaces d'un réseau d'ordre $n$? Les premières polaires de quatre points arbitraires de l'espace (20.) forment quatre réseaux projectifs d'ordre $n-1$, dans lesquels les surfaces correspondantes se coupent, quatre à quatre, sur une courbe gauche (24.) de l'ordre $6(n-1)^2$. Cette courbe est donc le lieu demandé. Elle contiendra évidemment les $4(n-1)^3$ points doubles de chaque faisceau compris dans le réseau donné.

26. De quel ordre est le lieu d'un point $x$, dont les plans polaires par rapport à deux surfaces d'ordre $\mu$, $\nu$ se coupent sur une droite fixe $G$? Si les plans polaires de $x$ passent par un point $y$ de $G$, réciproquement les premières polaires de $y$ se couperont en $x$. Si $y$ parcourt la droite $G$, les premières polaires de $y$ forment deux faisceaux projectifs d'ordre $\mu-1$, $\nu-1$, qui engendreront (17.) une surface d'ordre $\mu+\nu-2$. Cette surface est donc le lieu demandé.

Tout point commun à cette surface et à la courbe d'ordre $\mu\nu$, intersection des surfaces données, a pour plans polaires les plans tangents, au même point, aux deux surfaces; la droite commune à ces plans est donc tangente en ce point à la courbe. Or, cette droite est rencontrée par $G$; il y a donc autant d'intersections de la surface d'ordre $\mu+\nu-2$ avec la courbe d'ordre $\mu\nu$, que de tangentes de cette courbe rencontrées par $G$; c'est-à-dire que les droites tangentes à la courbe d'intersection de deux surfaces d'ordre $\mu$, $\nu$ forment une développable de l'ordre $\mu\nu(\mu+\nu-2)$.

27. Revenons maintenant aux surfaces $\Phi_1$, $\Phi_2$ (22.), que nous avons vues se couper suivant deux courbes, dont l'une est de l'ordre $n_1^2+n_2^2+n_1 n_2$ et l'autre est l'intersection de deux surfaces d'ordre $n_1$, $n_2$. La surface, lieu d'un point dont les plans polaires par rapport à $\Phi_1$, $\Phi_2$ se coupent sur une droite donnée, est (26.) de l'ordre $2(n_1+n_2-1)$ et rencontre la première courbe, non-seulement aux points où celle-ci est touchée par des droites croisées par la droite donnée (soit $r$ le nombre de ces points, savoir l'ordre de la développable osculatrice de cette courbe), mais encore aux points (soit $s$

leur nombre) où la première courbe est rencontrée par l'autre. En effet chacun de ces points est un point de contact entre $\Phi_1$ et $\Phi_2$, et par suite il a même plan polaire par rapport à ces surfaces. Nous aurons donc

$$2(n_1+n_2-1)(n_1^2+n_2^2+n_1 n_2) = r+s.$$

En faisant le même raisonnement pour la deuxième courbe, et en observant que pour celle-ci l'ordre de la développable osculatrice (26.) est $n_1 n_2(n_1+n_2-2)$, on aura

$$2(n_1+n_2-1)n_1 n_2 = n_1 n_2(n_1+n_2-2)+s,$$

d'où l'on tire

$$s = n_1 n_2(n_1+n_2).$$
$$r = 2(n_1^2+n_2^2)(n_1+n_2-1)+n_1 n_2(n_1+n_2-2)\ ^{*)}.$$

28. Considérons de la même manière les deux surfaces d'ordre $n_1+n_2+n_3$ et $n_1+n_2+n_4$ (24.) qui se coupent suivant deux courbes, dont l'une est de l'ordre $n_1^2+n_2^2+n_1 n_2$ et l'autre de l'ordre $n_2 n_3+n_3 n_1+n_1 n_2+n_1 n_4+n_2 n_4+n_3 n_4$. Soit $r'$ l'ordre de la développable osculatrice de la dernière courbe, et $s'$ le nombre des intersections des deux courbes; nous aurons, comme ci-devant,

$$(2n_1+2n_2+n_3+n_4-2)(n_2 n_3+n_3 n_1+\cdots) = r'+s',$$
$$(2n_1+2n_2+n_3+n_4-2)(n_1^2+n_2^2+n_1 n_2) = r+s',$$

et par conséquent

$$s' = (n_3+n_4)(n_1^2+n_2^2+n_1 n_2)+n_1 n_2(n_1+n_2),$$
$$r' = (n_2 n_3+n_3 n_1+\cdots)(n_1+n_2+n_3+n_4-2)+(n_2 n_3 n_4+n_1 n_3 n_4+\cdots).$$

29. Soient donnés cinq réseaux projectifs de surfaces d'ordre $n_1$, $n_2$, ... $n_5$ resp.; on demande en combien de points se coupent cinq surfaces correspondantes. Les deux premiers réseaux, combinés successivement avec les autres, donnent (23.) trois surfaces d'ordre $n_1+n_2+n_3$, $n_1+n_2+n_4$, $n_1+n_2+n_5$ resp. qui passent toutes par la courbe d'ordre $n_1^2+n_2^2+n_1 n_2$, engendrée (22.) par les deux premiers réseaux. De ces trois surfaces, les deux premières se rencontrent suivant une autre courbe qui (28.) a $s'$ points communs avec celle mentionnée tout-à-l'heure; donc cette autre courbe, qui est de l'ordre $n_2 n_3+n_3 n_1+\cdots$ rencontrera la troisième surface en $(n_2 n_3+n_3 n_1+\cdots)(n_1+n\ +n_5)-s'$ autres points. Donc:

Il y a $n_1 n_2 n_3+n_1 n_2 n_4+\cdots+n_3 n_4 n_5$ points, chacun desquels est situé à la fois sur cinq surfaces correspondantes de cinq réseaux projectifs d'ordre $n_1$, $n_2$, ... $n_5$.

---

*) Salmon, *Analyt. Geom. of three dimensions*, 2 ed. p. 274.

30. Quel est le lieu des poles d'un plan donné par rapport aux surfaces d'ordre $n$ d'un réseau? Soient $a$, $b$, $c$ trois points arbitraires du plan donné (21.); les premières polaires de ces points forment trois réseaux projectifs d'ordre $n-1$; le lieu demandé est donc (23.) une surface de l'ordre $3(n-1)$, qui contient un nombre infini de courbes gauches d'ordre $3(n-1)^2$, chacune de celles-ci étant le lieu des poles du plan donné par rapport aux surfaces d'un faisceau (21.) contenu dans le réseau proposé.

La courbe d'intersection de la surface d'ordre $3(n-1)$ avec le plan donné est évidemment le lieu des points où ce plan est tangent aux surfaces du réseau.

31. Quel est le lieu d'un point qui ait même plan polaire par rapport à une surface fixe d'ordre $n$ et à une des surfaces d'un réseau d'ordre $m$? Soit $x$ un point pris arbitrairement sur une droite quelconque $G$; $X$ le plan polaire de $x$ par rapport à la surface fixe. Le lieu des poles de $X$ par rapport aux surfaces du réseau est (30.) une surface qui rencontrera $G$ en $3(m-1)$ points $x'$. Inversement, si $x'$ est un point quelconque de $G$, les plans polaires de $x'$ par rapport aux surfaces du réseau forment un autre réseau, c'est-à-dire qu'ils passent par un même point; et par suite il y en aura $n-1$ tangents à la développable (14.) polaire de $G$ par rapport à la surface fixe. Ces $n-1$ plans sont les polaires (par rapport à la surface fixe) d'autant de point $x$ de $G$. Le lieu demandé sera donc une surface de l'ordre

$$3(m-1)+n-1 = 3m+n-4.$$

Tout point commun à cette surface et à la surface fixe est situé dans son plan polaire; donc le lieu des points de contact entre une surface d'ordre $n$ et les surfaces d'un réseau d'ordre $m$ est une courbe gauche d'ordre $n(3m+n-4)$.

32. On se donne un faisceau de surfaces d'ordre $n$ et un réseau de surfaces d'ordre $m$; et on demande le lieu des points de contact entre les surfaces du faisceau et celles du réseau. Ce lieu passe par la courbe d'ordre $n^2$, base du faisceau, car les surfaces du réseau qui passent par un point de la base forment un autre faisceau, dans lequel il y a une surface qui touche une des surfaces d'ordre $n$ *). De plus, chacune de ces

*) Lorsque les bases de deux faisceaux de surfaces ont un point commun $o$, il y a toujours une surface du premier faisceau et une surface du second, qui se touchent en $o$. En effet, les plans tangents en $o$ aux surfaces du premier faisceau passent par

dernières surfaces contient une courbe d'ordre $n(3m+n-4)$, lieu des points de contact entre cette surface et celles du réseau (31.). D'où il suit qu'une surface quelconque du faisceau donné rencontre le lieu demandé suivant une courbe (composée) d'ordre $n^2+n(3m+n-4)$; ce lieu est donc de l'ordre $3m+2n-4$.

Si $n=m$, et que le faisceau et le réseau aient une surface commune (ce qui arrive lorsque l'un et l'autre font partie d'un même système linéaire), cette surface appartient tout entière au lieu. D'ailleurs, toute surface passant par la courbe commune à deux surfaces d'un système linéaire appartient à ce même système; et si deux surfaces d'un faisceau ont un point de contact, ce point est double pour une autre surface du faisceau; donc

Le lieu des points de contact des surfaces d'un système linéaire d'ordre $n$, ou bien le lieu de leurs points doubles, est une surface de l'ordre $4(n-1)$.

33. Cherchons le lieu d'un point dont le plan polaire par rapport à une surface fixe d'ordre $n$ coïncide avec le plan polaire par rapport à une des surfaces d'un faisceau d'ordre $m$. Soit $E$ un plan arbitraire; $x$ un point quelconque de ce plan; $X$ le plan polaire de $x$ par rapport à la surface fixe; le lieu des poles de $X$ par rapport aux surfaces du faisceau est une courbe (21.) qui rencontre $E$ en $3(m-1)^2$ points $x'$. Réciproquement, si $x'$ est pris arbitrairement dans $E$, les plans polaires de $x'$ par rapport aux surfaces du faisceau forment un autre faisceau, dans lequel il y a $(n-1)^2$ plans tangents à la surface enveloppe (15.) des plans polaires des points de $E$ par rapport à la surface fixe; et ces $(n-1)^2$ plans sont les polaires d'autant de points $x$ de $E$. Si le point $x$ décrit une droite quelconque en $E$, le plan $X$ enveloppe (14.) une développable de la classe $n-1$, au lieu que les plans polaires des points de la même droite, par rapport aux surfaces du faisceau, enveloppent une surface de la classe $2(m-1)$: en effet, cette droite est tangente à $2(m-1)$ surfaces du faisceau. Il y a donc $2(m-1)(n-1)$ plans, chacun desquels a sur la droite considérée un pole par rapport à la surface fixe et un pole par rapport à une des surfaces du faisceau; c'est-à-dire que, si $x$ décrit une droite, le lieu de $x'$ est une courbe de l'ordre $2(m-1)(n-1)$. Par conséquent, d'après

---

une même droite, qui est la tangente en $o$ à la courbe-base de ce faisceau; de même pour l'autre faisceau. Par conséquent, le plan qui contient les droites tangentes en $o$ aux deux courbes-bases touchera, en ce point, une surface de chacun des deux faisceaux.

un théorème connu *), le plan $E$ contient $3(m-1)^2+(n-1)^2+2(m-1)(n-1)$ points $x$, chacun desquels coïncide avec un des points correspondants $x'$; autrement, le lieu cherché est une courbe gauche dont l'ordre est exprimé par ce nombre. Cette courbe passe par les $4(m-1)^3$ points doubles (20.) du faisceau donné, car le plan polaire d'un point double, par rapport à la surface à laquelle celui-ci appartient, est indéterminé (9.).

Des intersections du lieu trouvé avec la surface fixe, on déduit que dans un faisceau d'ordre $m$ il y a $n\{3(m-1)^2+(n-1)^2+2(m-1)(n-1)\}$ surfaces qui ont un point de contact avec une surface donnée d'ordre $n$.

34. Deux systèmes (linéaires) projectifs de surfaces d'ordres $n_1$ et $n_2$ resp. donnent lieu à un nombre infini de surfaces d'ordre $n_1+n_2$, chacune desquelles est engendrée (17.) par deux faisceaux correspondants. Soient $P$, $Q$, $R$, $S$, ... des surfaces du premier système, et $P'$, $Q'$, $R'$, $S'$, ... les surfaces correspondantes de l'autre système. Les trois couples de faisceaux correspondants $(PQ)$, $(P'Q')$; $(PR)$, $(P'R')$; $(PS)$, $(P'S')$ engendrent trois surfaces d'ordre $n_1+n_2$ qui passent toutes

---

*) Supposons que, dans un plan donné, à un point quelconque $x$ correspondent deux courbes d'ordres $\mu$ et $\nu$ resp., qui se coupent en $\mu\nu$ points $x'$; de manière qu'au point $x$ correspondront $\mu\nu$ points $x'$. Réciproquement, supposons qu'aux courbes $(\mu)$ passant par un point $x'$ correspondent les points $x$ d'une courbe d'ordre $\mu'$, et qu'aux courbes $(\nu)$ passant par le même point $x'$ correspondent les points $x$ d'une courbe d'ordre $\nu'$; d'où il s'ensuit qu'à un point $x'$ correspondent $\mu'\nu'$ points $x$. Considérons les points $x$ d'une droite; les courbes $(\mu)$ correspondantes à ces points forment une série d'indice $\mu'$ (suivant la dénomination de M. Jonquières), et les courbes $(\nu)$ correspondantes aux mêmes points forment, de même, une série d'indice $\nu'$; et le lieu des intersections $x'$ des courbes correspondantes est (par un théorème dû au même géomètre) une courbe d'ordre $\mu\nu'+\mu'\nu$. Analoguement, si $x'$ décrit une droite, le lieu de $x$ est une courbe d'ordre $\mu\nu'+\mu'\nu$.

Si le point $x$ est situé dans sa courbe correspondante $(\mu)$, quel est le lieu de $x$? A un point quelconque $x$ d'une droite arbitraire $G$ correspond une courbe $(\mu)$ qui coupe $G$ en $\mu$ points $x'$; au lieu qu'à un point $x'$ de la même droite correspond une courbe $(\mu')$ qui coupe $G$ en $\mu'$ points $x$. Le lieu demandé est donc de l'ordre $\mu+\mu'$. De même, si $x$ doit être situé dans sa courbe correspondante $(\nu)$, le lieu de $x$ est une courbe de l'ordre $\nu+\nu'$. Les $(\mu+\mu')(\nu+\nu')$ intersections de ces courbes sont évidemment les points $x$ dont chacun coïncide avec un des points correspondants $x'$. Or on a identiquement $\mu\nu+\mu'\nu'+(\mu\nu'+\mu'\nu)=(\mu+\mu')(\nu+\nu')$, donc: si, dans un plan, on a deux systèmes de points correspondants, tels qu'à chaque point du premier système correspondent $\alpha$ points de l'autre; qu'à chaque point du second système correspondent $\beta$ points du premier; et qu'une droite quelconque contienne $\gamma$ couples de points correspondants; il y aura $\alpha+\beta+\gamma$ points doubles (Salmon, *Anal. Geom. of three dim.* p. 511).

par la courbe $PP'$ d'ordre $n_1 n_2$, et par suite *) ont $(n_1+n_2)(n_1^2+n_2^2)$ autres points communs. Chacun de ces points est situé sur des surfaces $Q_1$, $R_1$, $S_1$, appartenant resp. aux faisceaux $(PQ)$, $(PR)$, $(PS)$, et aussi sur les surfaces correspondantes $Q_1'$, $R_1'$, $S_1'$, qui appartiendront aux faisceaux $(P'Q')$, $(P'R')$, $(P'S')$ resp. Donc, le point considéré est commun aux bases des faisceaux $(Q_1 R_1)$, $(Q_1' R_1')$; dont le premier a une surface commune avec le faisceau $(QR)$, et le second a une surface commune avec le faisceau $(Q'R')$. Ces deux surfaces étant correspondantes, il en suit que le point, dont il s'agit, est situé sur la surface d'ordre $n_1+n_2$ engendrée par les faisceaux $(QR)$, $(Q'R')$. Toutes ces surfaces d'ordre $n_1+n_2$ ont donc en commun les $(n_1+n_2)(n_1^2+n_2^2)$ points ci-dessus mentionnés. Par chacun de ces points passe un nombre infini de faisceaux correspondants; en d'autres termes, chacun de ces points est commun à toutes les surfaces de deux réseaux correspondants.

35. Soient donnés trois systèmes (linéaires) projectifs de surfaces d'ordres $n_1$, $n_2$, $n_3$, resp. Un réseau quelconque du premier système, combiné avec les réseaux correspondants dans les autres systèmes, donne (23.) une surface $\Psi$ d'ordre $n_1+n_2+n_3$. Toutes ces surfaces $\Psi$ forment un nouveau système linéaire. Soient, en effet, $a$, $b$, $c$ trois points arbitraires dans l'espace. Les surfaces $(n_1)$ passant par $a$ forment un réseau; dans le réseau correspondant du deuxième système il y a un faisceau de surfaces qui passent par $a$; et dans le faisceau correspondant du troisième système il y a une surface qui passe par $a$. C'est-à-dire qu'il y a trois surfaces correspondantes $P$, $P'$, $P''$ qui passent par $a$. De même, il y aura trois surfaces correspondantes $Q$, $Q'$, $Q''$ passant par $b$, et trois surfaces correspondantes $R$, $R'$, $R''$ passant par $c$. Ces surfaces déterminent trois réseaux projectifs $(PQR)$, $(P'Q'R')$, $(P''Q''R'')$, qui engendreront une surface $\Psi_4$, la seule qui passe par $a$, $b$, $c$.

Soit $S$, $S'$, $S''$ une autre terne de surfaces correspondantes, qui n'appartiennent pas aux trois réseaux mentionnés. Les ternes de réseaux correspondants $(QRS)$, $(Q'R'S')$, $(Q''R''S'')$; $(RPS)$, $(R'P'S')$, $(R''P''S'')$; $(PQS)$, $(P'Q'S')$, $(P''Q''S'')$ engendreront trois autres surfaces $\Psi_1$, $\Psi_2$, $\Psi_3$. Les surfaces $\Psi_1$, $\Psi_2$ contiennent la courbe d'ordre $n_2 n_3+n_3 n_1+n_1 n_2$ engendrée (18) par les

*) Deux surfaces d'ordre $n_1+n_2$ passant par une courbe d'ordre $n_1 n_2$, se coupent suivant une autre courbe d'ordre $n_1^2+n_2^2+n_1 n_2$ qui rencontre la première (27.) en $n_1 n_2(n_1+n_2)$ points. D'où il suit qu'une autre surface d'ordre $n_1+n_2$ passant par la même courbe d'ordre $n_1 n_2$ rencontrera la deuxième courbe en $(n_1+n_2)(n_1^2+n_2^2+n_1 n_2) - n_1 n_2(n_1+n_2) = (n_1+n_2)(n_1^2+n_2^2)$ points non situés sur la première.

trois faisceaux correspondants $(RS)$, $(R'S')$, $(R''S'')$; elles se couperont donc suivant une autre courbe de l'ordre $(n_1+n_2+n_3)^2-(n_2n_3+n_3n_1+n_1n_2)$. Un point quelconque $x$ de cette courbe, considéré comme appartenant à $\Psi_1$, est commun à trois surfaces correspondantes $A$, $A'$, $A''$ des trois réseaux qui engendrent $\Psi_1$; et analoguement, le même point $x$, considéré comme situé sur $\Psi_2$, sera commun à trois surfaces correspondantes $B$, $B'$, $B''$ des trois réseaux générateurs de $\Psi_2$. Or, le réseau $(PQS)$ et le faisceau $(AB)$, faisant partie d'un même système linéaire, ont une surface commune $C$, à laquelle correspondront, dans le deuxième système une surface $C'$ commune au réseau $(P'Q'S')$ et au faisceau $(A'B')$, et dans le troisième système une surface $C''$ commune au réseau $(P''Q''S'')$ et au faisceau $(A''B'')$. Par conséquent, le point $x$, étant situé sur les surfaces $A$, $A'$, $A''$, $B$, $B'$, $B''$, c'est-à-dire sur les bases des faisceaux $(AB)$, $(A'B')$, $(A''B'')$, sera un point commun aux surfaces $C$, $C'$, $C''$, et par suite commun à trois surfaces correspondantes des réseaux $(PQS)$, $(P'Q'S')$, $(P''Q''S'')$; ce qui revient à dire que $x$ est un point de $\Psi_3$. On démontre de la même manière que $x$ est situé sur $\Psi_4$; donc toutes les surfaces $\Psi$ forment un système linéaire et passent par la courbe d'ordre $n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_2n_3+n_3n_1+n_1n_2$.

Cette courbe est, d'après ce qui précède, le lieu d'un point où se croise une infinité de ternes de surfaces correspondantes; en d'autres termes, le lieu d'un point commun aux courbes-bases de trois faisceaux correspondants; ou bien encore, le lieu d'un point commun à trois courbes d'ordres $n_1^2$, $n_2^2$, $n_3^2$, correspondantes dans les systèmes donnés.

Cette même courbe contient évidemment les $(n_1+n_2)(n_1^2+n_2^2)$ points engendrés (34.) par les deux premiers systèmes; et de même pour les autres combinaisons binaires des systèmes donnés.

36. On se donne quatre systèmes (linéaires) projectifs de surfaces d'ordres $n_1$, $n_2$, $n_3$, $n_4$ resp. et on demande l'ordre du lieu d'un point commun à quatre surfaces correspondantes. Soit $G$ une droite arbitraire et $x$ un point quelconque de $G$. On peut faire passer par $x$ une (seule) terne de surfaces correspondantes des trois premiers systèmes (35.); la surface correspondante du quatrième système coupera $G$ en $n_4$ points $x'$. Réciproquement, si l'on prend arbitrairement un point $x'$ sur $G$, les surfaces $(n_4)$ passant par $x'$ forment un réseau, et les réseaux correspondants dans les trois premiers systèmes engendrent (23.) une surface qui rencontrera $G$ en $n_1+n_2+n_3$ points $x$. Donc

Le lieu d'un point où se coupent quatre surfaces correspondantes de quatre systèmes linéaires projectifs d'ordres $n_1$, $n_2$, $n_3$, $n_4$ est une surface de l'ordre $n_1+n_2+n_3+n_4$.

Cette surface contient évidemment une infinité de courbes gauches d'ordre $n_2n_3+n_3n_1+n_1n_2+n_1n_4+n_2n_4+n_3n_4$, chacune desquelles est engendrée (24.) par quatre réseaux correspondants. La même surface passe par la courbe d'ordre $n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_2n_3+n_3n_1+n_1n_2$ engendrée (35.) par les trois premiers systèmes; et de même pour les autres combinaisons ternaires des quatre systèmes donnés.

37. Quel est le lieu d'un point $x$ dont les plans polaires, par rapport à quatre surfaces données d'ordres $n_1$, $n_2$, $n_3$, $n_4$ resp., passent par un même point $x'$? Les premières polaires de $x'$ doivent passer par $x$; et d'ailleurs les premières polaires des points de l'espace, par rapport aux quatre surfaces données, forment quatre systèmes linéaires projectifs d'ordres $n_1-1$, $n_2-1$, $n_3-1$, $n_4-1$; donc (36.) le lieu du point $x$ où se coupent quatre surfaces correspondantes, c'est-à-dire le lieu demandé, est une surface de l'ordre $n_1+n_2+n_3+n_4-4$. On donne à cette surface le nom de ***Jacobienne des quatre surfaces données.*** Il est évident que la Jacobienne passe par les points multiples des surfaces données, car chacun de ces points a un plan polaire indéterminé.

Soit $n_4=n_3$; dans ce cas on a deux surfaces d'ordres $n_1$, $n_2$, et un faisceau de surfaces d'ordre $n_3$; et la Jacobienne devient une surface de l'ordre $n_1+n_2+2(n_3-2)$, lieu d'un point dont les plans polaires, par rapport aux surfaces d'ordres $n_1$, $n_2$ et à toutes celles du faisceau, ont un point commun: ou, ce qui est la même chose, lieu d'un point dont les plans polaires, par rapport aux surfaces d'ordres $n_1$, $n_2$ et à une des surfaces du faisceau, passent par une même droite. Cette Jacobienne passe par les $4(n_3-1)^2$ points doubles des surfaces du faisceau (20.). Si une des surfaces du faisceau touche la courbe d'intersection des deux surfaces fixes, le point de contact appartient à la Jacobienne, car trois plans polaires de ce point passent par une même droite (la tangente à la courbe); il y a donc, dans un faisceau d'ordre $n_3$, le nombre $n_1n_2(n_1+n_2+2n_3-4)$ de surfaces qui sont tangentes à la courbe d'intersection de deux surfaces données d'ordres $n_1$, $n_2$.

Si $n_4=n_3=n_2$, nous aurons une surface fixe d'ordre $n_1$ et un réseau de surfaces d'ordre $n_2$; et la Jacobienne, surface d'ordre $n_1+3n_2-4$, deviendra

le lieu d'un point dont le plan polaire par rapport à la surface fixe coïncide avec le plan polaire par rapport à une des surfaces du réseau (31.). Cette Jacobienne contiendra la courbe gauche d'ordre $6(n_2-1)^2$, lieu des points doubles des surfaces du réseau (25.).

Si $n_1=n_2=n_3=n_4=n$, la Jacobienne, surface d'ordre $4(n-1)$, devient le lieu d'un point $x$ dont les plans polaires par rapport à toutes les surfaces d'un système linéaire d'ordre $n$ passent par un même point $x'$. Il résulte de ce qui précède que cette surface est aussi le lieu des points doubles des surfaces du système, et contient par suite un nombre infini de courbes gauches d'ordre $6(n-1)^2$, chacune de celles-ci étant le lieu des points doubles d'un réseau appartenant au système. On peut dire encore (32.) que la Jacobienne d'un système linéaire est le lieu des points de contact entre les surfaces du système.

Si $n=2$, le système est formé par des surfaces quadriques. Dans ce cas, les plans polaires de $x$ passant par $x'$, réciproquement les plans polaires de $x'$ passeront par $x$; c'est-à-dire que $x'$ est lui-même un point de la Jacobienne. La Jacobienne (surface du quatrième ordre) d'un système linéaire de quadriques est donc, non-seulement le lieu des sommets des cones du système, mais encore le lieu des couples des poles conjugués par rapport à toutes les surfaces du système.

38. Cherchons maintenant le lieu d'un point dont les plans polaires, par rapport à trois surfaces données d'ordres $n_1$, $n_2$, $n_3$, passent par une même droite? Les premières polaires des points de l'espace, par rapport aux trois surfaces données, forment trois systèmes (linéaires) projectifs d'ordres $n_1-1$, $n_2-1$, $n_3-1$ resp. Un point du lieu doit être commun aux premières polaires de tous les points d'une droite, c'est-à-dire que par ce point passe un nombre infini de ternes de surfaces correspondantes des trois systèmes projectifs; le lieu cherché est donc (35.) une courbe gauche de l'ordre $(n_1-1)^2+(n_2-1)^2+(n_3-1)^2+(n_2-1)(n_3-1)+(n_3-1)(n_1-1)$ $+(n_1-1)(n_2-1)=n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_2n_3+n_3n_1+n_1n_2-4(n_1+n_2+n_3)+6$, qui passe évidemment par les points multiples des surfaces données*).

Si $n_3=n_2$, la courbe obtenue devient le lieu d'un point dont le plan

*) [On peut appeler cette courbe *Jacobienne des trois surfaces* données.]

polaire par rapport à une surface fixe d'ordre $n$, coïncide avec le plan polaire relatif à une des surfaces d'un faisceau d'ordre $n_2$; on retombe ainsi sur un résultat déjà obtenu autrement (33.).

Si $n_1 = n_2 = n_3 = n$, on retrouve la courbe gauche d'ordre $6(n-1)^2$, lieu des points doubles des surfaces d'un réseau d'ordre $n$ (25.); cette courbe est donc aussi le lieu d'un point dont les plans polaires, par rapport à toutes les surfaces du réseau, passent par une même droite.

39. On se donne deux surfaces d'ordres $n_1$, $n_2$; les premières polaires de tous les points de l'espace, par rapport à ces surfaces, formeront deux systèmes linéaires projectifs d'ordres $n_1-1$, $n_2-1$. Si un point $x$ a même plan polaire par rapport aux surfaces données, les premières polaires de tous les points de ce plan passeront par $x$, c'est-à-dire que $x$ est commun à toutes les surfaces de deux réseaux correspondants. Concluons donc (34.) que le nombre des points dont chacun a même plan polaire par rapport aux deux surfaces données est $[(n_1-1)+(n_2-1)][(n_1-1)^2+(n_2-1)^2]\ldots$*).

Si $n_1 = n_2$, on a le nombre des points doubles d'un faisceau; chacun de ces points a, en effet, même plan polaire par rapport à toutes les surfaces du faisceau.

40. Quel est le lieu d'un point par lequel passent cinq surfaces correspondantes de cinq systèmes (linéaires) projectifs, d'ordres $n_1, n_2, \ldots n_5$ resp.? Les trois premiers systèmes combinés successivement avec le quatrième et le cinquième, donnent (36.) deux surfaces d'ordres $n_1+n_2+n_3+n_4$, $n_1+n_2+n_3+n_5$ resp., qui passent ensemble par la courbe gauche d'ordre $n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_2n_3+n_3n_1+n_1n_2$ engendrée (35.) par les trois premiers systèmes; elles se couperont donc suivant une autre courbe gauche de l'ordre $n_1n_2+n_1n_3+\cdots+n_4n_5$, qui est le lieu demandé. Naturellement cette courbe contient une infinité de groupes de $n_1n_2n_3+\cdots+n_3n_4n_5$ points, chacun desquels est engendré (29.) par cinq réseaux correspondants, appartenant aux systèmes donnés.

41. On se donne six systèmes (linéaires) projectifs de surfaces d'ordres $n_1, n_2, \ldots n_6$ resp.; cherchons le nombre des points où se rencontrent six surfaces correspondantes. Les trois premiers systèmes, combinés successivement avec le quatrième, le cinquième et le sixième, donnent (36.) trois sur-

*) [Nous pouvons dire que ces points forment *la Jacobienne des deux surfaces données.*]

faces d'ordres $n_1+n_2+n_3+n_4$, $n_1+n_2+n_3+n_5$, $n_1+n_2+n_3+n_6$ resp. qui ont en commun la courbe d'ordre $n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_2n_3+n_3n_1+n_1n_2$, due (35.) aux trois premiers systèmes. Outre cette courbe, les deux surfaces d'ordres $n_1+\cdots+n_4$, $n_1+\cdots+n_5$ passent ensemble par une autre courbe de l'ordre $n_1n_2+\cdots+n_4n_5$, qui rencontre la première en $n_1^2n_2+\cdots+n_2n_3^2+(n_4+n_5)(n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_2n_3+n_3n_1+n_1n_2)+2n_1n_2n_3$*) points. En calculant l'excès du nombre total des intersections de la courbe d'ordre $n_1n_2+\cdots+n_4n_5$ avec la surface d'ordre $n_1+\cdots+n_6$, sur le nombre précédent, on trouve le nombre cherché. Donc il y a $n_1n_2n_3+\cdots+n_4n_5n_6$ points dont chacun est commun à six surfaces correspondantes de six systèmes (linéaires) projectifs d'ordres $n_1, n_2, \ldots n_6$.

## Chapitre troisième.

## Assemblages symétriques.

42. Si deux faisceaux projectifs de surfaces du même ordre $n$ ont une surface commune $P_{12}$, mais qui ne correspond pas à soi-même, on voit sans peine que la surface $\Phi$ d'ordre $2n$, engendrée par les deux faisceaux, sera touchée le long de la courbe-base du premier faisceau par la surface $P_{11}$ de ce même faisceau, qui correspond à la surface $P_{12}$ de l'autre**), et sera touchée le long de la courbe-base du second faisceau par la surface $P_{22}$ de celui-ci, correspondante à la surface $P_{12}$ du premier. Aux points communs aux surfaces $P_{11}$, $P_{12}$, $P_{22}$, c'est-à-dire aux points communs aux bases des deux faisceaux, la surface $\Phi$ sera touchée par $P_{11}$ et par $P_{22}$; or ces deux surfaces, étant quelconques, n'ont en général aucun point de contact; donc les points communs à $P_{11}$, $P_{12}$, $P_{22}$ sont doubles pour la surface $\Phi$. C'est-à-dire que la surface engendrée par deux faisceaux projectifs d'ordre $n$ formant un assemblage symétrique a $n^3$ points doubles.

43. Les surfaces correspondantes de trois réseaux projectifs du même ordre $n$ soient représentées resp. par

$$\begin{array}{lllll} P_{11}, & P_{12}, & P_{13}, & P_{14}, & \ldots \\ P_{21}, & P_{22}, & P_{23}, & P_{24}, & \ldots \\ P_{31}, & P_{32}, & P_{33}, & P_{34}, & \ldots \end{array}$$

*) On calcule ce nombre par la méthode employée ailleurs (27 et 28).

**) En effet, la surface du deuxième faisceau qui passe par un point quelconque de la base du premier est $P_{12}$ (17.).

et supposons que $P_{rs}$ et $P_{sr}$ soient toujours une seule et même surface. Dans cette hypothèse, les trois réseaux forment un assemblage symétrique. Soit $\Psi$ la surface d'ordre $3n$, lieu d'un point où se coupent trois surfaces correspondantes; on peut obtenir cette surface de la manière suivante.

Les deux faisceaux correspondants $(P_{22}, P_{23})$, $(P_{32}, P_{33})$ engendrent une surface $\Phi_{11}$ d'ordre $2n$, qui (42.) est touchée par $P_{33}$ le long de la courbe-base du second faisceau. De même, les faisceaux correspondants $(P_{11}, P_{13})$, $(P_{31}, P_{33})$ engendrent une surface $\Phi_{22}$ d'ordre $2n$, touchée par $P_{33}$ le long de la courbe $P_{31}P_{33}$. Et les deux faisceaux correspondants $(P_{21}, P_{23})$, $(P_{31}, P_{33})$, ou (ce qui revient au même*)) les faisceaux correspondants $(P_{12}, P_{13})$, $(P_{32}, P_{33})$, engendreront une surface $\Phi_{12}$ ou $\Phi_{21}$ d'ordre $2n$, rencontrée par $P_{33}$ suivant les courbes $P_{13}P_{33}$, $P_{23}P_{33}$, et, à cause de cela, touchée par la même surface $P_{33}$ aux points communs aux surfaces $P_{13}$, $P_{23}$, $P_{33}$.

Les surfaces analogues à $\Phi_{11}$, $\Phi_{12}$, engendrées à l'aide de faisceaux correspondants du deuxième et du troisième réseau, forment un nouveau réseau (22.), et chacune d'elles peut être regardée comme étant déterminée par le faisceau du troisième réseau qu'on emploie pour l'engendrer. De même pour les surfaces analogues à $\Phi_{21}$, $\Phi_{22}$, engendrées à l'aide de faisceaux correspondants du premier et du troisième réseau.

La surface $\Phi_{11}$ (du réseau $\Phi_{11}$, $\Phi_{12}$, ...) et la surface $\Phi_{21}$ (du réseau $\Phi_{21}$, $\Phi_{22}$, ...) correspondent au même faisceau $(P_{32}, P_{33})$ du troisième réseau donné, et resp. aux faisceaux $(P_{22}, P_{23})$, $(P_{12}, P_{13})$ du second et du premier réseau; ces surfaces contiennent donc, outre la courbe $P_{32}P_{33}$, la courbe lieu des points où se coupent trois surfaces correspondantes de ces trois faisceaux, qui sont projectifs. Et cette seconde courbe appartient aussi à $\Psi$, car ces trois faisceaux sont correspondants dans les trois réseaux donnés.

Analoguement, la surface $\Phi_{12}$ (du réseau $\Phi_{11}$, $\Phi_{12}$, ...) et la surface $\Phi_{22}$ (du réseau $\Phi_{21}$, $\Phi_{22}$, ...) correspondent au même faisceau $(P_{31}, P_{33})$ du troisième réseau donné et resp. aux faisceaux $(P_{21}, P_{23})$, $(P_{11}, P_{13})$ du second

*) Une surface d'ordre $2n$, engendrée par deux faisceaux projectifs $(U, V)$, $(U', V')$ d'ordre $n$, peut aussi être engendrée par deux autres faisceaux projectifs $(U, U')$, $(V, V')$, où à une surface $U''$ du premier faisceau correspond une surface $V''$ de l'autre, de la manière suivante: $U''$ rencontre la surface $(2n)$ suivant la base $UU'$ et une autre courbe $K$ d'ordre $n^2$, par laquelle et par la base $VV'$ on peut faire passer une surface $V''$ d'ordre $n$. En effet, $K$ a $n^3$ points communs avec la base $VV'$ (les points communs aux surfaces $U''$, $V$, $V'$); donc une surface d'ordre $n$, passant par la base $VV'$ et par un point de $K$ non situé sur cette base, aura $n^3+1$ points communs avec $K$, et par conséquent contiendra cette courbe, tout entière.

et du premier réseau; par conséquent, ces surfaces contiendront, outre la courbe $P_{31}P_{33}$, la courbe engendrée par ces trois faisceaux, qui sont projectifs: courbe, qui est aussi située sur $\Psi$, parce que ces faisceaux sont correspondants dans les réseaux donnés.

De même, une surface quelconque $\Phi_{1r}$ du faisceau $(\Phi_{11}, \Phi_{12})$ et la surface *correspondante* $\Phi_{2r}$ du faisceau $(\Phi_{21}, \Phi_{22})$ (les deux surfaces étant relatives à un même faisceau du troisième réseau donné) auront en commun, non-seulement une courbe d'ordre $n^2$ située sur $P_{33}$ et sur une surface du faisceau $(P_{31}, P_{32})$, mais aussi une courbe d'ordre $3n^2$ située sur $\Psi$. Les surfaces $\Psi$ et $P_{33}$ forment donc ensemble le lieu complet engendré par les faisceaux projectifs $(\Phi_{11}, \Phi_{12})$, $(\Phi_{21}, \Phi_{22})$. D'où il suit que, $\Phi_{12}$ et $\Phi_{21}$ étant une seule et même surface, la surface $\Psi$ est touchée par $\Phi_{11}$ et $\Phi_{22}$ le long de deux courbes d'ordre $3n^2$ situées sur $\Phi_{12}$ (42.); et que les points doubles de $\Psi$ sont les points communs aux trois surfaces $\Phi_{11}$, $\Phi_{12}$, $\Phi_{22}$. Or nous avons vu que ces surfaces sont touchées à la fois par $P_{33}$, aux points communs aux surfaces $P_{13}$, $P_{23}$, $P_{33}$; et chacun de ces points de contact absorbe quatre points d'intersection des trois surfaces $\Phi$ *); la surface $\Psi$ a donc $(2n)^3-4n^3=4n^3$ points doubles. Et par ces points passe toute surface $\Phi$, engendrée par deux faisceaux correspondants dans deux des réseaux donnés.

44. On peut, d'une manière analogue, construire la surface $\Psi$ lieu d'un point où se coupent trois surfaces correspondantes des trois réseaux projectifs $(P,Q,R)$, $(P',Q',R')$, $(P'',Q'',R'')$ d'ordres $n_1$, $n_2$, $n_3$, lesquels ne forment pas un assemblage symétrique (23.).

Les deux faisceaux $(Q', R')$, $(Q'', R'')$ engendrent une surface $\Phi_1$ d'ordre $n_2+n_3$, qui est coupée par $R''$ suivant deux courbes, $R''Q''$ et $R''R'$.

Les deux faisceaux $(Q, R)$, $(Q'', R'')$ engendrent une surface $\Phi_1$ d'ordre $n_1+n_3$, qui est coupée par $R''$ suivant deux courbes, $R''Q''$ et $R''R$.

Les deux faisceaux $(P', R')$ $(P'', R'')$ engendrent une surface $\Phi_2$ d'ordre $n_2+n_3$, qui est coupée par $R''$ suivant deux courbes, $R''P''$ et $R''R'$.

Et les deux faisceaux $(P, R)$, $(P'', R'')$ engendrent une surface $\Phi_2'$ d'ordre $n_1+n_3$, qui est coupée par $R''$ suivant deux courbes, $R''P''$ et $R''R$.

Les surfaces $\Phi_1$, $\Phi$ déterminent un faisceau d'ordre $n_2+n_3$ projectif

*) Cela est évident pour deux surfaces quelconques et un plan qui se touchent en un même point.

au faisceau $(Q'', P'')$. Si $S''$ est une surface quelconque de ce dernier faisceau, les faisceaux correspondants $(S', R')$, $(S'', R'')$ engendreront la surface $\Phi$ (du faisceau $(\Phi_1, \Phi_2)$) qui correspond à $S''$.

De même, les surfaces $\Phi'_1$, $\Phi'_2$ déterminent un faisceau d'ordre $n_1 + n_3$ qui est, lui aussi, projectif au faisceau $(Q'', P'')$. La surface $\Phi'$ correspondante à $S''$ est engendrée par les faisceaux correspondants $(S, R)$, $(S'', R'')$.

Les surfaces $\Phi$, $\Phi'$, outre la courbe $R''S''$, contiennent évidemment la courbe lieu d'un point où se croisent trois surfaces correspondantes des faisceaux projectifs $(S, R)$, $(S', R')$, $(S'', R'')$: courbe qui est située sur $\Psi$, car ces trois faisceaux sont correspondants dans les réseaux donnés. Les faisceaux projectifs $(\Phi_1, \Phi_2)$, $(\Phi'_1, \Phi'_2)$ engendrent donc un lieu qui est composé des surfaces $R''$ et $\Psi$.

45. Dans la recherche précédente soit $n_1 = n_2 = n_3 = n$. Dans ce cas ((43.), *note*) une surface quelconque $R_0$ du faisceau $(R', R'')$ coupe $\Phi_1$ et $\Phi_2$ suivant deux courbes situées resp. sur deux surfaces $Q_0$, $P_0$ appartenant aux faisceaux $(Q', Q'')$, $(P', P'')$. D'où il suit que les réseaux projectifs $(P, Q, R)$, $(P_0, Q_0, R_0)$, $(P'', Q'', R'')$ donneront naissance aux mêmes surfaces $\Phi_1$, $\Phi_2$, $\Phi'_1$, $\Phi_2$, et engendreront une surface d'ordre $3n$ qui, ayant quatre courbes d'ordre $3n^2$ en commun avec $\Psi$, coïncidera avec cette dernière surface. C'est-à-dire que, si une surface d'ordre $3n$ est engendrée par trois réseaux projectifs $(P, Q, R, \ldots)$, $(P', Q', R', \ldots)$, $(P'', Q'', R'', \ldots)$ d'ordre $n$, on peut substituer à l'un de ceux-ci, par ex. au deuxième, un nouveau réseau $(P_0, Q_0, R_0, \ldots)$ projectif aux donnés, et formé par des surfaces qui appartiennent resp. aux faisceaux $(P', P'')$, $(Q', Q'')$, $(R', R'')$, ....

Analoguement, nous pourrons remplacer un autre des réseaux donnés, $(P, Q, R, \ldots)$ par un nouveau réseau $(P''', Q''', R''', \ldots)$ projectif au précédent, où les surfaces $P'''$, $Q'''$, $R'''$, ... appartiennent resp. aux faisceaux $(P, P_0)$, $(Q, Q_0)$, $(R, R_0)$, ou, ce qui est la même chose, aux réseaux $(P, P', P'')$, $(Q, Q', Q'')$ et $(R, R', R'')$. Donc enfin, on pourra engendrer la même surface $\Psi$ par trois nouveaux réseaux $(P''', Q''', R''', \ldots)$, $(P^{IV}, Q^{IV}, R^{IV}, \ldots)$, $(P^{V}, Q^{V}, R^{V}, \ldots)$ projectifs aux données et formés par des surfaces appartenant resp. aux réseaux $(P, P', P'', \ldots)$, $(Q, Q', Q'', \ldots)$, $(R, R', R'', \ldots)$.

De plus: les réseaux projectifs $(P, P', P'', P''', \ldots)$, $(Q, Q', Q'', Q''', \ldots)$ et $(R, R', R'', R''', \ldots)$ engendrent une surface d'ordre $3n$ qui contient les quatre courbes $\Phi_1\Phi_2$, $\Phi_1\Phi'_1$, $\Phi'_1\Phi'_2$, $\Phi_2\Phi'_2$ d'ordre $3n^2$, et par suite coïncide avec $\Psi$.

46. Représentons par

$$\begin{array}{cccccc} P_{11}, & P_{12}, & P_{13}, & P_{14}, & P_{15}, & \dots \\ P_{21}, & P_{22}, & P_{23}, & P_{24}, & P_{25}, & \dots \\ P_{31}, & P_{32}, & R_{33}, & P_{34}, & P_{35}, & \dots \\ P_{41}, & P_{42}, & P_{43}, & P_{44}, & P_{45}, & \dots \end{array}$$

les surfaces correspondantes de quatre systèmes linéaires projectifs du même ordre $n$, et supposons que $P_{rs}$ et $P_{sr}$ soit toujours une seule et même surface. Dans cette hypothèse, les quatre systèmes forment un assemblage symétrique. La surface $\Delta$ d'ordre $4n$, lieu d'un point où se coupent quatre surfaces correspondantes (36.), peut être construite de la manière suivante.

Les trois réseaux correspondants $(P_{22}, P_{23}, P_{24})$, $(P_{32}, P_{33}, P_{34})$, $(P_{42}, P_{43}, P_{44})$ donnent (43.) une surface $\Psi_{11}$ d'ordre $3n$, qui est touchée par la surface $\Phi$ engendrée par les faisceaux $(P_{33}, P_{34})$, $(P_{43}, P_{44})$ suivant une courbe d'ordre $3n^2$ (située sur la surface engendrée par les faisceaux $(P_{32}, P_{34})$, $(P_{42}, P_{44})$, ou par les faisceaux $(P_{23}, P_{24})$, $(P_{43}, P_{44})$), laquelle est le lieu d'un point où se coupent trois surfaces correspondantes des faisceaux projectifs $(P_{23}, P_{24})$, $(P_{33}, P_{34})$, $(P_{43}, P_{44})$.

D'une manière semblable, les trois réseaux correspondants $(P_{11}, P_{13}, P_{14})$, $(P_{31}, P_{33}, P_{34})$, $(P_{41}, P_{43}, P_{44})$ engendrent (43.) une surface $\Psi_{22}$ d'ordre $3n$, qui est touchée par la surface $\Phi$ suivant une courbe d'ordre $3n^2$ (située sur la surface engendrée par les faisceaux $(P_{13}, P_{14})$, $(P_{43}, P_{44})$ ou par les faisceaux $(P_{31}, P_{34})$, $(P_{41}, P_{44})$, laquelle est le lieu des intersections de trois surfaces correspondantes des faisceaux projectifs $(P_{13}, P_{14})$, $(P_{33}, P_{34})$, $(P_{43}, P_{44})$.

Enfin, les trois réseaux correspondants $(P_{21}, P_{23}, P_{24})$, $(P_{31}, P_{33}, P_{34})$, $(P_{41}, P_{43}, P_{44})$, ou ce qui revient au même (45.), les trois réseaux correspondants $(P_{12}, P_{13}, P_{14})$, $(P_{32}, P_{33}, P_{34})$, $(P_{42}, P_{43}, P_{44})$ engendrent (44.) une surface $\Psi_{12}$ ou $\Psi_{21}$ d'ordre $3n$, qui est coupée par $\Phi$ suivant les deux courbes d'ordre $3n^2$ déjà mentionnées. D'où il suit que les points communs à ces deux courbes, c'est-à-dire les $4n^3$ points (19.) par lesquels passent quatre surfaces correspondantes des faisceaux projectifs $(P_{13}, P_{14})$, $(P_{23}, P_{24})$, $(P_{33}, P_{34})$, $(P_{43}, P_{44})$, sont tels que la surface $\Phi$ y est tangente à chacune des surfaces $\Psi_{11}$, $\Psi_{22}$, $\Psi_{12}$.

Les surfaces $\Psi_{11}$, $\Psi_{12}$ déterminent un faisceau projectif au faisceau $(P_{42}, P_{41})$. Si $P_{4r}$ est une surface quelconque de ce dernier faisceau, et si $P_{3r}$, $P_{2r}$, $P_{1r}$ sont les surfaces correspondantes des faisceaux $(P_{32}, P_{31})$, $(P_{22}, P_{21})$, $(P_{12}, P_{11})$, la surface correspondante $\Psi_{1r}$ du faisceau $(\Psi_{11}, \Psi_{12})$ sera engendrée (44.) par les réseaux $(P_{2r}, P_{23}, P_{24})$, $(P_{3r}, P_{33}, P_{34})$, $(P_{4r}, P_{43}, P_{44})$.

Les surfaces $\Psi_{21}$, $\Psi_{22}$ déterminent un autre faisceau projectif au même faisceau $(P_{42}, P_{41})$. La surface $\Psi_{2r}$ du faisceau $(\Psi_{21}, \Psi_{22})$, qui correspond à $P_{4r}$, est engendrée par les réseaux $(P_{1r}, P_{13}, P_{14})$, $(P_{3r}, P_{33}, P_{34})$, $(P_{4r}, P_{43}, P_{44})$.

Les deux surfaces $\Psi_{1r}$, $\Psi_{2r}$ d'ordre $3n$ passent ensemble par la courbe d'ordre $3n^2$ engendrée par les faisceaux $(P_{r3}, P_{r4})$, $(P_{33}, P_{34})$, $(P_{43}, P_{44})$ et située sur la surface $\Phi$; elles se couperont donc suivant une autre courbe de l'ordre $6n^2$, lieu d'un point (24.) par lequel passent à la fois quatre surfaces correspondantes des quatre réseaux projectifs $(P_{1r}, P_{13}, P_{14})$, $(P_{2r}, P_{23}, P_{24})$, $(P_{3r}, P_{33}, P_{34})$, $(P_{4r}, P_{43}, P_{44})$. Cette courbe appartient à $\Delta$, car ces quatre réseaux sont correspondants dans les systèmes donnés; les faisceaux projectifs $(\Psi_{11}, \Psi_{12})$, $(\Psi_{21}, \Psi_{22})$ engendrent donc un lieu composé de la surface $\Phi$ d'ordre $2n$ et de la surface $\Delta$ d'ordre $4n$.

On en conclut (42.) que les points doubles du lieu composé $\Delta\Phi$ sont les intersections des trois surfaces $\Psi_{11}$, $\Psi_{22}$, $\Psi_{12}$. Nous avons vu que ces trois surfaces ont $4n^3$ points de contact, qui sont équivalents à $4.4n^3$ intersections; le nombre des points doubles est donc $(3n)^3 - 16n^3 = 11n^3$. Mais les points doubles de $\Phi$ sont (42.) les $n^3$ intersections des surfaces $P_{33}$, $P_{44}$, $P_{34}$; ainsi $\Delta$ a $10n^3$ points doubles, situés sur toutes les surfaces analogues à $\Psi_{11}$, $\Psi_{22}$, $\Psi_{12}$, . . . .

De ce que $\Delta$ est engendrée au moyen de faisceaux projectifs formant un assemblage symétrique (42.), il suit encore que cette surface est touchée par $\Psi_{11}$ et $\Psi_{22}$ suivant deux courbes d'ordre $6n^2$, situées sur $\Psi_{12}$.

## Chapitre quatrième.

## Propriétés relatives aux surfaces nodales conjuguées.

47. Revenons à la considération d'une surface fondamentale $F_n$ d'ordre $n$ (générale, sans points multiples) et des surfaces polaires. On a vu (2.) que les premières polaires de tous les points de l'espace forment un système linéaire d'ordre $n-1$. La Jacobienne de ce système, c'est-à-dire le lieu des points doubles des premières polaires, ou bien encore (13.) le lieu d'un point dont la quadrique polaire est un cone, sera (37.) une surface de l'ordre $4(n-2)$. On appelle cette surface la *Hessienne* ou la *surface nodale* de la surface fondamentale.

Soient $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ les premières polaires de quatre points quelconques ***1, 2, 3, 4*** (non situés dans un même plan); on peut regarder (37.) la Hessienne comme Jacobienne de ces quatre surfaces d'ordre $n-1$. Les premières polaires de tous les points de l'espace, par rapport à ces quatre surfaces, forment, d'après le théorème (11.), un assemblage symétrique de quatre systémes linéaires projectifs d'ordre $n-2$; donc (46.), la Hessienne a $10(n-2)^3$ points doubles, situés sur un nombre infini de surfaces $(\Psi_{11}, \Psi_{12}, \ldots)$ d'ordre $3(n-2)$.

En désignant par $P_{rs}$ la deuxième polaire mixte de deux points *rs*, et en conservant du reste les symboles adoptés ci-dessus (46.), on voit tout de suite que $\Psi_{12}$ est le lieu des poles du plan ***134*** par rapport aux premières polaires des points du plan ***234*** (30.), et aussi le lieu des poles du plan ***234*** par rapport aux premières polaires des points du plan ***134***. Or, d'après le théorème (11.) si le plan ***134*** est la polaire $(n-2)^{\text{ème}}$ d'un point $x$, par rapport à la première polaire d'un point $r$ du plan ***234***, le même plan ***134*** est aussi la première polaire de $r$, par rapport à la polaire $(n-2)^{\text{ème}}$ de $x$, c'est-à-dire que ***134*** est le plan polaire de $r$ par rapport à la quadrique polaire de $x$. Donc, $\Psi_{12}$ est le lieu d'un point $x$ tel que les plans ***134, 234*** sont conjugués par rapport à la quadrique polaire de $x$ *).

Comme cas particulier, $\Psi_{11}$ est le lieu des poles du plan ***234*** par rapport aux premières polaires des points de ce même plan, et aussi le lieu d'un point dont la quadrique polaire est tangente au plan ***234***; et $\Psi_{22}$ aura la même signification par rapport au plan ***134***. Appelons ces surfaces $\Psi_{11}$, $\Psi_{22}$ *surfaces polaires pures* des plans ***234, 134*** resp., et $\Psi_{12}$ *surface polaire mixte* de ces mêmes plans. Donc (46.):

La Hessienne est touchée par la surface polaire pure d'un plan quelconque suivant une courbe gauche d'ordre $6(n-2)^2$, qui est le lieu des points doubles des premières polaires dont les poles sont dans le plan donné. Les deux courbes de contact entre la Hessienne et les surfaces polaires pures de deux plans quelconques sont situées ensemble sur la surface polaire mixte de ces deux plans. Toutes ces surfaces polaires pures et mixtes, et dès lors

---

*) La section de $\Psi_{12}$ par l'un des plans *234*, *134* est évidemment le lieu des points de contact de ce plan avec les premières polaires des points de l'autre.

toutes ces courbes gauches d'ordre $6(n-2)^2$ passent par les $10(n-2)^3$ points doubles de la Hessienne.

48. La surface $\Psi$, polaire pure d'un plan quelconque ***123***, a $4(n-2)^3$ points doubles (43.) situés sur un nombre infini de surfaces ($\Phi_{11}, \Phi_{12}, \ldots$) d'ordre $2(n-2)$. Si $r$, $s$ sont deux points fixes d'une droite donnée, et que $x$ soit un point mobile sur une autre droite donnée $G$, les surfaces $P_{rx}$, $P_{sx}$ formeront deux faisceaux projectifs, générateurs d'une surface $\Phi$ d'ordre $2(n-2)$, qui sera le lieu des courbes polaires (d'ordre $(n-2)^2$) de la droite $rs$ par rapport aux premières polaires des points de $G$ (3.). Or, d'après le théorème (12.), si les premières polaires de $r$, $s$ par rapport à la première polaire de $x$ passent par un point $y$, réciproquement la première polaire de $x$ par rapport à la $(n-2)^{\text{ème}}$ polaire de $y$ passera par $r$, $s$; c'est-à-dire que le plan polaire de $x$ par rapport à la quadrique polaire de $y$ passera par la droite $rs$. Donc, $\Phi$ est le lieu d'un point $y$ tel que la droite réciproque de la droite $G$, par rapport à la quadrique polaire de $y$, est rencontrée par la droite $rs$. Dans cette définition, on peut évidemment permuter entre elles les droites $rs$, $G$; donc $\Phi$ est aussi le lieu des courbes polaires de $G$ par rapport aux premières polaires des points de $rs$ *). D'après ce qui précède, la surface $P_{rx}$ coupe $\Phi$ suivant deux courbes d'ordre $(n-2)^2$, dont l'une est la courbe polaire de la droite $rs$ par rapport à la première polaire du point $x$ de $G$, et l'autre est la courbe polaire de $G$ par rapport à la première polaire du point $r$ de $rs$; or, les $(n-2)^3$ points communs à ces deux courbes sont autant de points de contact entre $P_{rx}$ et $\Phi$; donc $\Phi$ est aussi l'enveloppe de la deuxième polaire mixte de deux poles mobiles, l'un sur $G$, l'autre sur $rs$. Nous appelons cette surface $\Phi$ *surface polaire mixte* des droites $G$ et $rs$.

En revenant à la surface $\Psi$, on voit que $\Phi_{12}$ est la surface polaire mixte des droites ***13***, ***23***. Aussi, $\Phi_{11}$ a la même signification par rapport à deux droites coïncidentes: c'est-à-dire que $\Phi_{11}$ est le lieu des poles dont les quadriques polaires sont tangentes à la droite ***23***, etc. Appelons ce lieu *surface polaire pure* de la droite ***23***. Ainsi, en résumé (43):

---

*) Si l'on convient d'appeler *Jacobienne* de quatre surfaces, dont quelques-unes soient des plans, le lieu d'un point où se coupent les premières polaires d'un point situé dans les plans donnés par rapport aux autres surfaces données; $\Phi$ sera la Jacobienne de deux plans passant par $G$ et des surfaces $P_r$, $P_s$. De même, $\Psi_{12}$ est la Jacobienne du plan *134* et des surfaces $P_2$, $P_3$, $P_4$; etc.

La surface polaire (pure) d'un plan donné est touchée par la surface polaire pure d'une droite quelconque située dans ce plan, suivant une courbe gauche d'ordre $3(n-2)^2$, qui est le lieu des poles du plan par rapport aux premières polaires des points de la droite. Les deux courbes de contact entre la surface polaire du plan et les surfaces polaires pures de deux droites tracées dans ce plan, sont placées sur la surface polaire mixte des deux droites. Toutes ces surfaces polaires pures et mixtes (des droites du plan), et par suite toutes ces courbes gauches d'ordre $3(n-2)^2$, passent par les $4(n-2)^3$ points doubles de la surface polaire du plan donné.

49. La surface $P_{rs}$ (deuxième polaire mixte des points $r$, $s$) admet, elle aussi, une définition analogue à celles des surfaces $\Psi_{12}$ et $\Phi_{12}$. En effet, si la première polaire de $r$ par rapport à la première polaire de $s$ passe par un point $x$, réciproquement, d'après le théorème (12.), la première polaire de $s$ par rapport à la $(n-2)^{\text{ème}}$ polaire de $x$ passera par $r$, c'est-à-dire que le plan polaire de $s$ par rapport à la quadrique polaire de $x$ passe par $r$. Donc, $P_{rs}$ est le lieu d'un point $x$ tel que les points $r$, $s$ sont conjugués par rapport à la quadrique polaire de $x$. Si les points $r$, $s$ coïncident, on retombe sur la définition de $P_{rr}$ (*deuxième polaire pure* du point $r$).

50. La surface $\Phi$, polaire pure d'une droite quelconque **12**, a $(n-2)^3$ points doubles (42.) situés dans un nombre infini de surfaces $(P_{11}, P_{12}, \ldots)$ d'ordre $n-2$. On est ainsi conduit à dire que:

La surface polaire (pure) d'une droite donnée est touchée par la deuxième polaire pure d'un point quelconque de cette droite suivant une courbe gauche d'ordre $(n-2)^2$, qui est la courbe polaire de la droite par rapport à la première polaire du point. Les deux courbes de contact entre la surface polaire de la droite et les deuxièmes polaires pures de deux points quelconques de la même droite, sont placées sur la deuxième polaire mixte de ces points. Toutes ces deuxièmes polaires pures et mixtes (des points de la droite), et dès lors toutes ces courbes d'ordre $(n-2)^2$, passent par les $(n-2)^3$ points doubles de la surface polaire de la droite donnée.

51. Il résulte de ce qui précède (48, 50) que la surface polaire pure d'un plan est l'enveloppe des surfaces polaires pures des

droites situées dans ce plan, et que la surface polaire pure d'une droite est l'enveloppe des deuxièmes polaires pures des points de cette droite. On peut ajouter, d'après (43, 46), que les surfaces polaires pures et mixte de deux droites, situées dans un même plan, sont touchées aux mêmes $(n-2)^3$ points par la deuxième polaire pure du point de concours de ces droites (d'où il résulte que la surface polaire pure d'un plan est aussi l'enveloppe des deuxièmes polaires pures des points du plan); et que les surfaces polaires pures et mixte de deux plans sont touchées aux mêmes $4(n-2)^3$ points par la surface polaire pure de la droite commune à ces plans. Et en outre (44.): la courbe gauche d'ordre $3(n-2)^2$, lieu des poles d'un plan donné par rapport aux premières polaires des points d'une droite donnée, est placée sur la surface polaire mixte de ce plan et d'un autre plan quelconque passant par la droite donnée, et aussi sur la surface polaire mixte de cette droite et d'une autre droite quelconque située dans le plan donné. Etc. etc.

52. Les premières polaires des points d'une droite quelconque forment un faisceau, qui contient $4(n-2)^3$ surfaces douées d'un point double (20.). Donc, le lieu des poles dont les premières polaires ont un point double, est une surface d'ordre $4(n-2)^3$. On l'appelle ***surface nodale conjuguée***, ou ***surface Steinerienne***.

Nous pouvons dire (13.) que la Hessienne est le lieu des points dont les quadriques polaires sont des cones, et que la Steinerienne est le lieu des sommets de ces cones.

La Hessienne et la Steinerienne se correspondent, point à point. Si $o$ est un point double de la première polaire d'un point $o'$, c'est-à-dire, si $o$ est le pole d'un cone quadrique de sommet $o'$, les points $o$, $o'$ seront deux points correspondants de la Hessienne et de la Steinerienne.

53. La Hessienne est aussi le lieu des points de contact entre les premières polaires (32.). Soient $o$, $o'$ deux points correspondants des deux surfaces nodales conjuguées; la première polaire de $o'$ et une autre première polaire passant par $o$ détermineront un faisceau de surfaces touchées en $o$ par un même plan $E$. Tout point $p$ commun à ce plan et au plan polaire de $o$ aura sa deuxième polaire passant par $o$ (la droite $po$ est, en effet, tangente en $o$ à la première polaire de $p$); or, le point $o'$ jouit, lui aussi, de cette propriété: donc, $o'$ est situé sur l'intersection de $E$ par le plan polaire de $o$, c'est-à-dire que le plan $E$ passe toujours par la droite $oo'$.

54. Soient $o$, $o_1$ deux points, infiniment voisins, de la Hessienne; $o'$, $o'_1$ leurs points correspondants sur la Steinerienne. Dès que les premières polaires de $o'$, $o'_1$ sont consécutives et donées des points doubles $o$, $o_1$, leur courbe d'intersection passera par $o$, et conséquemment le plan polaire de $o$ passera par $o'o'_1$, qui est une droite tangente en $o'$ à la Steinerienne. Cela subsiste quelle que soit la direction de cette tangente; donc le plan polaire d'un point de la Hessienne est tangent à la Steinerienne au point correspondant.

On déduit de là que la Steinerienne est une surface de la classe $4(n-1)^2(n-2)$, car ce nombre est celui des intersections de la Hessienne avec la courbe polaire d'une droite quelconque.

55. Les poles d'un plan (par rapport à la surface fondamentale) sont (3.) les $(n-1)^3$ intersections des premières polaires de trois points $a$, $b$, $c$ de ce plan. Soit $a$ un point de la Steinerienne, et soit $abc$ le plan tangent à cette surface en ce point; dans ce cas, la première polaire de $a$ est douée d'un point double $a'$, et les premières polaires de $b$ et $c$ passent par $a'$. D'où il suit que le plan tangent à la Steinerienne, en un de ses points, a deux poles coïncidents au point correspondant de la Hessienne.

56. Un point double $\omega$ de la Hessienne est situé sur la surface polaire mixte de deux plans quelconques (47.); c'est-à-dire qu'il y a dans un plan quelconque un point tel que le plan polaire de $\omega$, par rapport à la première polaire de ce point, est indéterminé: autrement, il y a dans un plan quelconque un point dont la première polaire a un point double en $\omega$. Donc, $\omega$ est le point double d'un nombre infini de premières polaires, les poles desquelles, appartenant naturellement à la Steinerienne (52.), sont en ligne droite (car il y a un tel pole dans un plan quelconque). Ainsi, au point $\omega$ correspond sur la Steinerienne, au lieu d'un point unique, une droite, dont chaque point sera, par conséquent, double pour la quadrique polaire de $\omega$; c'est-à-dire que la quadrique polaire de $\omega$ est une couple de plans passant par cette droite. Et le plan polaire de $\omega$ sera tangent à la Steinerienne tout le long de cette même droite. Donc

La Steinerienne contient $10(n-2)^3$ droites, dont chacune correspond à un des points doubles de la Hessienne.

57. Deux courbes situées resp. sur la Hessienne et sur la Steinerienne peuvent être nommées ***correspondantes***, lorsque l'une est le lieu des points

correspondants aux points de l'autre. Ainsi par ex. la courbe plane d'ordre $4(n-2)^3$, où la Steinerienne est coupée par un plan quelconque $E$, et la courbe gauche d'ordre $6(n-2)^2$, au long de laquelle la Hessienne est touchée par la surface polaire (pure) de $E$ (47.), sont deux courbes correspondantes; parce que la deuxième courbe est le lieu des points doubles des premières polaires des points de $E$.

On peut très-facilement déterminer la courbe qui correspond à l'intersection de la Hessienne avec une surface quelconque $S_m$ d'ordre $m$. Soit $K$ la surface enveloppe des plans polaires des points de $S_m$: surface qui est aussi le lieu d'un point dont la première polaire est tangente à $S_m$ (15.). Si $o$ est un point commun à $S_m$ et à la Hessienne, le plan polaire de $o$ touchera à la fois $K$ et la Steinerienne au point correspondant $o'$ (54.). Or, la première polaire de $o'$, ayant un point double en $o$, touche $S_m$ en ce point; donc $o'$ appartient aussi à $K$, et par suite la Steinerienne et la surface $K$ ont un point de contact en $o'$. Donc $K$ est tangente a la Steinerienne tout le long de la courbe qui correspond à l'intersection de la Hessienne avec $S_m$ *).

Les points où cette courbe de contact est rencontrée par un plan quelconque correspondent aux points communs à $S_m$ et à une courbe d'ordre $6(n-2)^2$; l'ordre de la courbe de contact est donc $6m(n-2)^2$.

On peut demander aussi l'ordre de $K$. Les points où cette surface est rencontrée par une droite arbitraire sont les poles d'autant de surfaces d'un faisceau, qui touchent $S_m$; donc (33.) $K$ est de l'ordre $m\{3(n-2)^2+(m-1)^2+2(n-2)(m-1)\}$. Si $m=1$, l'ordre de $K$ (lieu d'un point dont la première polaire est tangente à un plan donné) est $3(n-2)^2$: ainsi qu'on l'a déjà trouvé (15.).

58. Nous avons vu (5.) que la quadrique polaire d'un point parabolique de la surface fondamentale est un cone. Réciproquement, il est évident que tout point de la surface fondamentale, dont la quadrique polaire soit un cone (n'ayant pas son sommet au pole, auquel cas on aurait un point double), est un point parabolique. Par conséquent, le lieu des points paraboliques est la courbe gauche d'ordre $4n(n-2)$, intersection de la surface fondamentale avec la Hessienne. Naturellement, cette courbe

*) Ce même raisonnement prouve aussi que la développable polaire d'une droite touche la Steinerienne aux points correspondants aux intersections de la Hessienne avec cette droite. (Et de même pour une ligne quelconque.)

partage la surface $F_n$ en deux régions, dont l'une contient les points hyperboliques (à indicatrice hyperbolique) et l'autre les points elliptiques (à indicatrice elliptique). C'est-à-dire que le plan tangent, en un point de la surface $F_n$, coupe celle-ci dans une courbe pour laquelle le point de contact est un nœud ou un point isolé, suivant que ce point appartient à la première ou à la deuxième région.

59. Un plan tangent de $F_n$ est stationnaire si le point de contact est parabolique. Or, la première polaire d'un point quelconque de l'espace rencontre la courbe parabolique en $4n(n-1)(n-2)$; ce nombre exprime donc, combien de plans stationnaires passent par ce point arbitraire: ainsi qu'on l'a déjà trouvé ailleurs (8.).

60. Supposons que la surface fondamentale $F_n$ contienne une droite $A$. Un plan mené arbitrairement par $A$ coupe $F_n$ dans une courbe d'ordre $n-1$; et une surface d'ordre $n-1$, menée aussi arbitrairement par cette courbe, rencontrera de nouveau $F_n$ dans une courbe gauche $C$ d'ordre $(n-1)^2$, qu'on peut prendre comme base d'un faisceau d'ordre $n-1$. Une surface quelconque $S$ de ce faisceau coupe $F_n$ dans une courbe plane d'ordre $n-1$, dont le plan $E$ passe par la droite $A$ (car cette dernière courbe doit contenir les $n-1$ intersections de $S$ avec $A$). Ainsi, la surface $F_n$ peut être engendrée à l'aide de deux faisceaux projectifs, l'un de plans $E$ par $A$, l'autre de surfaces $S$ par $C$.

Tout plan $E$ est tangent à $F_n$ en $n-1$ points: c'est-à-dire aux points où $A$ rencontre la surface $S$ correspondante à $E$; car ces points sont doubles pour la section de $F_n$ par $E$. On peut demander le nombre des plans $E$ qui touchent $F_n$ hors de la droite $A$. Un plan $E$ mené arbitrairement par $A$ touche $3(n-2)^2$ surfaces $S'$ (car celles-ci forment un faisceau), auxquelles correspondent autant de plans $E'$. Réciproquement, la surface $S'$ correspondante à un plan arbitraire $E'$ est de la classe $(n-1)(n-2)^2$, et par suite elle est touchée par autant de plans $E$. Il y aura donc $3(n-2)^2+(n-1)(n-2)^2$ coïncidences de $E$ avec $E'$, c'est-à-dire qu'il y aura $(n+2)(n-2)^2$ plans $E$ dont chacun coupera $F_n$ suivant une courbe (d'ordre $n-1$) douée de point double.

Dans le faisceau des surfaces $S$ il y en a $2(n-2)$ qui touchent $A$; les points de contact sont les points doubles de l'involution d'ordre $n-1$ formée sur $A$ par les surfaces $S$, ou, ce qui est la même chose, par les courbes d'ordre $n-1$ communes à $F_n$ et aux plans $E$. Ces $2(n-2)$ points sont les

seuls points paraboliques qui se trouvent sur $A$; car si un point de $A$ est parabolique, le plan $E$ tangent à $F_n$ en ce point doit couper cette surface suivant une courbe (d'ordre $(n-1)$) touchée en ce point par $A$. Mais d'un autre côté, la Hessienne étant de l'ordre $4(n-2)$, ces $2(n-2)$ points doivent représenter les $4(n-2)$ intersections de cette surface avec la droite $A$; donc

Toute droite située sur la surface fondamentale est tangente en $2(n-2)$ points à la surface Hessienne, et par suite à la courbe parabolique.

61. Cherchons l'ordre du lieu des paires de droites osculatrices à la surface fondamentale, aux points de l'intersection de celle-ci avec une autre surface $S_m$ d'ordre $m$. Souvenons-nous que les droites osculatrices en un point de $F_n$ forment l'intersection du plan polaire et de la quadrique polaire de ce point (5.). Soit donc $G$ une droite arbitraire; $x$ un point quelconque de cette droite. Si une quadrique polaire passe par $x$, le lieu du pole est la deuxième polaire de $x$ qui coupera la courbe $(mn)$ en $mn(n-2)$ points; et les plans polaires de ces points rencontreront $G$ en $mn(n-2)$ points $x'$. Réciproquement, les plans polaires qui passent par un point quelconque $x'$ de $G$ ont leurs poles dans la première polaire de $x'$, qui traversera la courbe $(mn)$ en $mn(n-1)$ points, dont les quadriques polaires donnent $2mn(n-1)$ points $x$ sur $G$. Il y aura donc, sur $G$, $mn(n-2)+2mn(n-1)$ coïncidences de $x$ avec $x'$, c'est-à-dire que le lieu demandé est une surface de l'ordre $mn(3n-4)$.

Pour cette surface (gauche, en général) la courbe $(mn)$ est double, car chacun de ses points est l'intersection de deux génératrices rectilignes. Si $m=1$, le lieu en question coupe le plan $S$ suivant la section de $F_n$ par $S$ et les $3n(n-2)$ tangentes stationnaires de cette courbe plane.

Si $m=4(n-2)$, l'ordre du lieu devient $4n(n-2)(3n-4)$; mais, si $S_m$ est la Hessienne, il faut prendre la moitié seulement de ce nombre, parce que la courbe $(mn)$ est, dans ce cas, la courbe parabolique (58.), et par conséquent, en chacun de ses points les deux droites osculatrices sont coïncidentes.

Dans ce même cas, le lieu est une surface développable, car le plan tangent à $F_n$ en un point parabolique est stationnaire (c'est-à-dire qu'il doit être regardé comme un plan bitangent, dont les deux points de contact sont infiniment voisins), et deux plans stationnaires consécutifs passent par la droite oscu-

latrice *); d'où il suit que le lieu des droites osculatrices, le long de la courbe parabolique, coïncide avec la surface enveloppée par les plans stationnaires **), dont nous avons déjà déterminé la classe (8.).

62. On demande à connaître la développable circonscrite à la surface fondamentale suivant la courbe d'ordre $n$, intersection de celle-ci avec un plan donné $E$.

La première polaire d'un point arbitraire $x$ de l'espace rencontre la courbe $(n)$ en $n(n-1)$ points; la classe de la développable est donc $n(n-1)$.

Si deux de ces $n(n-1)$ points coïncident, le point $x$ appartiendra à la développable; combien de points de cette espèce y a-t-il dans une droite arbitraire $G$? Les premières polaires des points de $G$ forment un faisceau et par suite coupent le plan $E$ suivant un faisceau d'ordre $n-1$, dans lequel il y a $n(3n-5)$ courbes ***) qui touchent la courbe $(n)$, celle-ci étant supposée sans points multiples. Si cette courbe a $\delta$ points doubles et $k$ rebroussements (c'est-à-dire, si le plan $E$ a $\delta$ contacts ordinaires et $k$ contacts stationnaires avec $F_n$), le nombre précédent deviendra $n(3n-5)-(2\delta+3k)$. Ce nombre exprime donc l'ordre de notre développable.

Si, parmi les $n(n-1)$ intersections de la première polaire de $x$ avec la courbe $(n)$, il y a trois points coïncidents, le point $x$ appartiendra à la courbe cuspidale de la développable; et si, au contraire, la première polaire de $x$ a deux contacts avec la courbe $(n)$, $x$ sera un point de la courbe double de la développable. On peut donc demander combien de points $x$ de cette espèce sont contenus dans un plan quelconque. Les premières polaires des points de ce plan coupent $E$ suivant un réseau d'ordre $n-1$, dans lequel il y a $6n(n-2)-(6\delta+8k)$ courbes osculatrices à la courbe $(n)$, et $\frac{1}{2}\{n(3n-5)-(2\delta+3k)\}^2-n(11n-21)+10\delta+\frac{27}{2}k$ courbes qui touchent la même courbe en deux points distincts. Ces nombres expriment donc l'ordre de la courbe cuspidale et l'ordre de la courbe nodale de la développable dont il s'agit.

63. Quel est le lieu d'un point tel que sa quadrique polaire

---

*) [*Teoria geometrica delle superficie,* 31.]

**) Cette développable est circonscrite à la Steinerienne suivant la courbe d'ordre $6n(n-2)^2$ qui correspond (57.) à la courbe parabolique. En effet, si $o$ est un point parabolique, le plan (stationnaire) polaire de $o$ touche en ce point la surface fondamentale, et au point correspondant, la Steinerienne (54.).

***) Ce nombre et les autres qui suivent sont empruntés aux traités géométriques des courbes planes. [*Teoria geometrica delle curve piane,* 87 et 103.]

(par rapport à $F_n$) passe par les sommets d'un tétraèdre conjugué à une surface donnée $S$ de second ordre? Soient $a$, $b$ deux points quelconques de l'espace; $C$ la courbe d'ordre $(n-2)^2$, intersection des deuxièmes polaires de $a$ et $b$, et dès lors lieu des poles des quadriques polaires qui passent par ces points; $a'$, $b'$ les points où $S$ coupe la droite réciproque de $ab$ par rapport à $S$. Les quadriques polaires passant par $a$ et $b$, forment une série telle qu'il y en a $(n-2)^3$ passant par un troisième point quelconque donné; donc, il y aura $(n-2)^3$ quadriques de cette même série qui diviseront harmoniquement le segment $a'b'$; c'est-à-dire que la courbe $C$ rencontre le lieu cherché en $(n-2)^3$ points. Conséquemment ce lieu est une surface d'ordre $(n-2)^3:(n-2)^2=n-2$.

Tout point commun à ce lieu et à la Hessienne est dès lors le pole d'un cone (quadrique) polaire circonscrit à un trièdre conjugué à $S$. Donc (57.) le lieu des sommets des cones (quadriques) polaires circonscrits à des trièdres conjugués à la quadrique donnée est une courbe gauche d'ordre $6(n-2)^3$.

64. Quel est le lieu d'un point tel que sa quadrique polaire soit inscrite dans un tétraèdre conjugué à une surface donnée $S$ de second ordre? Soient $A$, $B$ deux plans quelconques; $C$ la courbe d'ordre $9(n-2)^2$, intersection des surfaces polaires (pures) des plans $A$, $B$, et dès lors lieu des poles des quadriques polaires qui touchent chacun de ces plans; $A'$, $B'$ les plans tangents de $S$ menés par la droite qui est réciproque de la droite $AB$ par rapport à $S$. Les quadriques polaires tangentes à $A$ et à $B$ forment une série telle qu'il y en a $27(n-2)^3$ tangentes à un troisième plan quelconque; donc il y en a aussi $27(n-2)^3$ telles qui seront conjuguées aux plans $A'$, $B'$. Ainsi la courbe $C$ contient $27(n-2)^3$ points du lieu demandé; donc ce lieu est une surface de l'ordre $27(n-2)^3:9(n-2)^2=3(n-2)$.

Si le tétraèdre conjugué à $S$ a un sommet $x$ sur $S$, la face opposée sera le plan tangent à cette surface en $x$, et, des trois autres faces, une coïncidera avec ce même plan tangent, et les deux restantes seront deux plans quelconques menés par deux tangentes conjuguées de $S$ en $x$. Un tel tétraèdre peut donc être regardé comme étant circonscrit à un cone quadrique quelconque de sommet $x$. Par conséquent, si $x$ est un point commun à $S$ et à la Hessienne, le pole du cone polaire de sommet $x$ appartiendra au lieu dont il s'agit; c'est-à-dire que ce lieu coupe la Hessienne suivant la courbe correspondante à l'intersection de la Steinerienne avec $S$.

Si $S$ est le système de deux plans, le lieu considéré devient évidemment la surface polaire mixte de ces plans (45.).

65. Cherchons le lieu d'un point tel que sa quadrique polaire, par rapport à la surface fondamentale $F_n$, passe par les sommets d'un tétraèdre conjugué à la quadrique polaire du même point, par rapport à la Hessienne. Soit $G$ une droite arbitraire; $x$ un point de $G$. Le lieu des poles des quadriques polaires relatives à $F_n$, circonscrites à des tétraèdres conjugués à la quadrique polaire du point $x$ par rapport à la Hessienne, coupe la droite $G$ en $n-2$ points $x'$ (63.). Réciproquement, si une quadrique polaire relative à la Hessienne doit être conjuguée à un tétraèdre inscrit à la quadrique polaire d'un point $x'$, par rapport à $F_n$ (c'est-à-dire, si la première quadrique doit être inscrite à un tétraèdre conjugué à l'autre), le lieu sera (64.) une surface d'ordre $3[4(n-2)-2]$, qui coupera $G$ en autant de points $x$. Cette droite contient donc $n-2+12(n-2)-6$ coïncidences de $x$ avec $x'$; en d'autres termes, le lieu demandé est une surface d'ordre $13n-32$.

Considérant les points communs à cette surface et à la Hessienne, nous pouvons ajouter que le lieu d'un point (sur la Hessienne) dont le cone polaire est circonscrit à un trièdre conjugué à la quadrique polaire du même point, par rapport à la Hessienne, est une courbe gauche de l'ordre $4(n-2)(13n-32)$.

66. Pareillement, on trouve que le lieu d'un point tel que sa quadrique polaire par rapport à $F_n$ soit inscrite à un tétraèdre conjugué à la quadrique polaire du même point par rapport à la Hessienne, est une surface $T$ de l'ordre $4(n-2)-2+3(n-2) = 7n-16$.

Cette surface coupera la Hessienne suivant une courbe, chaque point de laquelle sera le pole (relativement à $F_n$) d'un cone quadrique ayant son sommet sur la quadrique polaire du même point par rapport à la Hessienne. Donc, le lieu d'un point (sur la Hessienne) dont la quadrique polaire par rapport à la Hessienne, passe par le point correspondant de la Steinerienne, est une courbe gauche d'ordre $4(n-2)(7n-16)$, située dans la surface $T$. Cette courbe passe deux fois par les $10(n-2)^3$ points doubles de la Hessienne, car chacun de ces points a un nombre infini de points correspondants sur une droite (56.) qui coupera deux fois la quadrique polaire de ce point, relative à la Hessienne.

Quel est le lieu d'un point, le plan polaire duquel par rap-

port à la Hessienne est tangent à la quadrique polaire du même point relativement à $F_n$? Soit $G$ une droite arbitraire; $x$ un point de $G$; $X$ le plan polaire de $x$ par rapport à la Hessienne. Les quadriques polaires relatives à $F_n$, qui touchent le plan $X$, ont leurs poles dans la surface polaire (pure) de ce plan (47.), qui coupera $G$ en $3(n-2)$ points $x'$. Réciproquement, si une surface polaire doit passer par $x'$, le plan correspondant sera tangent à la quadrique polaire de $x'$; or, les poles (relatifs à la Hessienne) des plans tangents d'une surface quadrique, se trouvent sur une surface (16.) d'ordre $2(4(n-2)-1)$, qui coupera $G$ en autant de points $x$; donc $G$ contiendra $3(n-2)+8(n-2)-2$ coïncidences de $x$ avec $x'$, et par suite le lieu demandé est une surface $\Theta$ d'ordre $11n-24$.

Un point $x$ de la surface $T$ (66.) est le sommet d'un tétraèdre circonscrit à la quadrique polaire (de $x$) par rapport à $F_n$ et conjugué à la quadrique polaire (du même point) relative à la Hessienne, pourvu que ce point $x$ soit situé sur la polaire réciproque de la première quadrique par rapport à l'autre; auquel cas le plan polaire de $x$ par rapport à la Hessienne est tangent à la quadrique polaire du même point par rapport à $F_n$; c'est-à-dire que, dans cette hypothèse, $x$ est aussi un point de $\Theta$. Donc le lieu d'un point qui soit un sommet d'un tétraèdre circonscrit et conjugué resp. aux quadriques polaires du même point par rapport à $F_n$ et à la Hessienne, est une courbe gauche d'ordre $(11n-24)(7n-16)$, intersection des surfaces $\Theta$ et $T$.

68. Quel est le lieu d'un point tel que son plan polaire par rapport à la Hessienne soit conjugué à un plan donné $E$, par rapport à la quadrique polaire du même point relative à $F_n$? Si $x$ est un point d'une droite $G$, et $X$ le plan polaire de $x$ par rapport à la Hessienne; le lieu des poles des quadriques polaires (relatives à $F_n$), pour lesquelles $E$ et $X$ sont deux plans conjugués (47.), coupera $G$ en $3(n-2)$ points $x'$. Réciproquement, si $y$ est le pole du plan $E$ par rapport à la quadrique polaire d'un point $x'$, relative à la surface fondamentale, la première polaire de $y$ par rapport à la Hessienne coupera $G$ en $4(n-2)-1$ points $x$. La droite $G$ contiendra donc $3(n-2)+4(n-2)-1$ coïncidences de $x$ avec $x'$, c'est-à-dire que le lieu cherché est une surface $\Sigma_E$ d'ordre $7n-15$.

Si $x$ est un point de la Hessienne, dont le cone polaire ait son sommet sur le plan donné, ou sur le plan polaire de $x$ par rapport à la Hessienne, ce point $x$ appartiendra au lieu $\Sigma_E$; car, comme le plan passant

par le sommet a un nombre infini de poles (sur la droite polaire du plan, relative au cone), il est conjugué à tout autre plan quelconque. Le premier cas a lieu pour les poles des cones polaires, dont les sommets appartiennent à la courbe d'intersection de la Steinerienne avec le plan $E$; donc, le lieu $\Sigma_E$ passe par la courbe gauche d'ordre $6(n-2)^2$ qui correspond à la section plane $E$ de la Steinerienne*).

On vérifie la seconde hypothèse, si le plan tangent en $x$ à la Hessienne passe par le sommet $x'$ du cone polaire; auquel cas le point $x$ appartient aussi évidemment à la surface $\Theta$ (67.). Donc le lieu $\Sigma_E$, quel que soit le plan $E$, passe par la courbe commune à $\Theta$ et à la Hessienne**). Cette courbe est de l'ordre $4(n-2)(7n-15)-6(n-2)^2=2(n-2(11n-24)$, nombre qui est la moitié du produit des ordres de $\Theta$ et de la Hessienne; donc, ces deux surfaces se touchent (partout où elles se rencontrent) suivant une courbe gauche d'ordre $2(n-2)(11n-24)$, lieu d'un point dont le plan polaire par rapport à la Hessienne passe par le point correspondant de la Steinerienne.

Toutes ces surfaces $\Sigma$ d'ordre $7n-15$, passant par une même courbe gauche d'ordre $2(n-2)(11n-24)$, forment un système linéaire. En effet, si $a, b, c$ sont trois points donnés arbitrairement dans l'espace; $A, B, C$ les plans polaires de $a, b, c$ par rapport à la Hessienne; et $a', b', c'$ les poles des plans $A, B, C$, par rapport aux quadriques polaires de $a, b, c$ relatives à $F_n$, le plan $E \equiv a'b'c'$ déterminera la surface (unique) $\Sigma$ qui passe par $a, b, c$.

69. On demande le lieu d'un point tel que la droite commune à un plan donné $E$ et au plan polaire de ce point par rapport à la Hessienne soit tangente à la quadrique polaire du même point par rapport à la surface fondamentale. Pour résoudre cette question, prenons un point $x$ sur une droite quelconque $G$; le plan polaire de $x$ relatif à la Hessienne coupera $E$ suivant une certaine droite; et le

*) Le lieu $\Sigma_E$ et la surface polaire (pure) du plan $E$ se coupent suivant une autre courbe gauche d'ordre $3(n-2)(5n-11)$, qui est évidemment le lieu d'un point tel que sa quadrique polaire par rapport à $F_n$ touche le plan $E$, et que le plan polaire du même point par rapport à la Hessienne passe par le point de contact.

**) Tout point commun à $\Theta$ et à la Hessienne appartient aussi à $\Sigma$, car si le plan polaire relatif à la Hessienne doit toucher le cone polaire, il passera par le sommet de celui-ci. Dans le cas de $n=3$, la courbe commune à $\Theta$ et à la Hessienne est la courbe correspondante à la courbe parabolique.

lieu des poles des quadriques polaires, relatives à $F_n$, qui sont tangentes à cette droite, coupera $G$ en $2(n-2)$ points $x'$ (48.). Réciproquement, la quadrique polaire (par rapport à $F_n$) d'un point $x$ est coupée par le plan $E$ suivant une conique, qui a $2(4n-9)$ tangentes communes avec la section faite par ce même plan dans l'enveloppe (de classe $4(n-2)-1$ ... (14.)) des plans polaires des points de $G$, par rapport à la Hessienne. Le lieu demandé est donc une surface $\Xi_E$ d'ordre $2(n-2)+2(4n-9)=2(5n-11)$.

La surface $\Theta$ et la surface $\Sigma_E$, relative au plan donné $E$ (68.), ayant en commun une courbe d'ordre $2(n-2)(11n-24)$, se couperont suivant une autre courbe gauche d'ordre

$$(7n-15)(11n-24)-2(n-2)(11n-24)=(5n-11)(11n-24).$$

Chaque point $x$ de cette courbe sera tel que son plan polaire par rapport à la Hessienne touchera la quadrique polaire du même point par rapport à $F_n$ (67.), et que le plan susdit sera conjugué à $E$ par rapport à la même quadrique (68.); donc, $E$ passe par le point où le plan polaire touche la quadrique, et dès lors l'intersection de $E$ par le plan polaire est une droite tangente à la quadrique. Il en suit que $x$ sera un point du lieu $\Xi$. Le même raisonnement prouve que tout point de la courbe d'ordre $3(n-2)(5n-11)$, commune à la surface polaire (pure) du plan $E$ et au lieu $\Sigma_E$, appartient aussi à $\Xi_E$. Donc, cette surface $\Xi_E$ coupe $\Sigma_E$ suivant une courbe d'ordre $(5n-11)(11n-24)$ située sur $\Theta$, et suivant une autre courbe d'ordre $3(n-2)(5n-11)$ située sur la surface polaire (pure) du plan $E$.

Or, on voit sans peine que, d'après les définitions de ces lieux, tout point commun à $\Xi_E$ et à $\Theta$, et tout point commun à $\Xi_E$ et à la surface polaire de $E$, appartiennent nécessairement à $\Sigma_E$; donc la surface $\Xi_E$ est touchée par la surface $\Theta$ suivant la courbe gauche d'ordre $(5n-11)(11n-24)$, et par la surface polaire pure du plan $E$ suivant la courbe gauche d'ordre $3(n-2)(5n-11)$; et ces courbes de contact sont placées ensemble sur la surface $\Sigma_E$ *).

70. On demande le lieu d'un point tel que son plan polaire par rapport à la Hessienne coupe la quadrique polaire du même point, relative à $F_n$, et deux plans donnés $E$, $E'$, suivant une co-

*) Il résulte de là que l'ensemble de la Hessienne, de $\Xi_E$ et d'une surface arbitraire $\Phi$ d'ordre $4n-9$ peut être engendré au moyen de deux faisceaux projectifs $(\Theta, \Sigma_E\Phi, \ldots)$ d'ordre $11n-24$ et $(\Sigma_E, S_E\Phi, \ldots)$ d'ordre $7n-15$: où $S_E$ désigne la surface polaire pure du plan $E$.

nique et deux droites conjuguées à celle-ci. Soit $x$ un point d'une droite arbitraire $G$; $X$ le plan polaire de $x$ par rapport à la Hessienne; le lieu des poles des quadriques polaires (relatives à $F_n$) qui coupent ce plan $E$ suivant des coniques conjuguées aux droites $XE$, $XE'$, est la surface polaire mixte de ces droites (48.), qui coupera $G$ en $2(n-2)$ points $x'$. Réciproquement, soit $Q$ la quadrique polaire d'un point $x'$ par rapport à $F_n$; on sait que les plans qui coupent la quadrique $Q$ et les plans donnés $E$, $E'$ suivant une conique et deux droites conjuguées, enveloppent une autre surface quadrique. Cette surface et l'enveloppe des plans polaires des points de $G$, par rapport à la Hessienne, ont $2(4(n-2)-1)$ plans tangents communs, auxquels correspondront autant de poles $x$ sur $G$. Le lieu demandé est donc une surface $\Xi_{EE'}$ d'ordre $2(n-2)+2(4n-9)=2(5n-11)$.

Tout point $x$ commun à $\Theta$ et au lieu $\Xi_E$ (69.) est tel que son plan polaire par rapport à la Hessienne coupe la quadrique polaire de $x$ relative à $F_n$ et le plan $E$ suivant trois droites passant par un seul et même point. La dernière de ces droites a un nombre infini de poles (en ligne droite) par rapport à la conique formée par les deux premières droites, d'où il suit que, relativement à cette conique, la dernière droite est conjuguée à toute droite tracée dans le dit plan polaire de $x$; donc $x$ est aussi un point du lieu $\Xi_{EE'}$. C'est-à-dire que ce lieu passe par les deux courbes gauches d'ordre $(5n-11)(11n-24)$, suivant lesquelles la surface $\Theta$ est touchée par les lieux $\Xi_E$ et $\Xi_{E'}$.

71. On demande le lieu d'un point tel que ses plans polaires par rapport à $F_n$ et à la Hessienne, et sa quadrique polaire par rapport à $F_n$ aient un point commun sur un plan donné $E$. Soit $x$ un point d'une droite arbitraire $G$; la droite commune aux plans polaires de $x$ rencontre $E$ en un point $y$, et les quadriques polaires relatives à $F_n$ qui passent par $y$ ont leurs poles sur la deuxième polaire de ce point, laquelle coupera $G$ en $n-2$ points $x'$. Réciproquement, la quadrique polaire d'un point $x'$ (par rapport à $F_n$) coupera le plan $E$ suivant une certaine conique $\mathfrak{K}$. Or, il y a sur $G$ $10(n-2)$ points $x$, dont chacun a la propriété que ses plans polaires, relatifs à $F_n$ et à la Hessienne, se rencontrent sur $\mathfrak{K}$ *); donc, le lieu demandé est une surface d'ordre $11(n-2)$.

*) Par un point quelconque $i$ d'une droite $R$ on peut mener deux premières polaires relatives à $F_n$, les poles desquelles sont les intersections de $\mathfrak{K}$ avec le plan

Quel que soit le plan $E$, cette surface passe par les $2(n-2)$ points $\alpha$ où la Hessienne est touchée par une droite $a$ située dans la surface fondamentale (60.); car les plans polaires et la quadrique polaire de $\alpha$ passent ensemble par la droite $a$ et dès lors ont un point commun avec tout plan donné.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

## Chapitre cinquième.

## Application des propriétés générales à une surface fondamentale du troisième ordre.

**72.** La surface fondamentale sera désormais une surface $F_3$ du troisième ordre, tout à fait générale, c'est-à-dire sans points et lignes multiples. Les théorèmes démontrés précédemment contiennent déjà un grand nombre de propriétés des surfaces cubiques; mais nous ne nous arrêterons pas à donner les énoncés particuliers. Nous nous proposons seulement de développer ce qu'il y a de spécial et de caractéristique à la surface du troisième ordre.

La première polaire étant, dans le cas actuel, la quadrique polaire, la surface Hessienne et la Steinerienne coïncident en une seule et même surface du quatrième ordre et de la seizième classe (52., 54.). Les points de cette surface se correspondent deux à deux; $o$ et $o'$ étant deux points correspondants, chacun d'eux est le sommet d'un cone quadrique polaire dont l'autre est le pole; et en chacun de ces points la Hessienne a pour plan tangent le plan polaire de l'autre. Ces mêmes points sont conjugués par rapport à toutes les quadriques polaires (37.).

**73.** La deuxième polaire mixte de deux points $a$, $b$ devient un plan, lieu d'un tel point, que par rapport à sa quadrique polaire les points $a$, $b$ sont conjugués (49.). Si l'on se donne un des points $a$, $b$, et leur plan

polaire de $i$; et les premières polaires de ces poles, par rapport à la Hessienne, couperont $R$ en $2(4n-9)$ points $i'$. Réciproquement, par un point $i'$ on peut faire passer deux premières polaires relatives à la Hessienne, dont les poles sont les intersections de $\mathfrak{R}$ avec le plan polaire de $i'$ (relatif à la Hessienne). Les premières polaires de ces poles, par rapport à $F_n$, couperont $R$ en $2(n-1)$ points $i$. Donc il y aura, sur $R$, $2(4n-9)+2(n-1)=10(n-2)$ coïncidences de $i$ avec $i'$, q. d. e.

polaire mixte, on trouve l'autre point de la manière suivante: les quadriques polaires des points du plan donné forment un réseau, et les plans polaires de $a$ par rapport à ces surfaces passent par un même point $b$, qui sera le point cherché.

Si $a$ est fixe, et que le plan polaire mixte tourne autour d'une droite donnée $G$, le point $b$ décrira une droite $G'$, intersection des plans polaires de $a$ par rapport aux quadriques polaires des points de $G$. Or, $G'$ coupe la Hessienne en quatre points, donc les plans polaires d'un point donné $a$ par rapport aux cones polaires enveloppent une surface de la quatrième classe. Si $a$ est un point de la Hessienne, le plan polaire mixte passe toujours par $a'$ (sommet du cone polaire de $a$); donc, dans ce cas, les plans polaires de $a$ par rapport aux cones polaires enveloppent un cone de la quatrième classe.

Si $a$ est donné arbitrairement dans l'espace, et $b$ est variable dans un plan fixe $E$, le plan polaire mixte passe toujours par un point fixe $e$: le pole de $E$ par rapport à la quadrique polaire de $a$. Donc, si $b$ décrit la courbe d'intersection de la Hessienne avec le plan $E$, le plan polaire mixte enveloppe un cone de sommet $e$, de la quatrième classe (circonscrit à la surface qu'on obtient lorsque $b$ parcourt la Hessienne); c'est-à-dire que les plans polaires d'un point fixe, par rapport à tous les cones polaires dont les sommets sont dans un même plan, enveloppent un cone de la quatrième classe.

74. Ce que nous avons nommé en général ***surface polaire mixte*** de deux droites $G$, $G'$ devient une quadrique (un hyperboloïde); et puisque, dans le cas actuel, la courbe polaire d'une droite par rapport à une première polaire (3.) devient la droite réciproque de la droite donnée par rapport à une surface quadrique; il s'ensuit que l'hyperboloïde polaire des deux droites $G$, $G'$ est le lieu des droites réciproques de chacune de ces droites par rapport aux quadriques polaires des points de l'autre, ou bien le lieu d'un point tel que la réciproque de l'une des droites données par rapport à la quadrique polaire de ce point, rencontre l'autre droite donnée.

Si $i$ est un point variable en $G$, et $a$, $b$ deux points fixes sur $G'$, l'hyperboloïde polaire est engendré (48.) par deux faisceaux projectifs, dans lesquels le plan polaire mixte de $a$, $i$ correspond au plan polaire mixte de $b$, $i$. Or, les points $a$, $b$ peuvent être remplacés par deux autres points quelconques de $G'$; l'hyperboloïde polaire de deux droites est donc

aussi l'enveloppe du plan polaire mixte de deux points variables sur les droites données, resp.

75. Si $G$, $G'$ coïncident, nous aurons la surface polaire pure d'une droite $G$, qui sera un cone du second ordre (14., 48.), dont le sommet est le pole de la quadrique polaire qui passe par $G$, et dont les génératrices sont les droites réciproques de $G$ par rapport aux quadriques polaires des points de $G$. Ce cone est l'enveloppe des plans polaires des points de $G$, et par conséquent il est aussi le lieu des poles des quadriques polaires tangentes à $G$. Nous donnerons à cette surface le nom de *cone polaire* de la droite $G$, qu'il ne faut pas confondre avec le cone polaire d'un point de la Hessienne.

76. La surface polaire mixte de deux plans $E$, $E'$ est du troisième ordre (47.); elle est le lieu des poles d'un plan par rapport aux quadriques polaires des points de l'autre plan, ou bien (ce qui revient au même) le lieu du pole d'une quadrique polaire, par rapport à laquelle les plans $E$, $E'$ sont conjugués.

Le lieu des poles d'un plan $E$ par rapport aux quadriques polaires des points d'une droite $G$ (30.) est une cubique (courbe du troisième ordre) gauche, qui se trouve sur l'hyperboloïde polaire de $G$ et d'une autre droite située dans $E$, et aussi sur la surface polaire mixte de $E$ et d'un autre plan passant par $G$ (51.). D'où il suit que l'hyperboloïde polaire de deux droites $G$, $G'$, si $G$ est fixe et $G'$ variable dans un plan $E$, engendre un réseau de surfaces passant par une cubique gauche fixe.

77. Si les plans $E$, $E'$ coïncident, on a la surface polaire pure d'un plan $E$, qui sera l'enveloppe des cones polaires des droites situées dans le plan donné (48.), et aussi le lieu des poles du plan par rapport aux quadriques polaires des points de ce même plan (47.). Cette deuxième définition revient à dire que cette surface est le lieu d'un point dont la quadrique polaire est tangente au plan donné; donc (15., 51.) la même surface se confond avec l'enveloppe des plans polaires des points du plan donné. Elle est du troisième ordre, de la quatrième classe, et a quatre points doubles, situés dans les cones polaires et dans les hyperboloïdes polaires de toutes les droites du plan donné *).

*) Si un point est à distance infinie, son plan polaire est un plan diamétral de la surface fondamentale. L'enveloppe des plans diamétraux est donc la surface polaire pure du plan à l'infini. Cette surface est inscrite dans la développable circonscrite à $F_n$ suivant la section à l'infini (15.).

Soit $a$ un point de cette surface; la quadrique polaire de $a$ étant tangente au plan $E$, coupera ce plan suivant deux droites croisées au point de contact $a'$. Les plans polaires des points de ces droites doivent passer par $a$, et toucher ailleurs la surface; un point quelconque de cette surface est donc le sommet de deux cones quadriques circonscrits à la surface (ils sont les cones polaires de deux droites croisées en $a'$). Le plan polaire de $a'$ est tangent à la surface en $a$.

Si $a$ est l'un des points doubles de la surface, les deux cones tangents doivent coïncider; et par suite la quadrique polaire de $a$ coupera $E$ suivant deux droites coïncidentes. Parmi les quadriques polaires tangentes à un plan $E$ il y a donc quatre cones; leurs poles (qui appartiendront aussi à la Hessienne) sont les points doubles de la surface polaire pure du plan.

Cette surface est la réciproque de la *surface Romaine* de Steiner *).

78. Si un plan $E$ est fixe et qu'un autre plan $E'$ soit mobile autour d'une droite $G$, la surface polaire mixte des plans $E$, $E'$ engendre un faisceau; en effet, si cette surface doit passer par un point donné $x$, le plan $E'$ passera par le pole de $E$ relatif à la première polaire de $x$. La base du faisceau est composée d'une courbe gauche du sixième ordre (lieu des points doubles des quadriques polaires des points du plan fixe) et d'une cubique gauche (lieu des poles du plan fixe par rapport aux quadriques polaires des points de la droite donnée) (47., 76.).

La surface polaire mixte des deux plans $E$, $E'$ et leurs surfaces polaires pures sont touchées ensemble (51.) par le cone polaire de la droite $EE'$ en quatre points de la Hessienne (correspondants aux intersections de cette surface avec la droite $EE'$), et passent par les dix points doubles de la Hessienne (47.). Ces points étant équivalents à $4.4+10$ intersections, les trois surfaces nommées, qui sont du troisième ordre, auront un autre et seul point commun: c'est le pole de la quadrique polaire qui passe par la droite $EE'$.

*) [Voir les Monatsberichte de la r. Acad. de Berlin (juillet et novembre 1863), et le tome LXIII de ce journal, p. 315.]

## Chapitre sixième.

# Propriétés de la surface Hessienne d'une surface fondamentale du troisième ordre.

79. Les plans polaires qui passent par un point donné $p$ ont leurs poles sur la quadrique polaire de $p$. Si ces plans doivent toucher la Hessienne, les poles seront distribués sur la courbe du huitième ordre, intersection de la Hessienne avec la polaire quadrique de $p$ (72.). Les points de contact forment une courbe du douzième ordre, intersection de la Hessienne avec la première polaire de $p$ par rapport à la Hessienne. Ces deux courbes du huitième et du douzième ordre sont donc correspondantes (57.).

80. Considérons les droites qui passent par $p$ et qui touchent la Hessienne. Aux droites qui passent par $p$ correspond un réseau *) de courbes gauches du quatrième ordre (3.) situées sur une surface $S$ du second ordre (la quadrique polaire de $p$). Chacune de ces courbes gauches résulte de l'intersection de $S$ par une autre quadrique polaire, et par suite (79.) les points doubles de ces courbes (points de contact entre $S$ et les autres quadriques polaires) seront situés dans la courbe $C$ du huitième ordre, intersection de la Hessienne avec $S$. Aux courbes du réseau, qui forment un faisceau, correspondent des droites par $p$, situées dans un plan; or, dans ce faisceau il y a douze courbes avec point double **); c'est-à-dire que les droites par $p$, auxquelles correspondent des courbes gauches du quatrième ordre avec point double, forment un cone $\Sigma$ du douzième ordre. A un point quelconque $o$ de la courbe $C$ correspond une génératrice de $\Sigma$, qui joint $p$ au point $o'$ qui, dans la Hessienne, correspond à $o$. Le lieu des points $o'$ est donc une courbe $C'$ du douzième ordre (79.). Le plan polaire de $o$ passe par $p$ et touche la Hessienne (72.) en $o'$, et, par suite, il contient la droite tangente à $C'$ en $o'$; donc, ce plan est tangent au cone $\Sigma$ suivant la droite $po'$. C'est-à-dire que le cone $\Sigma$ est circonscrit à la Hessienne suivant la courbe $C'$.

La quadrique polaire d'un point quelconque coupe $C$ en seize points: de là résulte que $\Sigma$ (et par suite la Hessienne) est de la seizième classe (54).

*) Un tel réseau résulte des intersections de $S$ avec un réseau d'autres surfaces quadriques polaires.

**) Car, dans un faisceau de quadriques, il y a douze surfaces tangentes à $S$ (33).

Si l'on considère une droite $G$ passant par $p$, comme intersection de deux plans tangents du cone $\Sigma$, chacun de ces plans aura un pole sur $C$, et la courbe gauche (du réseau sur $S$) qui passe par ces deux poles sera la correspondante de $G$. Si les deux poles coïncident, la courbe gauche devient tangente à $C$; d'où il suit qu'aux droites tracées sur le cone $\Sigma$ et dans ses plans stationnaires, correspondent des courbes gauches (du réseau sur $S$) tangentes à $C$.

81. Les points où la Hessienne est osculée par des droites issues de $p$, sont les intersections de cette surface avec la première et la deuxième polaire de $p$, par rapport à la même surface. Ainsi, parmi les courbes gauches du réseau en $S$ il y a en a $4.3.2 = 24$ qui ont un point de rebroussement.

Ainsi le cone $\Sigma$ est du 12$^e$ ordre et de la 16$^e$ classe, et a 24 génératrices stationnaires; il aura donc (à cause des formules de Plücker) 22 génératrices doubles. Parmi ces génératrices doubles, dix sont dues aux points doubles de la Hessienne et correspondent à des courbes du réseau composées de deux coniques (chaque point double a, en effet, pour quadrique polaire une couple de plans (56.)); les autres douze génératrices doubles correspondront à autant de courbes du réseau composées d'une cubique gauche et d'une droite.

Pour démontrer cette assertion, considérons le réseau de courbes gauches du quatrième ordre sur la surface quadrique $S$, et, à cause de brièveté, nommons *génératrices* et *directrices* les droites des deux systèmes qui existent sur cette surface. Soient $L$, $M$, $N$ trois génératrices de $S$; une courbe quelconque du quatrième ordre qui soit tracée sur $S$ coupe en deux points chacune de ces droites; et si trois de ces points (un sur chaque droite) tombent en ligne droite, la courbe se décompose en deux parties, une cubique gauche et une droite (directrice). Si $l$ est un point quelconque de $L$, la directrice qui passe par $l$ coupera $M$, $N$ en deux points $m$, $n$, et la courbe du réseau qui passe par $m$, $n$ rencontrera $L$ en deux points $l'$. Réciproquement, si $l'$ est un point quelconque de $L$, les courbes du réseau qui passent par $l'$ forment un faisceau et, par suite, déterminent sur $M$ et $N$ deux involutions (quadratiques) projectives. Si une courbe du faisceau coupe $M$ en $mm'$ et $N$ en $nn'$, le lieu des droites analogues à $mn$, $mn'$, $m'n$, $m'n'$ est une surface du quatrième ordre (pour laquelle $M$ et $N$ sont des droites doubles), qui coupera $L$ en quatre points $l$. Il y aura donc, en $L$, six coïncidences de $l$ avec $l'$, c'est-à-dire qu'il y a six courbes du réseau, dont chacune est composée d'une cubique

gauche et d'une droite directrice. Analoguement, il y aura six autres courbes composées d'une cubique gauche et d'une génératrice.

Ainsi, dans un réseau de courbes gauches de quatrième ordre, tracées sur une surface quadrique, il y a: 1°. douze courbes composées d'une cubique gauche et d'une droite; 2°. dix courbes composées de deux coniques; 3°. vingt-quatre courbes avec rebroussement.

82. Si $p$ est un point de la Hessienne, le cone $\Sigma$ est du 10ᵉ ordre et de la 16ᵉ classe, avec 10 génératrices doubles (dirigées aux points doubles de la Hessienne) et 18 génératrices stationnaires. C'est-à-dire que dans un réseau de courbes gauches du quatrième ordre tracées sur un cone (quadrique polaire de $p$) il y en a: 1°. dix composées de deux coniques; 2°. dix-huit avec rebroussement; 3°. six composées d'une droite et d'une cubique gauche (correspondantes aux six droites qui touchent la Hessienne en $p$ et ailleurs (7.)); 4°. deux avec rebroussement au sommet du cone: celles-ci correspondent aux deux droites qui osculent la Hessienne en $p$.

83. Si $p$ est un point double de la Hessienne, cette surface est touchée en $p$ par un nombre infini de plans, dont l'enveloppe est un cone quadrique; la première polaire de $p$ aura donc un nombre infini de points doubles en ligne droite, c'est-à-dire qu'elle sera le système de deux plans se coupant suivant une droite $\pi$, située dans la Hessienne: ainsi qu'il résulte même de la théorie générale (56.). Les points de cette droite seront les poles d'autant de cones avec le sommet $p$; ces cones forment donc un faisceau et passent par quatre droites, dont le système représente la courbe polaire de $\pi$. Dans ce faisceau il y a trois systèmes de deux plans: ces trois systèmes seront les quadriques polaires de trois points spéciaux de la droite $\pi$, doubles pour la Hessienne. Les dix points doubles $p$ sont donc distribués, trois à trois, sur les dix droites $\pi$; et celles-ci passent, trois à trois, par les dix points $p$.

84. La Hessienne étant *en général* de la 16ᵉ classe, n'a pas d'autres points doubles, outre les dix points $p$. Et de même, elle ne contient pas d'autres droites, outre les dix droites $\pi$. En effet, les quatre intersections d'une droite $G$ avec la Hessienne correspondent aux quatre cones qui passent par la courbe (du quatrième ordre) polaire de $G$. Si $G$ appartient entièrement à la Hessienne, aux points, en nombre infini, de $G$ correspondra un

nombre infini de cones formant un faisceau et, par suite, ayant le même sommet. Ce sommet sera un point double pour la Hessienne, car cette surface y serait touchée par les plans polaires de tous les points de $G$.

Un point double $p$ n'est pas, en général, situé sur sa droite correspondante $\pi$; si cela était, la première polaire de $p$ serait un cone avec le sommet $p$, et par suite ce point serait double pour la surface fondamentale.

85. Soient $o$, $o'$ deux points correspondants de la Hessienne; les cones polaires de $o$, $o'$ auront leurs sommets en $o'$, $o$ resp. et se perceront entre eux suivant une courbe gauche du quatrième ordre; et les deux autres cones quadriques passant par cette courbe seront les premières polaires des points $u$, $v$ où la Hessienne est rencontrée de nouveau par la droite $oo'$. Ces autres cones auront leurs sommets aux points $u'$, $v'$ qui correspondent à $u$, $v$. Les points $oo'u'v'$ sont donc les sommets du tétraèdre conjugué aux quadriques passant par la courbe du quatrième ordre, et par suite les plans $o'u'v'$, $ou'v'$ sont les plans polaires de $o$, $o'$ resp. C'est pourquoi les plans tangents à la Hessienne en $o$, $o'$ passeront par la droite $u'v'$.

Puisque les plans polaires de $o$, $o'$ passent par $u'$, $v'$, réciproquement les cones polaires de $u'$, $v'$ (dont les sommets sont $u$, $v$) passeront par $o$, $o'$; donc, ils contiennent tout entière la droite $oo'uv$ et se rencontreront de nouveau suivant une cubique gauche.

De ce que les cones polaires de $u'$, $v'$ passent par la droite $oo'$, il s'ensuit que le cone polaire de cette droite aura son sommet (75.) en $u'$ et en $v'$, c'est-à-dire qu'il se réduira à la droite $u'v'$. Donc, les plans polaires des points de $oo'$ passent tous par la droite $u'v'$.

Les points où la droite $u'v'$ rencontre la Hessienne sont les poles des quatre cones quadriques passant par la courbe du quatrième ordre qui est la polaire de la droite considérée; or, cette courbe se décomposant en deux parties (une droite et une cubique gauche) il n'y a que deux cones quadriques passant par ce système; la droite $u'v'$ est donc tangente à la Hessienne en $u'$ et $v'$.

Ainsi, toute droite joignant deux points correspondants de la Hessienne jouit de la propriété que les plans polaires de ses points passent par une droite fixe, qui est une tangente double de la même surface.

86. Si $u$ et $v$ coïncident, c'est-à-dire, si la droite $oo'$ est tangente à la Hessienne (en un point $u$ différent de $o$, $o'$), les plans polaires des

points de $oo'$ passeront par une même droite qui aura un contact du troisième ordre (en $u'$) avec la Hessienne.

Si $u$ et $v$ coïncident en un point double $p$, les points $u'$, $v'$ deviennent indéterminés sur la droite correspondante $\pi$ (83.); or, les cones polaires de tous les points de cette droite devant passer (85.) par $oo'$, il en suit que $oo'$ est l'une des quatre droites qui forment la courbe polaire de $\pi$ (83.).

87. Si $o$ est un point parabolique de la surface fondamentale, son cone polaire a le sommet au point correspondant $o'$, passe par $o$ et est touché suivant $oo'$ par le plan polaire de $o$ (5.), savoir par le plan qui touche la Hessienne en $o'$. Le cone polaire de $o'$ ayant son sommet en $o$, il s'ensuit que les cones polaires de ces deux points se couperont suivant une courbe gauche dont $o$ sera un point double. L'un des points $u$, $v$ coïncide avec $o'$; l'autre soit $v$. La droite $ov'$ ($\equiv u'v'$) est donc (85.) tangente à la Hessienne en $o$ et $v'$. Les plans qui touchent la surface fondamentale et la Hessienne en $o$ se coupent suivant $ov'$, c'est-à-dire que cette droite est tangente en $o$ à la courbe parabolique (de la surface fondamentale).

Soit $\omega$ le point où la droite $ov'$ rencontre de nouveau la surface fondamentale; la première polaire de $\omega$ passe par $\omega$ et par $oo'$, et par suite elle rencontre le plan $oo'v'$ suivant deux droites, dont l'une est $oo'$ et l'autre passe par $\omega$. Ce point $\omega$ est donc le point (unique) d'inflexion de la courbe du troisième ordre (avec rebroussement en $o$), suivant laquelle la surface fondamentale est coupée par le plan stationnaire $oo'v'$ *).

88. Dans un plan arbitraire $E$, combien de droites y a-t-il, analogues à $oo'$ (joignant deux points correspondants de la Hessienne)? Le plan $E$ coupe la Hessienne suivant une courbe du quatrième ordre à la quelle correspond (57.) la courbe (gauche du sixième ordre) de contact entre la Hessienne et la surface polaire pure du plan $E$. Soit $o$ l'un des points où $E$ rencontre cette dernière courbe; ce point, comme appartenant à $E$, aura son correspondant $o'$ sur la courbe du sixième ordre; et comme appartenant à cette courbe, il aura son correspondant en $E$. D'où il suit que les six points communs au plan $E$ et à la courbe gauche du sixième ordre sont correspondants, deux à deux. Mais d'un autre côté, deux points correspondants de la Hessienne sont conjugués par rapport à une qua-

*) Et $\omega v$ est la tangente stationnaire.

drique polaire quelconque; donc, d'après un théorème connu (dû à M. Hesse), les six points dont il s'agit sont les sommets d'un quadrilatère complet; et les diagonales de celui-ci sont les seules droites analogues à $oo'$, contenues dans le plan donné $E$. Les droites analogues à $u'v'$ (85.), qui correspondent aux droites $oo'$ du plan $E$, sont situées sur la surface polaire de $E$ (et dans un même plan tritangent de celle-ci), parce que les plans polaires des points de $E$ sont tangents à la surface polaire de ce plan (77.).

89. Le quadrilatère considéré est déterminé par les intersections de quatre quadriques polaires quelconques (n'appartenant pas à un même réseau) avec le plan $E$; on sait en effet que, quatre coniques étant données dans un plan, il y a un quadrilatère complet (unique) dont les diagonales sont rencontrées harmoniquement par chacune des coniques données *).

Deux sommets opposés du quadrilatère étant conjugués par rapport aux coniques suivant lesquelles le plan $E$ coupe les quadriques polaires de ses points, il s'ensuit que ce quadrilatère est inscrit à la courbe du troisième ordre, Jacobienne du réseau des coniques mentionnées et section de la surface polaire du plan $E$ par ce même plan. Or, les mêmes six points (sommets du quadrilatère) sont situés dans la courbe plane du quatrième ordre commune à $E$ et à la l'Hessienne, qui est touchée par la surface polaire de ce plan dans tous les points de la courbe gauche du sixième ordre; donc ces six points sont autant de points de contact entre les courbes suivant lesquelles $E$ coupe sa surface polaire et la Hessienne.

Il suit de là que les côtés du quadrilatère rencontreront de nouveau la courbe plane du quatrième ordre en quatre points alignés sur une droite $G$; et cette courbe plane appartiendra au faisceau déterminé par le système des quatre droites formant le quadrilatère et par le système de la courbe du troisième ordre et de la droite $G$. Donc, si cette dernière courbe a un point double $a$, ce qui arrive lorsque le plan $E$ est tangent en $a$ à la surface fondamentale **), la droite polaire de $a$ par rapport à la courbe plane du quatrième ordre viendra se confondre avec la droite polaire du même point par rapport au système des quatre côtés du quadrilatère (la polaire harmonique de $a$ par rapport au quadrilatère).

---

*) [*Mathem. Questions from the Educational Times IV,* London 1866, p. 110.]

**) Si une cubique plane a un point double, toutes les coniques polaires passent par ce point, qui est, par suite, double aussi pour la Jacobienne du réseau des polaires.

Mais d'ailleurs on sait que, si une cubique plane avec point double passe par les sommets d'un quadrilatère complet, la droite qui joint les trois points d'inflexion est la polaire harmonique du point double par rapport au quadrilatère; donc la droite polaire de $a$ par rapport à la courbe plane du quatrième ordre passera par les points d'inflexion de la courbe du troisième ordre, qui sont aussi les points d'inflexion de la section de la surface fondamentale par $E$.

Ainsi: la droite, intersection d'un plan tangent à la surface fondamentale avec le plan polaire du point de contact par rapport à la Hessienne, passe par les trois points d'inflexion de la section faite par le plan tangent dans la surface fondamentale.

Si le plan tangent est stationnaire, on retombe sur un théorème déjà démontré (87.).

90. Dans un plan quelconque $E$, combien y a-t-il de droites analogues à $u'v'$ (droites dont la courbe polaire soit le système d'une droite $oo'$ et d'une cubique gauche)? Les droites tracées dans le plan $E$ correspondent aux courbes gauches du quatrième ordre passant par les huit poles du plan. On sait que ces huit poles sont tels que la cubique gauche décrite par six d'entre eux rencontre deux fois la droite qui joint les deux autres. Or, huit points combinés par couples donnent $\frac{7.8}{2} = 28$ courbes du quatrième ordre composées d'une droite et d'une cubique gauche. Le plan donné contient donc 28 droites analogues à $u'v'$: elles sont d'ailleurs les 28 tangentes doubles de la section de la Hessienne par le plan $E$.

Cette section est de la 12^e^ classe et a 24 points d'inflexion; on retrouve ainsi (80.) la propriété que dans un faisceau de courbes gauches du quatrième ordre il y en a 12 avec point double; et de plus, on voit que parmi les courbes gauches de cet ordre, qui passent par les huit intersections de trois surfaces quadriques, il y en a 24 qui ont un rebroussement.

91. Une droite quelconque $G$ rencontre la Hessienne en quatre points $abcd$; soient $a'b'c'd'$ les points correspondants. Puisque $a'b'c'd'$ sont les sommets des quatre cones d'un même faisceau de quadriques, le point $a'$ sera le pole du plan $b'c'd'$ par rapport aux cones polaires de $b, c, d$, c'est-à-dire que $b'c'd'$ est le plan polaire mixte des couples de points $a'b, a'c, a'd$: ou bien encore, $b'c'd'$ est le plan polaire de chacun des points $b, c, d$ par rap-

port au cone polaire de $a'$. Or ce cone a pour sommet le point $a$; le plan $b'c'd'$ passe donc par $a$.

Ainsi si $abcd$ sont quatre points de la Hessienne en ligne droite, les points correspondants $a'b'c'd'$ sont les sommets d'un tétraèdre dont les faces $b'c'd'$, $c'd'a'$, $d'a'b'$, $a'b'c'$ passent par $a$, $b$, $c$, $d$ resp.

92. Toutes les quadriques polaires passant par un point $o$ forment un réseau; et il y en a une qui est tangente en $o$ à un plan donné arbitrairement. Cependant, si $o$ est un point de la Hessienne (et $o'$ le point correspondant), toutes les premières polaires passant par $o$ y sont touchées (53.) par des plans passant par la droite $oo'$, et celles qui touchent en $o$ un même plan forment un faisceau et ont leurs poles sur une droite tangente à la Hessienne en $o'$. D'où il s'ensuit que la droite $oo'$ est la polaire du plan tangent à la Hessienne en $o$ par rapport au cone polaire de $o'$, et aussi la polaire du plan tangent à la même surface en $o'$ par rapport au cone polaire de $o$. En d'autres termes: le plan tangent en $o$ à la Hessienne et le plan tangent en ce même point à une quadrique polaire quelconque qui y passe, sont conjugués par rapport au cone polaire de $o'$.

Réciproquement, toute droite tangente en $o'$ à la Hessienne contient les poles d'un nombre infini de quadriques polaires touchées en $o$ par un seul et même plan.

93. Soit $p$ un point double de la Hessienne et $\pi$ la droite correspondante (83.). Dès que chaque point de $\pi$ correspond à $p$, les plans polaires de tous les points de $\pi$ seront tangents à la Hessienne en $p$ (72.), c'est-à-dire que le cone quadrique (osculateur), formé par les droites osculatrices à la Hessienne en $p$, est le cone polaire de la droite $\pi$. Ce cone contient les trois droites $\pi_1\pi_2\pi_3$ (analogues à $\pi$ (83.)) qui passent par $p$, car tout point de ces droites est le pole d'un cone polaire dont le sommet est l'un des trois points doubles $p_1p_2p_3$ de la Hessienne, situés sur $\pi$.

94. Le plan polaire de $p$ est tangent a la Hessienne tout le long de la droite $\pi$ (56.) et, par suite, il coupera cette surface suivant une conique $C$. De même, le plan polaire de $p_1$ touchera la Hessienne suivant $\pi_1$; or $p_1$ est un point de $\pi$; donc la Hessienne et le cone polaire de $\pi$ sont touchés le long des droites communes $\pi_1, \pi_2, \pi_3$ par les mêmes plans (les plans polaires de $p_1, p_2, p_3$).

95. Le point $p$ et un point quelconque de $\pi$ sont deux points correspondants de la Hessienne; donc la droite qui joint ces points est le lieu des poles dont les plans polaires passent par une même droite, tangente double de la Hessienne et située dans le plan polaire de $p$ (85.). L'un des points de contact est sur $\pi$; l'autre appartiendra à la conique $C$. C'est-à-dire qu'à toute droite tracée par $p$ dans le plan $p\pi$, et considérée comme droite $oo'$, correspond comme droite $u'v'$ une tangente de $C$. Soient $o$ le point où la première droite rencontre $\pi$, et $u$ le point où la même droite coupe de nouveau la Hessienne (les points $o'$ et $v$ sont coïncidents en $p$); $u'$ et $v'$ les points où la deuxième droite touche $C$ et coupe $\pi$, resp. On voit que la conique $C$ a pour courbe correspondante la cubique plane (lieu du point $u$) suivant laquelle le plan $p\pi$ coupe la Hessienne.

La droite $u'v'$ est dans le plan polaire de $o$; or ce plan est tangent au cone polaire de $\pi$; donc ce cone est touché par les droites analogues à $u'v'$; c'est-à-dire que la conique $C$ est la trace du cone sur le plan polaire de $p$.

Ainsi le cone osculateur à la Hessienne en un point double touche cette surface suivant trois droites, et la coupe en outre suivant une conique située dans le plan polaire du point double.

96. Il y a d'autres propriétés du plan $p\pi$ qui méritent d'être remarquées.

Le cone polaire de $u'$ passe par $p$; de plus, le plan polaire de $p$ par rapport à ce cone (savoir le plan tangent à ce cone suivant $pu$) est le plan polaire de $u'$ par rapport au cone polaire de $p$ (11.), c'est-à-dire, le plan $p\pi$. Ce dernier plan est donc tangent aux cones polaires de tous les points de la conique $C$, et les génératrices de contact passent par $p$.

Dès que le plan $p\pi$ touche en $o$ les premières polaires des points $p$ et $u'$, il touchera en ce même point les premières polaires de tous les points de la droite $pu'$, et les coupera suivant des couples de droites en involution, dont les rayons doubles sont $op$ et $\pi$. Deux droites $R$, $R'$ conjuguées dans cette involution appartiendront à une première polaire dont le pole soit $q$ (point de $pu'$); concevons un plan passant par $q$ et par une tangente quelconque $u'_1v'_1$ de $C$. Les premières polaires de $u'_1$, $v'_1$ passent ensemble (85.) par la droite $pu_1$ qui correspond à $u'_1v'_1$ (de même que $pu$ à $u'v'$); donc les points où cette droite rencontre $R$, $R'$ seront deux poles du plan $qu'_1v'_1$. C'est-à-dire que les plans polaires des points des droites $R$, $R'$ enveloppent

un seul et même cone $qC$. Tous les cones analogues passent par la conique $C$; celle-ci représente donc, elle seule, l'enveloppe des plans polaires des points du plan $p\pi$. Ce qu'on peut démontrer aussi de la manière suivante.

Le point double $p$ a la propriété que toutes les quadriques polaires qui y passent, y sont touchées par un même plan $p\pi$ (92.); d'où il résulte que, si par $p$ on tire les deux droites qui rencontrent, chacune deux fois, la courbe (gauche du quatrième ordre) polaire d'une droite quelconque $T$ de l'espace, ces deux transversales seront toujours comprises dans le plan $p\pi$, c'est-à-dire que la courbe polaire d'une droite quelconque a toujours deux cordes issues de $p$ et situées dans le plan $p\pi$. Soit $pu$ l'une de ces cordes; chacun des points où elle s'appuie sur la courbe gauche aura son plan polaire passant par $T$ et par $u'v'$ (d'où il résulte que $T$ coupe $u'v'$): mais ces deux droites donnent un seul plan, donc les deux points où $pu$ traverse la courbe gauche sont les poles d'un même plan passant par $T$. Deux de ces plans polaires (relatifs aux deux droites $pu$) sont déterminés par les deux droites $u'v'$ qu'on peut mener dans le plan de $C$, par la trace de $T$, à toucher cette conique; donc, par une droite arbitraire $T$ passent deux seuls plans ayant des poles dans le plan $p\pi$, et ces plans sont tangents à $C$; en d'autres termes, cette conique est l'enveloppe complet des plans polaires des points du plan $p\pi$.

Un point quelconque du plan polaire de $p$ appartient à deux droites $u'v'$ (tangentes de $C$), et par suite la quadrique polaire de ce point passera par les deux droites $pu$ correspondantes (85.), c'est-à-dire qu'elle sera tangente en $p$ au plan $p\pi$. Le lieu des points dont les premières polaires touchent le plan $p\pi$ est donc composé 1° du cone $pC$, dont les points ont leurs quadriques polaires tangentes au plan $p\pi$, avec le point de contact sur la droite $\pi$; 2°. du plan polaire de $p$, dans lequel les points de la conique $C$ sont les poles de cones polaires tangents au plan $p\pi$ suivant des droites issues de $p$, tandis que les quadriques polaires des autres points du même plan touchent le plan $p\pi$ en $p$.

Il est évident, d'après ce qui précède, que la courbe gauche du sixième ordre qui en général (47.) est la courbe de contact entre la Hessienne et la surface polaire d'un plan, lorsque ce plan est $p\pi$, se réduit au système des quatre droites $\pi\pi_1\pi_2\pi_3$ et de la conique $C$.

97. Une droite menée arbitrairement par le point double $p$ rencon-

trera la Hessienne en deux autres points $c$, $d$; soient $c'$, $d'$ les points correspondants. Les premières polaires des points de la droite $pcd$ passent par deux coniques situées dans deux plans qui forment la quadrique polaire de $p$ et qui passent par $\pi$ (83.); et dans le faisceau de ces premières polaires, les points dont le plan polaire est constant par rapport à ces surfaces, sont 1° les points $c'$, $d'$ (sommets des cones du faisceau), dont les plans polaires relatifs aux quadriques du faisceau sont $\pi d'$, $\pi c'$ resp. et 2° les points de $\pi$, dont les plans polaires relatifs aux mêmes quadriques passent par la droite $c'd'$. Le plan $\pi d'$ est donc le plan polaire mixte des points $dc'$, c'est-à-dire qu'il est le plan polaire de $d$ par rapport au cone polaire de $c'$, dont le sommet est $c$. Il résulte d'ici que le plan $\pi d'$ passe par $c$; et analoguement le plan $\pi c'$ passera par $d$.

En outre, si $x$ est un point quelconque de $\pi$, le plan polaire de $x$ par rapport au cone polaire de $c$ passe par $c'd'$; en d'autres termes, $c'd'$ est dans le plan polaire de $c$ par rapport au cone polaire de $x$, dont le sommet est $p$. Donc les points $pc'd'$ sont en ligne droite. Ainsi:

Si une droite menée par le point double $p$ rencontre la Hessienne en $c$, $d$, les points correspondants $c'$, $d'$ sont aussi en ligne droite avec $p$; et les droites $cd'$, $c'd$ se rencontrent sur la droite $\pi$.

98. Ces conclusions subsistent même si le point $c$ tombe sur une droite $\pi_4$: une des droites de la Hessienne, différente de $\pi$ (correspondante à $p$) et de $\pi_1\pi_2\pi_3$ (qui passent par $p$), savoir correspondante à un point double $p_4$ situé, par ex., sur $\pi_1$. Alors, $c'$ devient le point double $p_4$, et $d'$ est un point de la droite $\pi_1$. Ce même point $d'$ est le pole d'une première polaire avec le point double $d$; or, les points non-doubles de $\pi_1$ ont pour quadriques polaires des cones de sommet $p_1$; donc $d'$ est le troisième point double $p_5$ situé sur $\pi_1$, et par suite $d$ tombe sur la droite $\pi_5$.

Si le point $c$ est variable sur $\pi_4$, les points $c'$ ($\equiv p_4$) et $d'$ ($\equiv p_5$), situés tous les deux sur la droite fixe $\pi_1$, restent invariables; ainsi $d$ ne sortira pas de $\pi_5$. D'où il résulte que les droites $\pi_4$ et $\pi_5$ sont dans un même plan passant par $p$ Ce plan doit en outre couper la Hessienne suivant une ligne de second ordre avec un point double en $p$; cette ligne sera donc le système de deux droites, qui nécessairement se confondent avec $\pi_2$ et $\pi_3$.

Le point commun aux droites $\pi_4$ et $\pi_5$ est le pole d'une quadrique

polaire avec point double en $p_4$ et $p_5$, savoir d'une quadrique composée de deux plans passant par $\pi_1$; ainsi ce point commun à $\pi_4$ et $\pi_5$ sera $p_1$ (situé sur $\pi$).

Les droites $\pi_2\pi_3\pi_4\pi_5$ forment donc un quadrilatère plan complet, dont les sommets sont six points doubles de la Hessienne. Deux sommets opposés sont des points correspondants, c'est-à-dire que chacun d'eux appartient à la droite correspondante à l'autre.

Quel est le nombre des plans analogues à celui qui contient les quatre droites $\pi_2\pi_3\pi_4\pi_5$? Par chacun des points $p$ passent trois de ces plans, et chaque plan contient six points $p$: le nombre des plans est donc $\frac{3.10}{6}=5$.

Ou bien encore: deux tels plans passent par chaque droite $\pi$, et chaque plan contient quatre droites $\pi$; le nombre des plans est donc $\frac{2.10}{4}=5$.

Ces cinq plans forment un *pentaèdre* (découvert la première fois par M. Sylvester) dont les sommets et les arêtes sont les dix points $p$ et les dix droites $\pi$ resp.

De ces cinq plans, trois passent par $p$ et les deux autres par $\pi$; donc le sommet commun à trois faces du pentaèdre a pour droite correspondante l'intersection de deux autres faces.

99. Lorsqu'on veut considérer le système de ces cinq plans, il est convenable de les représenter par les nombres ***1***, ***2***, ***3***, ***4***, ***5***, de sorte que les dix sommets $p$ (points doubles de la Hessienne) et les dix arêtes opposées resp. (droites $\pi$ correspondantes) seront désignées par

***123*** ***124*** ***125*** ***134*** ***135*** ***145*** ***234*** ***235*** ***245*** ***345***
***45*** ***35*** ***34*** ***25*** ***24*** ***23*** ***15*** ***14*** ***13*** ***12***.

Un point quelconque de la droite ***12*** a pour quadrique polaire un cone conjugué au trièdre (83.) formé par les plans ***345***; et de même les cones polaires dont les poles soient pris arbitrairement sur les droites ***13***, ***14***, ***15***, sont conjugués aux trièdres ***245***, ***235***, ***234***, resp. D'où il s'ensuit que toutes les quadriques polaires du réseau déterminé par ces quatre cones, savoir les quadriques polaires de tous les points du plan ***1*** sont conjuguées à un seul et même tétraèdre, qui est formé par les plans ***2345***.

Les plans ***1***, ***2***, ***3***, ***4***, ***5*** sont les seuls doués de cette propriété que les quadriques polaires de tous les points de chacun d'eux soient conjuguées à un même tétraèdre (formé par les autres quatre plans); parce qu'on démontre que, si les quadriques polaires

d'un réseau sont conjuguées à un seul et même tétraèdre, les arêtes de celui-ci sont situées dans la Hessienne. Cette surface est, en effet, la Jacobienne (37.) du système linéaire déterminé par le dit réseau et par une autre quadrique polaire quelconque $S$ (étrangère au réseau). Or, si l'on prend sur l'une des arêtes du tétraèdre un point $o$, et sur l'arête opposée le point $o'$ où celle-ci est coupée par le plan polaire de $o$ par rapport à $S$, les points $o, o'$ seront conjugués par rapport à toutes les surfaces du système, et par suite ils appartiendront à la Hessienne.

100. Nous avons constaté (85., 90.) que toute droite bitangente à la Hessienne a la propriété d'être l'enveloppe des plans polaires des points d'une autre droite (qui joint deux points correspondants de la surface). Parmi les droites douées de cette propriété il y a les dix arêtes du pentaèdre et les quinze diagonales de ses faces. Chaque arête, comme ***12***, correspond à un faisceau de cones polaires (83.) dont la base est le système de quatre droites concourant au point correspondant ***345***; et réciproquement (3.) les plans polaires des points de chacune de ces quatre droites passeront par la droite ***12***. Chaque diagonale, comme {***123***}{***145***}, correspond à un faisceau de quadriques polaires (qui ne sont pas cones) dont la base est le système des quatre droites, intersections des deux couples de plans qui forment les quadriques polaires des points ***123***, ***145***; et réciproquement, les plans polaires des points de ces quatre droites passeront tous par la diagonale considérée.

101. Nous avons vu qu'à une droite quelconque $pcd$ passant par le point double $p$ correspond une droite $pc'd'$ (97.), et il résulte de ce qui précède (98.) que, si la droite $pcd$ tombe dans l'une des faces du trièdre $\pi_1\pi_2\pi_3$, la droite $pc'd'$ coïncide avec l'arête opposée du même trièdre. Réciproquement, si $pcd$ est l'une des droites $\pi_1\pi_2\pi_3$, la droite $pc'd'$ est indéterminée parmi celles qui passent par $p$ et qui sont situées dans le plan des deux autres droites $\pi$.

Si $pcd$ coïncide avec $pc'd'$, c'est-à-dire si $c$, $d$ sont deux points correspondants, $pcd$ sera (86.) l'une des quatre droites par lesquelles passent les cones polaires de sommet $p$.

Si $pcd$ est menée dans le plan $p\pi$, le point $c'$ coïncide avec $p$, et par suite $pc'd'$ est osculatrice à la Hessienne en $p$; donc, si $pcd$ est variable (autour de $p$) dans le plan $p\pi$, la droite $pc'd'$ engendre le cone polaire de $\pi$. Et, pendant que $c$ parcourt $\pi$, et $d$ que décrit une cubique plane avec un point

double en $p$, le point $d'$ engendrera la conique $C$ intersection du cone susdit avec la Hessienne (95.). Lorsque $pcd$ est osculatrice à la Hessienne, c'est-à-dire qu'elle touche en $p$ une des branches de la cubique plane, le point $d$ tombe en $p$ et par suite $d'$ en $\pi$; d'où il résulte que les deux intersections de la conique $C$ avec la droite $\pi$ correspondent aux deux points de la cubique plane, infiniment voisins de $p$.

102. Si la droite $pcd$ est variable dans un plan $E$ (par $p$) la droite $pc'd'$ engendrera un cone passant par $\pi_1$, $\pi_2$, $\pi_3$, à cause des trois droites suivant lesquelles $E$ coupe les faces du trièdre $\pi_1\pi_2\pi_3$ (101.). Ce cone est déterminé par deux autres génératrices, parce que deux droites passant par $p$ déterminent le plan $E$. Les cones, qui de cette manière correspondent à deux plans $E$, $E_1$, ont une seule génératrice commune (outre $\pi_1$, $\pi_2$, $\pi_3$), qui est la droite $pc'd'$ correspondante à l'intersection $pcd$ des deux plans. Donc, ces cones correspondants aux plans $E$ sont du second ordre.

Ainsi nous avons une transformation de figures formées par des droites (et des plans et des cones) issues du point $p$. A une droite correspond une droite, à un plan correspond un cone quadrique circonscrit au trièdre $\pi_1\pi_2\pi_3$, et réciproquement.

Dès que les points $cc'$, et de même $dd'$, sont conjuguées par rapport à toute quadrique polaire, les droites $pcd$, $pc'd'$ seront conjuguées par rapport à tous les cones polaires de sommet $p$. Ces cones forment un faisceau et passent par les quatre droites qui correspondent à elles-mêmes; et ces quatre droites forment un angle solide dont les droites diagonales sont $\pi_1$, $\pi_2$, $\pi_3$ (intersections des couples de plans qui font partie du faisceau et qui sont les quadriques polaires de $p_1$, $p_2$, $p_3$). Ainsi, le cone quadrique, circonscrit au trièdre $\pi_1\pi_2\pi_3$, qui correspond à un plan $E$ est le lieu des droites polaires de ce plan par rapport aux cones du faisceau.. Par conséquent, ce cone coupe les plans $\pi_2\pi$, $\pi_3\pi_1$, $\pi_1\pi_2$ suivant les droites conjuguées aux intersections de ceux-ci avec $E$, par rapport aux couples de droites $\pi_2\pi_3$, $\pi_3\pi_1$, $\pi_1\pi_2$ resp.; le même cone rencontre le plan $E$ suivant deux droites correspondantes, dont chacune est une génératrice de contact entre $E$ et un cone du faisceau; les plans passant par $\pi_1$ et resp. par deux droites correspondantes forment un système harmonique avec les plans $\pi_1\pi_2$, $\pi_1\pi_3$; etc.

103. Considérons un cone cubique (du troisième ordre) passant par les six droites $pp_1$, $pp_2$, $pp_3$, $\pi_1$, $\pi_2$, $\pi_3$, et touché suivant les trois dernières

par les plans polaires de $p_1$, $p_2$, $p_3$ *); soit $pcd$ une génératrice de ce cone. Le plan $\pi c$ coupe la Hessienne et ce cone suivant deux cubiques ayant sept points communs, dont trois ont les mêmes tangentes; donc ces cubiques coïncident ensemble. C'est-à-dire que le cone cubique rencontre la Hessienne suivant une courbe plane (du troisième ordre) dont le plan est $\pi c$, et, par suite, suivant une autre courbe plane (du même ordre), dont le plan sera $\pi d$. Chacun de ces deux plans suffit évidemment pour déterminer (d'une manière unique) le cone cubique et l'autre plan; donc, ces couples de plans, contenant les courbes d'intersection de la Hessienne avec les cones cubiques du faisceau dont il s'agit, forment une involution, dont les plans doubles contiendront les courbes de contact entre la Hessienne et deux cones du faisceau. C'est-à-dire que les tangentes qu'on peut mener à la Hessienne, du point $p$, forment deux cones cubiques, et les courbes de contact sont dans deux plans passant par $\pi$; le système de ces deux plans est donc la quadrique polaire du point $p$. Ainsi, la quadrique polaire de $p$ est constituée par deux plans formant un système harmonique avec les deux plans qui contiennent les deux cubiques planes appartenant à un même cone cubique du faisceau.

Parmi les cones de ce faisceau il y a celui qui est formé par le plan $p\pi$ avec le cone polaire de $\pi$; les plans des sections qui y correspondent sont le plan $p\pi$ et le plan polaire de $p$. Un autre cone du même faisceau est le trièdre $\pi_1\pi_2\pi_3$, formé par les trois faces du pentaèdre (98.) qui concourent en $p$; les sections correspondantes sont dans les deux autres faces du pentaèdre (qui passent par $\pi$), et chacune d'elles est le système de trois droites. D'où l'on tire que les deux plans formant la quadrique polaire de $p$, et les deux faces du pentaèdre qui passent par $\pi$ forment un système harmonique.

104. Les plans $\pi c$, $\pi d$ passent respectivement par $d'$, $c'$ (97.); donc, le cone cubique (du faisceau mentionné) qui passe par $pcd$ passe aussi par $pc'd'$; c'est-à-dire que (102.) ce cone correspond à lui-même. On conclut d'ici et des propriétés connues des cubiques planes **) que les plans

*) Les cones cubiques analogues forment un faisceau, car les conditions communes sont équivalentes à neuf droites par lesquelles passent le système de trois plans $\pi_2\pi_3$, $\pi_3\pi_1$, $\pi_1\pi_2$, et le système du plan $p\pi$ et du cone polaire de la droite $\pi$.

**) On peut, en effet, considérer le cone cubique comme Jacobienne d'un réseau de cones quadriques (de sommet $p$) auquel appartienne le faisceau des cones polaires des points de $\pi$.

tangents à notre cone suivant deux droites correspondantes *pcd*, *pc'd'*, se coupent suivant une génératrice du même cone; que tout cone quadrique circonscrit au trièdre $\pi_1\pi_2\pi_3$ coupe le cone cubique suivant les trois génératrices de contact de ce cone avec un seul et même cone de second ordre; et que ces trois génératrices forment un trièdre dont les faces rencontrent le cone cubique suivant trois nouvelles droites situées dans le plan qui correspond au premier cone quadrique. Etc. etc.

105. Nous ferons maintenant quelques remarques sur la surface polaire d'un plan quelconque $E$ passant par le point double $p$. Ce point étant le sommet d'un nombre infini de cones polaires, dont les poles sont les points de $\pi$, la surface polaire passera par cette droite et sera touchée suivant celle-ci par le plan polaire de $p$. La même surface passe en outre par $p$ et y est touchée par le plan polaire du point $i$, où $E$ est rencontré par $\pi$. Parmi les cones polaires de sommet $p$, il y en a deux tangents au plan $E$; donc (77.) la surface polaire a deux points doubles sur $\pi$.

Les quadriques polaires passant par $p$ rencontrent $E$ suivant des coniques touchées en $p$ par une seule et même droite $pi$ (intersection des plans $E$ et $p\pi$). Un point quelconque de cette droite est double pour l'une de ces coniques, c'est-à-dire qu'il est un point de contact entre $E$ et une première polaire passant par $p$; toutes les premières polaires analogues passent donc par la droite $pi$, et leurs poles seront situés dans la droite, intersection des plans polaires de $p$ et $i$. D'où il dérive que cette dernière droite appartient à la surface polaire de $E$.

Cette surface polaire est tangente à la Hessienne suivant une courbe gauche du sixième ordre (47.) qui, dans le cas actuel, se décompose en deux parties, la droite $\pi$ et une courbe gauche du cinquième ordre passant par $p$. Cette courbe, étant correspondante sur la Hessienne à la section du plan $E$, forme conjointement avec les droites $\pi_1\pi_2\pi_3$ l'intersection complète de cette surface avec le cone quadrique qui correspond au plan $E$ (102.). Ce dernier cone coupera donc de nouveau la surface polaire de $E$ suivant une droite. En effet, dès que le plan $E$ passe par les points correspondants $p$, $i$ de la Hessienne, il touchera en $i$ un faisceau de quadriques polaires (92.), dont les poles sont sur une droite passant par $p$ et située dans la surface polaire; et cette surface sera touchée suivant cette droite par le plan polaire de $i$. La même droite contiendra les deux autres points doubles de la surface, qui sont les poles de deux cones appartenant au même faisceau. Ces deux

cones auront donc leurs sommets (dans le plan $E$) sur une droite passant par $p$ et correspondant à la première droite.

106. En appliquant ces considérations aux plans du pentaèdre ***12345*** (99.), on voit que les arêtes du tétraèdre ***2345*** forment la courbe du sixième ordre (correspondante au quadrilatère des quatre droites ***12, 13, 14, 15***) suivant laquelle la Hessienne est touchée par la surface polaire du plan ***1***; cette surface a donc les points ***234, 235, 245, 345*** (sommets du tétraèdre) pour points doubles. Cette même surface (étant la réciproque de la surface *Romaine*) contient trois autres droites situées dans un même plan; ces droites seront (105.) les intersections des plans polaires des couples de points (***123, 145***), (***124, 135***), (***134, 125***), sommets opposés du quadrilatère. Les mêmes droites forment un triangle $a_1 b_1 c_1$ dont chaque sommet sera le pole d'une première polaire tangente au plan ***1*** et passant par deux couples de sommets opposés du quadrilatère; ainsi, les diagonales de ce quadrilatère, combinées par couples, sont les intersections du plan ***1*** avec les premières polaires des points $a_1 b_1 c_1$; c'est-à-dire que les sommets $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ du triangle diagonal sont les poles du plan $a_1 b_1 c_1$.

Il correspond de même au plan ***2*** un plan $a_2 b_2 c_2$, qui sera le plan polaire de chaque sommet du triangle $\alpha_2 \beta_2 \gamma_2$ formé par les diagonales du quadrilatère (***21, 23, 24, 25***); etc. pour les autres plans du pentaèdre. Or, les plans menés du point ***345*** aux diagonales {***123***}{***145***}$\equiv \beta_1 \gamma_1$, {***124***}{***135***}$\equiv \gamma_1 \alpha_1$, {***125***}{***134***}$\equiv \alpha_1 \beta_1$ passent aussi par les diagonales {***123***}{***245***}$\equiv \beta_2 \gamma_2$, {***124***}{***235***}$\equiv \gamma_2 \alpha_2$, {***125***}{***234***}$\equiv \alpha_2 \beta_2$, parce que les couples de points (***145, 245***), (***135, 235***), (***134, 234***) sont en ligne droite avec ***345***; donc les droites $\alpha_1 \alpha_2$, $\beta_1 \beta_2$, $\gamma_1 \gamma_2$ concourent au même point ***345***.

Le plan $a_1 b_1 c_1$ étant le plan polaire des points $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$, il en résulte que la quadrique polaire du point commun à ce plan et à la droite ***12*** est un cone passant par les points $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ et par les quatre droites (issues de ***345***) qui forment la base du faisceau des cones polaires des points de ***12***. De même, la quadrique polaire du point où le plan $a_2 b_2 c_2$ coupe la droite ***12*** sera un cone passant par les points $\alpha_2 \beta_2 \gamma_2$ et par les mêmes quatre droites. Or, les points $\alpha_1 \alpha_2$, $\beta_1 \beta_2$, $\gamma_1 \gamma_2$ sont en ligne droite avec le point ***345***, sommet commun des deux cones; ces deux cones sont donc coïncidents, c'est-à-dire que les plans $a_1 b_1 c_1$, $a_2 b_2 c_2$ rencontrent la droite ***12*** au même point. Ainsi, ces plans $a_1 b_1 c_1$, $a_2 b_2 c_2$, ... qui correspondent aux faces ***1, 2***, ... du pentaèdre forment un nouveau pentaèdre dont

les arêtes rencontrent les arêtes correspondantes du premier; et par suite les cinq droites suivant lesquelles se rencontrent les faces correspondantes des deux pentaèdres sont dans un seul et même plan.

107. Nous avons démontré qu'à une section plane $E$ de la Hessienne correspond une courbe gauche $K$ du sixième ordre (57.). Soit $o$ un point de $K$; $o'$ le point correspondant de $E$. La droite polaire du plan $E$ par rapport au cone polaire de $o$ rencontre la Hessienne, non-seulement en $o'$, mais aussi en trois autres points $l, m, n$. Le plan $E$ est donc le plan polaire mixte des paires de points $ol, om, on$, c'est-à-dire qu'il est le plan polaire de $o$ par rapport aux cones polaires de $l, m, n$. Donc $E$ contient les sommets de ces trois cones, et par conséquent les points $l, m, n$ appartiennent à $K$. Ainsi, les droites polaires du plan $E$, par rapport aux cones polaires dont les sommets sont dans ce plan, rencontrent la courbe gauche $K$, chacune en trois points.

Combien de ces droites polaires du plan $E$ passent par un point quelconque $o$ de $K$? Il faut chercher un point qui, avec $o$, ait le plan polaire mixte $E$; tel est tout point de la droite polaire de $E$ par rapport au cone polaire de $o$. Cette droite rencontre, ainsi qu'on a vu ci-dessus, la courbe $K$ en trois points $l, m, n$; et les droites polaires de $E$ par rapport aux cones polaires de $l, m, n$ passeront par $o$. Il y a donc trois droites polaires qui passent par un point quelconque de $K$.

Combien de ces droites polaires sont rencontrées par une droite arbitraire $G$? Autrement, combien de points y a-t-il sur $G$ lesquels aient $E$ pour plan polaire, par rapport à un cone polaire dont le pole soit sur $K$? Les poles des quadriques polaires, par rapport auxquelles les points de $G$ sont les poles de $E$ (76.), sont dans une cubique gauche qui a huit points communs avec $K$ (28.). Donc, les droites polaires du plan $E$ par rapport aux cones polaires qui ont les sommets dans ce plan, forment une surface du huitième ordre. Pour cette surface, $K$ est une courbe triple, car en chacun de ses points se croisent trois génératrices. La même surface passe par les dix droites $\pi$, parce que chacune de celles-ci peut être regardée comme polaire d'un plan quelconque par rapport à la quadrique polaire du point correspondant $p$.

Les génératrices de la surface rencontrent le plan $E$ aux sommets des cones polaires, ainsi cette surface contient la section plane $E$ de la

Hessienne. Elle contient, de plus, quatre droites situées dans $E$; ce sont les génératrices de contact de $E$ avec les quatre cones polaires dont les poles sont les points doubles de la surface polaire de $E$ (77.).

Si $E$ est le plan à l'infini, les cones polaires des points de $K$ sont des cylindres, parmi lesquels ceux (en nombre de quatre) qui touchent $E$ sont paraboliques; et les droites polaires de $E$ deviennent les axes de ces cylindres.

108. De quelle classe est l'enveloppe des plans qui coupent la surface fondamentale $F_n$ suivant des cubiques harmoniques*)? Soit $G$ une droite arbitraire, $x$ un point commun à $G$ et à la surface fondamentale; il faut chercher un tel plan passant par $G$ que les quatre tangentes menées du point $x$ à $F_n$, dans ce plan, forment un système harmonique. Or, toutes les tangentes qu'on peut mener par $x$ à $F_n$ forment (6.) un cone du quatrième ordre qui, n'ayant pas en général de génératrices doubles ou stationnaires, est de la douzième classe. En coupant ce cone et la droite $G$ par un plan, nous aurons une courbe générale $C$ du quatrième ordre et un point $g$; et il s'agira de mener par $g$ une droite qui rencontre $C$ en quatre points harmoniques. On sait que cette question a six solutions**); l'enveloppe demandée est donc une surface de la sixième classe.

On trouve de la même manière que les plans qui coupent la surface fondamentale suivant des cubiques équi-anharmoniques enveloppent une surface de la quatrième classe.

Une cubique qui ait un rebroussement est simultanément un cas particulier de la cubique harmonique et de la cubique équi-anharmonique; donc, les deux surfaces de sixième et de quatrième classe, que nous avons considérées tout-à-l'heure, sont inscrites dans la développable (61.) formée par les plans tangents stationnaires (c'est-à-dire circonscrite à la surface fondamentale suivant la courbe parabolique).

Parmi les plans qui coupent la surface fondamentale suivant des cubiques équi-anharmoniques, il y a les dix plans analogues à $p\pi$ (96.), c'est-à-dire passant par un point double de la Hessienne et par la droite correspondante. En effet, la première polaire de $p$ est une

---

*) Une courbe plane du troisième ordre est dite ***harmonique*** ou ***équi-anharmonique*** d'après les valeurs singulières du rapport anharmonique constant des quatre tangentes issues d'un point quelconque de la courbe.

**) Steiner, *Ueber solche algebraische Curven etc.* (t. XLVII, p. 102 de ce Journal).

paire de plans passant par $\pi$, et les premières polaires des points de $\pi$ sont des cones qui coupent le plan $p\pi$ suivant des couples de droites (par $p$) en involution: les rayons doubles de cette involution et la droite $\pi$ forment donc la Jacobienne du réseau des coniques suivant lesquelles le plan $p\pi$ coupe les quadriques polaires de ses points. (Cette Jacobienne est la section du plan $p\pi$ par la surface polaire du même plan.) Or, si la Jacobienne du réseau des coniques polaires est un système de trois droites, la courbe fondamentale est équi-anharmonique; donc le plan $p\pi$ rencontre la surface fondamentale suivant une cubique équi-anharmonique.

## Chapitre septième.

## Les vingt-sept droites d'une surface du troisième ordre.

109. Si un plan est bitangent à la surface fondamentale $F_3$, il coupera cette surface suivant une cubique avec deux points doubles (les deux points de contact), savoir suivant une droite et une conique. Le nombre des droites situées sur $F_3$ est donc égal à celui des plans bitangents qui passent par un point arbitraire de l'espace, ou bien à la classe de la surface développable enveloppée par les plans bitangents. Or, cette classe (8.) est 27; une surface du troisième ordre contient donc, en général, 27 droites.

Si $a$ est une de ces droites, tout plan mené par $a$ coupe de nouveau la surface suivant une conique et la touche aux deux points d'intersection de cette conique avec $a$ (60.). Si l'on fait varier le plan autour de $a$, les deux points de contact engendrent une involution, dont les points doubles sont les points de contact de $a$ avec la Hessienne, ou ce qui revient au même, avec la courbe parabolique. Parmi les plans menés par $a$, il y en a cinq (60.) qui coupent $F_3$ suivant une conique avec point double (deux droites, outre $a$), c'est-à-dire que par toute droite située sur la surface passent cinq plans tritangents (deux points de contact sur la droite, et le troisième au dehors. Réciproquement, tout plan tritangent doit couper la surface suivant trois droites (une cubique avec trois points doubles); donc, une droite quelconque de la surface rencontre $2.5 = 10$ autres droites de la même surface, et le nombre des plans tritangents est $\frac{5.27}{3} = 45$.

Si $a$, $b$, $c$ sont les trois droites contenues dans un même plan tritangent, par chacune de ces droites passent quatre plans tritangents, outre $abc$; chacun de ces plans contenant deux nouvelles droites, on a ainsi les $3.4.2 = 24$ droites qui avec $a$, $b$, $c$ complètent le nombre 27.

110. Les neuf droites suivant lesquelles s'entrecoupent les faces de deux trièdres donnés forment la base d'un faisceau de surfaces cubiques, auquel appartiennent les deux trièdres. On obtient la surface du faisceau qui passe par un point donné $p$, de la manière suivante: un plan mené arbitrairement par $p$ coupe les neuf droites en neuf points lesquels, étant les intersections des côtés de deux triangles (sections des deux trièdres), forment la base d'un faisceau de courbes du troisième ordre. Une de ces courbes passe par $p$, et le lieu de toutes les courbes analogues, qu'on obtient en faisant tourner le plan autour de $p$, sera évidemment la surface cubique demandée. Soient $a_1 b_2 c_{12}$, $b_3 c_{23} a_2$, $c_{31} a_3 b_1$ les droites suivant lesquelles la première, la deuxième et la troisième face du premier trièdre coupent resp. les faces du second; autrement, soient $a_1 b_3 c_{31}$, $b_2 c_{23} a_3$, $c_{12} a_2 b_1$ les droites suivant lesquelles la première, la deuxième et la troisième face du second trièdre coupent resp. les faces du premier. Alors, nous pouvons former les ternes

$$a_1 b_1 c_{23} \quad a_2 b_2 c_{31} \quad a_3 b_3 c_{12}$$
$$b_1 b_2 b_3 \quad c_{23} c_{31} c_{12} \quad a_1 a_2 a_3$$

dans chacune desquelles on a trois droites qui ne se coupent pas. Les trois droites $a_1 b_1 c_{23}$ déterminent un hyperboloïde qui coupera de nouveau la surface cubique suivant une courbe $L$ (non-plane) du troisième ordre. Un plan mené arbitrairement par $a_1$ touche l'hyperboloïde en un point $x$ et la surface cubique en deux points $y_1 y_2$; en faisant tourner le plan autour de $a_1$, les points $y_1 y_2$ donnent une involution projective à la série simple des points $x$: il y aura donc trois coïncidences d'un point $x$ avec un des points correspondants $y$. C'est-à-dire que l'hyperboloïde et la surface cubique se touchent en trois points de $a_1$, et de même en trois points de $b_1$ et en trois points de $c_{23}$. Or, les points de contact de deux surfaces sont les points doubles de leur intersection, donc $L$ coupe en trois points chacune des droites $a_1 b_1 c_{23}$. D'où il suit que $L$ est le système de trois droites appuyées sur $a_1$, $b_1$, $c_{23}$ *).

*) [Voir un théorème plus général de M. Moutard dans la *Teoria geom. delle superficie*, note de la page 48.]

Analoguement, chacun des hyperboloïdes correspondants aux cinq autres ternes coupera la surface cubique suivant trois nouvelles droites: nous aurons ainsi $3.6 = 18$ droites qui, avec les neuf intersections des faces des trièdres donnés, forment le système des 27 droites.

111. Un faisceau de surfaces $S$ de second ordre, dont la base sera une courbe $C$ du quatrième ordre, soit projectif à un faisceau de plans $E$ passant par une droite $a$. Le lieu des coniques suivant lesquelles les surfaces $S$ sont coupées par les plans correspondants $E$ est (17.) une surface $F_3$ du troisième ordre, dont on obtient les intersections avec une droite arbitraire $G$, de la manière suivante. La droite $G$ rencontre $S$ en deux points $y_1 y_2$ et $E$ en un point $x$: les couples $y_1 y_2$ donnent une involution projective à la série simple des points $x$; il y aura donc trois coïncidences d'un point $x$ avec un des points correspondants $y$.

La surface $F_3$ passe par les bases des deux faisceaux générateurs (17.), savoir par la courbe gauche $C$ et par la droite $a$. Chaque plan $E$ touche $F_3$ en deux points: ce sont les deux points où la droite $a$ coupe la surface $S$ correspondante à $E$. Parmi les surfaces $S$ il y en a deux qui touchent $a$, c'est-à-dire qu'il y a deux plans $E$ qui sont (tangents) stationnaires. Chaque surface $S$ touche $F_3$ en quatre points: ce sont les points où la courbe gauche $C$ est rencontrée par le plan $E$ correspondant à $S$.

Parmi les plans $E$ il y en a cinq (60.) qui touchent les surfaces $S$ correspondantes: chacun de ces plans est donc tangent à $F_3$ en trois points et coupe cette surface suivant deux droites, outre $a$. En partant d'un quelconque de ces plans tritangents, on retrouve le système complet des 27 droites, comme ci-devant (109.).

112. Supposons maintenant que les plans $E$ soient les plans polaires d'un point fixe $p$ par rapport aux surfaces quadriques $S$; le lieu des courbes de contact entre les surfaces quadriques d'un faisceau et les cones circonscrits de sommet $p$, est donc une surface cubique $F_3$ qui passe par la base $C$ du faisceau, et aussi par le point $p$, à cause de la quadrique $S$ qui passe par $p$. Les plans $E$ des courbes de contact passent par une même droite $a$, qui, par suite, est située dans $F_3$.

Dans le faisceau quadrique il y a quatre cones, et pour chacun d'eux la courbe de contact se décompose en deux droites, situées dans un plan par $a$. La surface $S$ qui passe par $p$ est coupée par le plan polaire de $p$ suivant deux droites croisées en $p$, dont le plan passe par la droite $a$. Ainsi

nous avons obtenu 10 droites situées, par couples, dans des plans passant par $a$.

En considérant les deux droites croisées en $p$, chacune d'elles est appuyée en deux points à la courbe gauche $C$, et l'on peut mener par cette droite quatre plans tangents à $C$. Chacun de ces plans touche au même point (outre $C$) la surface $F_3$, parce que la droite qui joint $p$ au point de contact touche, en ce dernier, $F_3$, et détermine avec la tangente de $C$ le plan tangent de $F_3$. Chacun de ces plans est donc un plan tritangent, et par conséquent il coupera $F_3$ suivant deux nouvelles droites. Ainsi, nous aurons 2.4.2 droites qui, avec les 10 déjà obtenues et avec $a$, complètent le système des 27 droites.

113. Nous dirons qu'un système (linéaire) de plans est **projectif** au système des points de l'espace, lorsqu'à un point quelconque $x$ correspond un (seul) plan $X$, et que réciproquement à chaque plan $X$ corresponde un (seul) point $x$; de plus, qu'aux points $x$ d'un plan $X'$ correspondent les plans $X$ (d'un réseau) passant par un même point $x'$, et par suite qu'aux points $x$ d'une droite correspondent les plans $X$ d'un faisceau. Inversement à un faisceau de plans $X$ correspondront les points $x$ d'une droite, et aux plans $X$ qui passent par un point $x'$ correspondront les points $x$ d'un plan $X'$. Les points $x'$ et les plans $X'$ forment de nouveau deux systèmes projectifs.

On a trois systèmes (linéaires) de plans, projectifs entre eux et aussi au système des points de l'espace; de sorte que chacun des quatre éléments homologues $X_1$, $X_2$, $X_3$, $x$ détermine, avec une solution unique, les trois autres. Soit $x'$ le point commun aux trois plans $X_1$, $X_2$, $X_3$; les points $x$, $x'$ se détermineront l'un par l'autre d'une manière unique; car, si $x'$ est donné, par ce point passe en général une seule terne de plans correspondants $X_1$, $X_2$, $X_3$, auxquels correspondra un point unique $x$ (résultant de l'intersections des trois plans $X'_1$, $X'_2$, $X'_3$ qui correspondent au point $x'$). On **peut regarder $x$ et $x'$ comme points homologues de deux espaces projectifs**; cherchons donc à déterminer les courbes et les surfaces qui correspondent, dans l'un de ces espaces, aux droites et aux plans de l'autre.

Si $x$ parcourt un plan $E$, chacun des plans $X$ produit un réseau; on aura ainsi trois réseaux projectifs dont trois plans correspondants se coupent en $x'$. Le lieu de $x'$ est donc (23.) une surface $F_3$ du troisième ordre; d'où il suit que **les points de cette surface correspondent, chacun à chacun, aux points du plan $E$.**

Toutes les surfaces cubiques $F_3$ correspondantes aux plans $E$ du premier espace forment un système linéaire et passent par une même courbe gauche $K$ du sixième ordre (35.), lieu d'un point par lequel passent trois faisceaux correspondants de plans $X$. Ainsi, à un point quelconque $x'$ de $K$ correspondra, au lieu d'un simple point $x$, une droite $\xi$.

Si $x$ décrit une droite, les plans $X$ forment trois faisceaux projectifs; par suite (18.), le lieu de $x'$ sera une (courbe) cubique gauche. Cette courbe formera avec $K$ la complète intersection des deux surfaces $F_3$ qui correspondent à deux plans $E$ passant par la droite donnée.

Une droite et un plan, dans le premier espace, ont un point commun $x$; le point $x'$ qui lui correspond devra résulter aussi d'une manière unique de l'intersection de la courbe et de la surface qui correspondent à la droite et au plan, resp. Or, cette courbe et cette surface, étant toutes les deux du troisième ordre, ont neuf points communs; de ces points huit appartiendront (28.) à la courbe $K$, et le neuvième sera $x'$.

De ce que la cubique gauche correspondante à une droite quelconque rencontre $K$ huit fois, il résulte que cette droite sera croisée par les droites $\xi$ correspondantes à huit points $x'$ de $K$; c'est-à-dire que les droites $\xi$ du premier espace, qui correspondent aux points de la courbe gauche $K$ forment une surface du huitième degré.

Trois plans $E$ se coupent en un point $x$; donc trois surfaces $F_3$ ont un seul point commun $x'$, au dehors de la courbe $K$.

Réciproquement, si le point $x'$ décrit (dans le second espace) une droite, le point $x$ engendrera une (courbe) cubique gauche; car le lieu de $x$ sera rencontré par un plan arbitraire $E$ en autant de points que la droite donnée a d'intersections communes avec la surface $F_3$ correspondante à ce plan. Si $x'$ est variable sur un plan $E'$, $x$ engendrera une surface cubique $F'_3$; en effet, le lieu de $x$ sera rencontré par une droite quelconque aux points qui correspondent aux intersections du plan $E'$ avec la courbe correspondante à cette droite. Et dès que le point $x$ est l'intersection de trois plans homologues $X'_1$, $X'_2$, $X'_3$ de trois systèmes projectifs au système des points $x'$ (du second espace), il s'ensuit que $F'_3$ peut être construite comme lieu du point $x$ commun à trois plans correspondants de trois réseaux projectifs. Par conséquent, les surfaces $F'_3$ (correspondantes aux plans du second espace) formeront elles aussi un système linéaire et passeront par une seule et même courbe

gauche $K'$ du sixième ordre, à chaque point $x$ de laquelle correspondront les points $x'$ d'une droite $\xi'$*).

113[bis]. Soit $x'$ un point de $K$, qui sera commun à tous les plans $X_1$, $X_2$, $X_3$ de trois faisceaux correspondants, dont $A_1$, $A_2$, $A_3$ soient les axes: et soit $\xi$ la droite qui contient les points $x$ correspondants à ces plans, c'est-à-dire la droite commune aux plans $X'_1$, $X'_2$, $X'_3$ qui correspondent à $x'$. Chaque terne de plans homologues menés par $A_1$, $A_2$, $A_3$ resp. correspond à un point $x$ de $\xi$, de façon que ce point $x$ variable sur $\xi$ a toujours son homologue au point fixe $x'$; mais parmi ces ternes il y en a trois dont chacune est composée de trois plans passant par une même droite. En effet, le cone engendré (42.) par les faisceaux projectifs $A_1$, $A_2$, et le cone engendré analoguement par les faisceaux $A_1$, $A_3$, auront, outre l'axe commun $A_1$, trois droites communes, chacune desquelles sera par suite l'intersection de trois plans correspondants $X_1$, $X_2$, $X_3$. Ainsi la droite $\xi$ a trois points dont l'un quelconque correspond à une droite passant par $x'$; autrement, $\xi$ est appuyée à $K'$ en trois points auxquels correspondent trois droites ($\xi'$) passant par $x$. Analoguement, à chaque point $x$ de $K'$ correspondra une droite $\xi'$ appuyée à $K$ en trois points, et les droites $\xi$ correspondantes à ces points se croiseront en $x$. C'est-à-dire que, si une droite rencontre $K$ en trois points, les trois droites qui correspondent à ces points passent par un même point $x$ (de $K'$) et forment elles seules la cubique correspondante à la droite donnée, de manière qu'à tout autre point de celle-ci correspondra le point fixe $x$.

Si le point $x'$ décrit une droite $G$, les plans $X'_1$, $X'_2$, $X'_3$ donnent naissance à trois faisceaux projectifs, et par suite le lieu de $x$ sera, ainsi que nous l'avons déjà montré (113.) une cubique gauche, commune aux trois hyperboloïdes que les trois faisceaux engendrent, étant pris deux à deux. Cette courbe se décomposera 1°. en une conique et une droite $\xi$, lorsque $G$ rencontre $K$ une fois; 2°. en trois droites (dont deux, $\xi_1$, $\xi_2$, qui ne se coupent pas, sont croisées par la troisième), lorsque $G$ rencontre $K$ deux fois;

*) Au cas particulier que $X_1$, $X_2$, $X_3$ soient les plans polaires du point $x$ par rapport à trois surfaces quadriques fixes, les points $x$, $x'$ ont une relation parfaitement réciproque (*involutorische)*, et à un plan $E$, quel que soit l'espace auquel il est censé appartenir, correspond une seule et même surface $F_3$, lieu des poles du plan $E$ par rapport aux surfaces du réseau déterminé par les trois quadriques données (80.). Dans ce cas les courbes $K$, $K'$ coïncident, et il devient inutile de distinguer les deux espaces.

3°. en trois droites $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$ (issues d'un même point de $K'$), lorsque $G$ rencontre $K$ trois fois. En faisant abstraction des droites $\xi$ correspondantes aux points de $K$, nous pouvons dire qu'à $G$ correspondra une cubique gauche, une conique, une droite ou un point, suivant que $G$ a 0, 1, 2, 3 points communs avec $K$.

D'où il s'ensuit que, si $G$ est située sur une surface $F_3$, elle rencontrera $K$ au moins une fois, car la ligne correspondante à $G$ doit être placée sur le plan $E$ qui correspond à $F_3$. Donc, si nous considérons trois droites situées dans un même plan tritangent de $F_3$, il ne peut arriver que les deux cas suivants: ou les trois droites rencontrent $K$ chacune en 2 points, ou elles coupent cette courbe en 1, 2, 3 points resp.

114. Soit $F_3$ la surface cubique qui correspond à un plan donné $E$; ce plan coupera la courbe gauche $K'$ en six points ***1, 2, 3, 4, 5, 6,*** que nous nommerons *points fondamentaux*; donc, en regardant ces points comme des positions de $x$, les six droites correspondantes $\xi' = a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, $a_5$, $a_6$ (lieux des points homologues $x'$) seront situées sur $F_3$ et appuyées à $K$, chacune en trois points. Et l'on voit aisément qu'aux différents points de la droite $a_r$ correspondent les points du plan $E$ infiniment voisins du point fondamental $r$, c'est-à-dire que la série des points $x'$ de $a_r$ est projective au faisceau des droites menées par $r$ dans $E$.

Les autres droites de $F_3$ seront appuyées à $K$ en deux points ou en un seul point, et par conséquent elles correspondront à des droites ou à des coniques tracées dans le plan $E$ (113^bis.). Dans le premier cas la droite en $E$ doit aussi rencontrer deux fois $K'$; or, dans le plan $E$ il y a quinze droites qui ont deux points communs avec cette courbe gauche,

***23 31 12 56 64 45 14 15 16 24 25 26 34 35 36***;

donc $F_3$ contiendra quinze droites

$c_{23}$ $c_{31}$ $c_{12}$ $c_{56}$ $c_{64}$ $c_{45}$ $c_{14}$ $c_{15}$ $c_{16}$ $c_{24}$ $c_{25}$ $c_{26}$ $c_{34}$ $c_{35}$ $c_{36}$,

chacune appuyée à $K$ en deux points.

Les droites $a_r$ et $c_{rs}$ (où $r$, $s$ sont deux points fondamentaux) se rencontrent en un point qui correspond à la direction $rs$ issue de $r$; donc le plan de ces droites coupera $F_3$ suivant une troisième droite qui n'aura qu'un seul point commun avec $K$, et que nous désignerons par $b_s$. Ce même plan rencontre les six droites $a$, dont deux $(a_r, a_s)$ sont croisées par $c_{rs}$ (car la droite correspondante passe par les points $r$, $s$); donc $b_s$ coupera, outre $a_r$,

quatre autres droites $a$, hormis $a_s$. D'où il s'ensuit que la conique correspondante à $b_s$ passera par cinq points fondamentaux, hormis $s$. Ainsi $F_3$ contient six nouvelles droites

$$b_1 \qquad b_2 \qquad b_3 \qquad b_4 \qquad b_5 \qquad b_6$$

appuyées à $K$, chacune en un seul point, et correspondantes aux coniques

$$23456 \quad 13456 \quad 12456 \quad 12356 \quad 12346 \quad 12345$$

qu'on peut décrire par les points fondamentaux, pris cinq à cinq.

115. Voilà donc les 27 droites de la surface $F_3$. D'après ce qui précède (113[bis].) un plan tritangent quelconque contiendra une droite $a$, une droite $b$ et une droite $c$, ou bien trois droites $c$; et par suite deux droites $a$ ou deux droites $b$ ne seront jamais dans un même plan.

Si une droite $b$ ou $c$ rencontre la droite $a_r$, la conique correspondante à $b$ ou la droite correspondante à $c$ doit passer par le point fondamental $r$. Donc deux droites $a_r$, $b_s$ se rencontrent toujours si les indices $r$, $s$ sont différents, et ne se rencontrent pas si elles ont le même index. Et une droite $a_r$ coupera, outre les cinq droites $b$ d'index différent, les cinq droites $c_{rs}$ qui ont un index égal à $r$.

Si deux lignes en $E$ ont un point commun $x$, les lignes correspondantes sur $F_3$ s'entrecouperont au point homologue $x'$; mais si les premières lignes passent ensemble par un point fondamental $r$, ceci indiquera seulement que les lignes sur $F_3$ sont rencontrées l'une et l'autre par la droite $a_r$ aux points qui correspondent aux directions des premières lignes en $r$.

Il résulte d'ici que deux droites $c$, ou bien une droite $b$ et une droite $c$ se rencontreront, si les lignes correspondantes ont un point d'intersection qui ne soit pas l'un des six points fondamentaux. Donc $b_r$ rencontre toutes les droites $c$ qui ont un index $r$; et deux droites $c$ se coupent si tous leurs indices sont différents.

Il est maintenant très-facile de trouver les 45 combinaisons de trois droites qui sont dans un même plan. Le plan qui passe par $a_r$ et $b_s$ contiendra aussi $c_{rs}$; et cette dernière droite sera aussi dans le plan $a_s b_r$, car les symboles $c_{rs}$ et $c_{sr}$ expriment une seule et même droite (celle qui correspond à la droite menée par les points $rs$). Enfin, trois droites $c$ sont dans un même plan, si leurs indices contiennent tous les six nombres $123456$.

Voici donc les quarante-cinq ternes de droites situées dans les plans tritangents:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_1 b_2 c_{12}$ | $a_2 b_1 c_{21}$ | $a_3 b_1 c_{31}$ | $a_4 b_1 c_{41}$ | $a_5 b_1 c_{51}$ | $a_6 b_1 c_{61}$ |
| $a_1 b_3 c_{13}$ | $a_2 b_3 c_{23}$ | $a_3 b_2 c_{32}$ | $a_4 b_2 c_{42}$ | $a_5 b_2 c_{52}$ | $a_6 b_2 c_{62}$ |
| $a_1 b_4 c_{14}$ | $a_2 b_4 c_{24}$ | $a_3 b_4 c_{34}$ | $a_4 b_3 c_{43}$ | $a_5 b_3 a_{53}$ | $a_6 b_3 c_{63}$ |
| $a_1 b_5 c_{15}$ | $a_2 b_5 c_{25}$ | $a_3 b_5 c_{35}$ | $a_4 b_5 c_{45}$ | $a_5 b_4 c_{54}$ | $a_6 b_4 c_{64}$ |
| $a_1 b_6 c_{16}$ | $a_2 b_6 c_{26}$ | $a_3 b_6 c_{36}$ | $a_4 b_6 c_{46}$ | $a_5 b_6 c_{56}$ | $a_6 b_5 c_{65}$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $c_{12} c_{34} c_{56}$ | $c_{13} c_{24} c_{56}$ | $c_{14} c_{23} c_{56}$ | $c_{15} c_{23} c_{46}$ | $c_{16} c_{23} c_{45}$ |
| $c_{12} c_{35} c_{46}$ | $c_{13} c_{25} c_{46}$ | $c_{14} c_{25} c_{36}$ | $c_{15} c_{24} c_{36}$ | $c_{16} c_{24} c_{35}$ |
| $c_{12} c_{36} c_{45}$ | $c_{13} c_{26} c_{45}$ | $c_{14} c_{26} c_{35}$ | $c_{15} c_{26} c_{34}$ | $c_{16} c_{25} c_{34}$ |

116. On peut faire ici plusieurs remarques intèressants. Par ex. deux droites non situées dans un même plan, comme $a_1$, $b_1$, sont rencontrées par les mêmes cinq droites ($c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15}, c_{16}$). Parmi les autres vingt droites, il y en a cinq qui rencontrent seulement $a_1$, cinq qui rencontrent seulement $b_1$, et dix qui ne coupent aucune des deux droites $a_1$, $b_1$.

Trois droites qui ne se coupent pas, comme $a_1$, $a_2$, $a_3$, sont rencontrées par les mêmes trois droites ($b_4, b_5, b_6$); et il y a six droites ($a_4, a_5, a_6, c_{56}, c_{64}, c_{45}$) qui ne rencontrent ni $a_1$ ni $a_2$ ni $a_3$.

Quatre droites qui ne se coupent pas, comme $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, sont rencontrées par deux droites ($b_5, b_6$), et ne sont pas rencontrées par trois droites ($a_5, a_6, a_{56}$).

Deux systèmes de six droites, comme

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{matrix}$$

où deux droites homologues ne se coupent pas, et deux droites non-homologues se coupent toujours, forment ce qu'on nomme, d'après M. Schläfli, un *double-six*. Cinq droites, comme $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, $a_5$, qui appartiennent à un même *six*, sont coupées par une seule droite ($b_6$) et ne sont pas rencontrées par une autre droite ($a_6$). Mais cinq droites qui, sans se couper, n'appartiennent pas à un même six, comme $a_1$, $a_2$, $a_3$,

$a_4$, $c_{56}$, **sont rencontrées par deux droites** $(b_5, b_6)$; et il n'y a aucune droite qui ne rencontre pas l'une ou l'autre de ces cinq droites.

117. La méthode de génération que nous avons adoptée pour la surface $F_3$ nous a conduit naturellement au double-six formé par les droites $a$, $b$. Mais on peut arranger autrement les 27 droites de manière à former un double-six. **Un double-six est déterminé par deux droites homologues**, comme $a_i$, $b_i$; car les cinq droites qui coupent $b_1$ sans couper $a_1$, et les cinq droites qui coupent $a_1$ sans couper $b_1$, complètent les deux six du double-six. On déduit d'ici le nombre des double-six qu'on peut former avec les 27 droites. Chacune de ces droites n'est pas rencontrée par seize autres droites: il y a donc $\frac{27.16}{2}$ paires de droites qui ne se rencontrent pas. Chaque paire détermine un double-six, mais chaque double-six contient six couples de droites homologues: **le nombre des doubles-six est donc** $\frac{27.16}{2.6} = 36$. Voici le tableau des trente-six double-six.

<table>
<tr><td>$a_1 b_1 c_{23} c_{24} c_{25} c_{26}$<br>$a_2 b_2 c_{13} c_{14} c_{15} c_{16}$</td><td>$a_1 b_1 c_{32} c_{34} c_{35} c_{36}$<br>$a_3 b_3 c_{12} c_{14} c_{15} c_{16}$</td><td>$a_1 b_1 c_{42} c_{43} c_{45} c_{46}$<br>$a_4 b_4 c_{12} c_{13} c_{15} c_{16}$</td><td>$a_1 b_1 c_{52} c_{53} c_{54} c_{56}$<br>$a_5 b_5 c_{12} c_{13} c_{14} c_{16}$</td><td>$a_1 b_1 c_{62} c_{63} c_{64} c_{65}$<br>$a_6 b_6 c_{12} c_{13} c_{14} c_{15}$</td><td>$a_2 b_2 c_{31} c_{34} c_{35} c_{36}$<br>$a_3 b_3 c_{21} c_{24} c_{25} c_{26}$</td></tr>
<tr><td>$a_2 b_2 c_{41} c_{43} c_{45} c_{46}$<br>$a_4 b_4 c_{21} c_{23} c_{25} c_{26}$</td><td>$a_2 b_2 c_{51} c_{53} c_{54} c_{56}$<br>$a_5 b_5 c_{21} c_{23} c_{24} c_{26}$</td><td>$a_2 b_2 c_{61} c_{63} c_{64} c_{65}$<br>$a_6 b_6 c_{21} c_{23} c_{24} c_{25}$</td><td>$a_3 b_3 c_{41} c_{42} c_{45} c_{46}$<br>$a_4 b_4 c_{31} c_{32} c_{35} c_{36}$</td><td>$a_3 b_3 c_{51} c_{52} c_{54} c_{56}$<br>$a_5 b_5 c_{31} c_{32} c_{34} c_{36}$</td><td>$a_3 b_3 c_{61} c_{62} c_{64} c_{65}$<br>$a_6 b_6 c_{31} c_{32} c_{34} c_{35}$</td></tr>
<tr><td>$a_4 b_4 c_{51} c_{52} c_{53} c_{56}$<br>$a_5 b_5 c_{41} c_{42} c_{43} c_{46}$</td><td>$a_4 b_4 c_{61} c_{62} c_{63} c_{65}$<br>$a_6 b_6 c_{41} c_{42} c_{43} c_{45}$</td><td>$a_5 b_5 c_{61} c_{62} c_{63} c_{64}$<br>$a_6 b_6 c_{51} c_{52} c_{53} c_{54}$</td><td>$a_1 a_2 a_3 c_{56} c_{64} c_{45}$<br>$c_{23} c_{31} c_{12} b_4 b_5 b_6$</td><td>$a_1 a_2 a_4 c_{56} c_{63} c_{35}$<br>$c_{24} c_{41} c_{12} b_3 b_5 b_6$</td><td>$a_1 a_2 a_5 c_{46} c_{63} c_{34}$<br>$c_{25} c_{51} c_{12} b_3 b_4 b_6$</td></tr>
<tr><td>$a_1 a_2 a_6 c_{45} c_{53} c_{34}$<br>$c_{26} c_{61} c_{12} b_3 b_4 b_5$</td><td>$a_1 a_3 a_4 c_{56} c_{62} c_{25}$<br>$c_{34} c_{41} c_{13} b_2 b_5 b_6$</td><td>$a_1 a_3 a_5 c_{46} c_{62} c_{24}$<br>$c_{35} c_{51} c_{13} b_2 b_4 b_6$</td><td>$a_1 a_3 a_6 c_{45} c_{52} c_{24}$<br>$c_{36} c_{61} c_{13} b_2 b_4 b_5$</td><td>$a_1 a_4 a_5 c_{36} c_{62} c_{23}$<br>$c_{45} c_{51} c_{14} b_2 b_3 b_6$</td><td>$a_1 a_4 a_6 c_{35} c_{52} c_{23}$<br>$c_{46} c_{61} c_{14} b_2 b_3 b_5$</td></tr>
<tr><td>$a_1 a_5 a_6 c_{34} c_{42} c_{23}$<br>$c_{56} c_{61} c_{15} b_2 b_3 b_4$</td><td>$a_2 a_3 a_4 c_{56} c_{61} c_{15}$<br>$c_{34} c_{42} c_{23} b_1 b_5 b_6$</td><td>$a_2 a_3 a_5 c_{46} c_{61} c_{14}$<br>$c_{35} c_{52} c_{23} b_1 b_4 b_6$</td><td>$a_2 a_3 a_6 c_{45} c_{51} c_{14}$<br>$c_{36} c_{62} c_{23} b_1 b_4 b_5$</td><td>$a_2 a_4 a_5 c_{36} c_{61} c_{13}$<br>$c_{45} c_{52} c_{24} b_1 b_3 b_6$</td><td>$a_2 a_4 a_6 c_{35} c_{51} c_{13}$<br>$c_{46} c_{62} c_{24} b_1 b_3 b_5$</td></tr>
<tr><td>$a_2 a_5 a_6 c_{34} c_{41} c_{13}$<br>$c_{56} c_{62} c_{25} b_1 b_3 b_4$</td><td>$a_3 a_4 a_5 c_{16} c_{62} c_{21}$<br>$c_{45} c_{53} c_{34} b_2 b_1 b_6$</td><td>$a_3 a_4 a_6 c_{25} c_{51} c_{12}$<br>$c_{46} c_{63} c_{34} b_1 b_2 b_5$</td><td>$a_3 a_5 a_6 c_{24} c_{41} c_{12}$<br>$c_{56} c_{63} c_{35} b_1 b_2 b_4$</td><td>$a_4 a_5 a_6 c_{23} c_{31} c_{12}$<br>$c_{56} c_{64} c_{45} b_1 b_2 b_3$</td><td>$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$<br>$b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6$</td></tr>
</table>

118. On a vu que, trois réseaux projectifs de plans étant donnés, le lieu du point commun à trois plans correspondants est une surface du troisième ordre, dont les points correspondent, un à un, aux points d'un plan fixe. Réciproquement, on peut démontrer qu'**une surface quelconque**

(générale) $F_3$ du troisième ordre peut être engendrée (d'une infinité de manières) par trois réseaux projectifs de plans *).

Soient $a_1$, $a_2$, $a_3$ trois droites de la surface donnée $F_3$, qui ne se coupent pas (110.). Un plan $A_1$ mené arbitrairement par $a_1$, et un plan $A_2$ mené par $a_2$ rencontrent $F_3$ suivant deux coniques qui ont un point commun (car les points où la droite $A_1A_2$ rencontre les deux coniques doivent représenter les trois intersections de la même droite avec $F_3$); par ce point et par $a_3$ menons un plan $A_3$. On obtient ainsi trois faisceaux de plans, qui ont entre eux cette relation que M. August dit *duplo-projective*: c'est-à-dire que, deux plans étant choisis arbitrairement dans deux faisceaux, le plan correspondant du troisième faisceau en résulte déterminé d'une manière unique. Et la surface $F_3$ est le lieu du point commun à trois plans correspondants.

Un plan tritangent mené par $a_1$ rencontre $a_2$ et $a_3$ en deux points appartenant aux deux droites de la surface que le plan contient, outre $a_1$. Il y a donc deux cas possibles: ou le plan tritangent contient une droite qui coupe $a_2$ et $a_3$ et une autre droite qui ne coupe ni $a_2$ ni $a_3$; ou bien il contient deux droites dont l'une coupe $a_2$ et l'autre coupe $a_3$. Il y a (110.) trois droites qui rencontrent $a_1$, $a_2$ et $a_3$, donc le nombre des plans de la seconde espèce est *deux*. Soient $b_3c_{13}$, $c_{12}b_2$ les droites comprises dans ces plans, dont $b_3$, $c_{12}$ soient coupées par $a_2$, et les autres par $a_3$. Les droites $b_2a_3$ ne rencontrent pas $b_3a_2$; donc la droite $c_{23}$ commune aux plans $b_2a_3$, $b_3a_2$ est située sur la surface. De même les plans $c_{12}a_2$, $c_{13}a_3$ se couperont suivant une droite $b_1$ de la surface. Désignons les six plans $a_1b_2c_{12}$, $a_1b_3c_{13}$; $a_2b_3c_{23}$, $a_2b_1c_{12}$; $a_3b_1c_{13}$, $a_3b_2c_{23}$ par les lettres $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}'_1$; $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}'_2$; $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}'_3$. Aux plans $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}'_2$ correspond (dans la relation duplo-projective) un plan indéterminé par $a_3$, car ces deux plans se coupent suivant une droite de la surface. De même aux plans $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}'_3$ correspond un plan quelconque par $a_2$; etc.

Soit $E$ un plan fixe, et $mn$, $nl$, $lm$ trois droites tracées dans ce plan. Supposons la droite $mn$ divisée projectivement (homographiquement) au faisceau $a_1$ (savoir au faisceau dont l'axe est la droite $a_1$), tellement qu'aux points $m$, $n$, $\lambda_0$ correspondent les trois plans $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}'_1$, $A_1^0$. De même la droite $nl$ soit divisée projectivement au faisceau $a_2$, à condition qu'aux points $n$, $l$, $\mu_0$ correspondent les plans $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}'_2$, $A_2^0$; et la droite $lm$ soit projective au faisceau $a_3$, de manière que les points $l$, $m$, $\nu_0$ correspondent aux plans $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}'_3$, $A_3^0$;

*) Abstraction faite de la réalité des éléments.

et supposons de plus que les plans $A_1''$, $A_2''$, $A_3''$ soient correspondants dans la relation duplo-projective (c'est-à-dire qu'ils se coupent en un point $x_0'$ de $F_3$), et que les droites $l\lambda_0$, $m\mu_0$, $n\nu_0$ concourent en un même point $x_0$ de $E$.

Alors un point quelconque $x$ du plan $E$, joint aux points $l, m, n$, donnera trois droites qui rencontreront $mn, nl, lm$ en trois nouveaux points $\lambda, \mu, \nu$; et à ces points correspondront dans les faisceaux $a_1$, $a_2$, $a_3$ trois plans $A_1$, $A_2$, $A_3$, dont le point commun soit $x'$. Quel est le lieu du point $x'$?

Si $i$ est un point quelconque d'une droite arbitraire dans l'espace, on peut mener par ce point un plan du faisceau $a_1$ et un plan du faisceau $a_2$; le plan correspondant du troisième faisceau coupera la droite arbitraire en un point $i'$. Si au contraire on prend arbitrairement sur cette droite le point $i'$ pour y faire passer un plan du troisième faisceau, les couples de plans des autres faisceaux, qu'on peut prendre comme correspondants, marqueront sur la droite deux divisions homographiques. Chacun des deux points doubles de ces divisions est un point $i$ où passent deux plans des faisceaux $a_1$ et $a_2$ resp., correspondants au plan du troisième faisceau, mené par $i'$. Il y aura donc, sur la droite arbitraire, trois coïncidences d'un point $i$ avec son correspondant $i'$, savoir trois points du lieu; en d'autres termes le lieu du point $x'$ est une surface du troisième ordre.

Cette surface passe par les droites $a_1$, $a_2$, $a_3$, axes des trois faisceaux duplo-projectifs: car tout point de ces droites est évidemment situé dans trois plans correspondants. Mais ce n'en est pas encore assez. Si les points $\lambda, \mu$ prennent les positions $l, m$ resp., le point $\nu$ devient indéterminé; or, aux points $m$ de $mn$ et $l$ de $nl$ correspondent les plans $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2'$ des faisceaux $a_1$, $a_2$; donc le plan du troisième faisceau, correspondant à ces plans, reste indéterminé. On conclut d'ici que la droite $c_{12}$ commune aux plans $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2'$ est située entièrement sur le lieu de $x'$. Le même raisonnement subsiste pour les autres droites suivant lesquelles les plans $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3$ rencontrent les plans $\mathfrak{A}_1' \mathfrak{A}_2' \mathfrak{A}_3'$; donc le lieu de $x'$ et la surface donnée ont en commun neuf droites et un point $x_0'$, c'est-à-dire que le lieu de $x'$ coïncide avec la surface $F_3$.

Ainsi, à un point quelconque $x$ du plan $E$ correspond un point de $F_3$. Réciproquement, un point quelconque $x'$ de cette surface détermine trois plans $x'a_1 \equiv A_1$, $x'a_2 \equiv A_2$, $x'a_3 \equiv A_3$ auxquels correspondront trois points sur $mn, nl, lm$; et ces points joints à $l, m, n$ resp. donneront trois droites concourantes au point $x$.

Considérons les trois ternes de plans correspondants

$$\begin{array}{ll} a_1) & A_1\ A_1'\ A_1'' \\ a_2) & A_2\ A_2'\ A_2'' \\ a_3) & A_3\ A_3'\ A_3'' \end{array}$$

dont une quelconque est déterminée par les deux autres, qui restent arbitraires. Mais, ces ternes une fois choisies et fixées, on peut les regarder comme déterminant trois réseaux projectifs de plans, où a lieu la circonstance particulière que les plans d'un même réseau ont en commun une droite, au lieu d'un simple point. Autrement: si $A_1'''$ est un nouveau plan arbitraire par $a_1$, et si l'on détermine les plans $A_2'''$, $A_3'''$ de manière que les groupes $A_1A_1'A_1''A_1'''$, $A_2A_2'A_2''A_2'''$, $A_3A_3'A_3''A_3'''$ soient projectifs, je dis que $A_3'''$ est précisément le plan du troisième faisceau qui correspond aux plans $A_1'''$, $A_2'''$ dans la relation duplo-projective. Dans le plan $E$, en effet, les droites de chacune des ternes $(l\lambda, m\mu, n\nu)$, $(l\lambda', m\mu', n\nu')$, $(l\lambda'', m\mu'', n\nu'')$ concourent en un point; et les trois groupes de quatre droites $l(\lambda, \lambda', \lambda'', \lambda''')$, $m(\mu, \mu', \mu'', \mu''')$, $n(\nu, \nu', \nu'', \nu''')$ ont le même rapport anharmonique, parce qu'ils sont projectifs aux trois groupes de plans $A$; donc les trois droites $l\lambda'''$, $m\mu'''$, $n\nu'''$ se couperont en un même point, et par suite les plans $A_1'''$, $A_2'''$, $A_3'''$ passeront par un même point de la surface $F_3$, c'est-à-dire qu'ils sont trois plans correspondants dans les faisceaux duplo-projectifs.

Après avoir transformé de la sorte les trois faisceaux duplo-projectifs en trois faisceaux projectifs comme cas particulier de trois réseaux projectifs, nous pourrons y appliquer la méthode exposée ailleurs (45.); c'est-à-dire que nous pourrons (sans altérer la surface engendrée) subroger aux séries projectives

$$\begin{array}{l} A_1\ A_1'\ A_1''\ \dots \\ A_2\ A_2'\ A_2''\ \dots \\ A_3\ A_3'\ A_3''\ \dots \end{array}$$

les réseaux projectifs

$$\begin{array}{l} A_1\ A_2\ A_3\ \dots\ P\ \dots \\ A_1'\ A_2'\ A_3'\ \dots\ P'\ \dots \\ A_1''\ A_2''\ A_3''\ \dots\ P''\ \dots \end{array}$$

où trois plans correspondants n'auront plus en général qu'un seul point commun (dont le lieu est la surface proposée); mais il y aura six ternes (comme $A_1A_1'A_2''$) de plans correspondants passant par une même droite *).

*) Ce qu'on démontre par des considérations employées antérieurement (113.) ou bien par la méthode suivie par M. Schröter dans son mémoire sur les 27 droites.

Et ici nous pouvons de nouveau faire correspondre les points de la surface $F_3$, chacun à chacun, aux points d'un plan quelconque donné $\mathfrak{E}$; car il suffit d'établir une relation projective (réciproque) entre les points du plan $\mathfrak{E}$ et les plans de l'un des trois réseaux, de façon qu'à un point en $\mathfrak{E}$ corresponde un plan du réseau, qu'aux points d'une droite en $\mathfrak{E}$ correspondent les plans d'un faisceau dans le réseau, et inversement. Alors, à un point quelconque de $\mathfrak{E}$ correspondra un plan dans chaque réseau et par suite un point de $F_3$, et inversement.

## Chapitre huitième.

## Représentation d'une surface du troisième ordre sur un plan.

119. On a démontré (118.) que toute surface (générale) du troisième ordre $F_3$ peut être représentée sur un plan donné $E$, de manière que les points $x$ de $E$ et les points $x'$ de $F_3$ se correspondent, un à un. D'où il résulte qu'on peut étudier sur le plan la géométrie des lignes tracées sur la surface du troisième ordre.

Dans cette représentation, aux 27 droites de $F_3$ correspondent en $E$, 1°. six points **123456**, que nous avons nommés *fondamentaux;* 2°. les six coniques qu'on peut décrire par cinq des points fondamentaux; 3°. les quinze droites qui joignent, par couples, les points fondamentaux. Les droites $a$ qui correspondent aux six points, et les droites $b$ qui correspondent aux six coniques, forment les deux six d'un double-six (115.).

Proposons-nous maintenant de résoudre, au moins dans les cas les plus intéressants, ces deux questions, 1° trouver la nature de la courbe plane qui correspond à une courbe donnée sur $F_3$; 2°. trouver quelle courbe sur $F_3$ correspond à une courbe plane donnée.

120. A un plan quelconque $\mathfrak{E}'$ correspond une surface $\mathfrak{F}'_3$ du troisième ordre (113.) qui passe par la courbe $K'$; donc à l'intersection de $F_3$ par $\mathfrak{E}'$ correspondra l'intersection de $E$ par $\mathfrak{F}'_3$; c'est-à-dire qu'à une cubique plane tracée sur $F_3$ correspond, en $E$, une cubique passant par les six points fondamentaux; et inversement, à une cubique quelconque décrite par ces six points correspondra une section plane de $F_3$. Deux cubiques décrites en $E$ par les six points fondamentaux se coupent en trois nouveaux points, qui correspondront aux intersections de $F_3$ avec une droite quelconque (commune à deux plans $\mathfrak{E}$).

Si $\mathfrak{E}$ est tangent à $F_3$ au point $x'$, la cubique correspondante en $E$

aura un point double au point correspondant $x$. Si $x'$ appartient à la droite $a_r$, $x$ devient le point fondamental $r$ qui correspond à cette droite; or, dans ce cas, le plan $\mathfrak{E}$ contient la droite $a$ et coupe $F_3$ suivant une conique; donc une cubique décrite par les points fondamentaux et ayant l'un d'eux pour point double, correspond à une conique commune à $F_3$ et à un plan bitangent, passant par une droite $a$. Toutes les cubiques analogues qui ont le noeud au même point fondamental $r$ forment un faisceau; l'involution des couples des tangentes au noeud correspond à l'involution des couples des points où la droite $a_r$ est rencontrée par les coniques des plans bitangents; et les rayons doubles de la première involution correspondront aux points doubles de la deuxième, c'est-à-dire que les deux cubiques du faisceau, pour lesquelles le point double $r$ est un point de rebroussement, correspondent aux deux coniques de $F_3$ tangentes à la droite $a_r$.

De même, on trouve aisément qu'à la conique contenue dans un plan bitangent, qui passe par la droite $c_{rs}$, correspond une conique passant par quatre points fondamentaux, excepté $r$, $s$; cette conique et la droite $rs$ forment la cubique correspondante à la section complète du plan bitangent. Et à la conique contenue dans un plan bitangent, qui passe par la droite $b_r$, correspond une droite passant par le point $r$; cette droite et la conique qui passe par les autres cinq points fondamentaux forment la cubique qui correspond à la section complète du plan bitangent.

121. A la courbe gauche $C_{3n}$, suivant laquelle $F_3$ est coupée par une surface d'ordre $n$, correspond une courbe plane qui passera $n$ fois par chaque point fondamental, à cause des $n$ points où la surface d'ordre $n$ est rencontrée par chacune des droites $a$. Cette courbe plane est rencontrée par une cubique quelconque décrite par les six points *123456*, en ces points qui sont équivalents à $6n$ intersections, et en $3n$ autres points correspondants à ceux dans lesquels $C_{3n}$ est rencontrée par un plan. Donc la courbe plane correspondante à $C_{3n}$ est de l'ordre $3n$ et du genre $\frac{1}{2}(3n^2-3n+2)\ldots$ *).

122. Soit $n=2$. Dans ce cas une surface quadrique coupe $F_3$ sui-

*) Si une courbe plane d'ordre $n$ a $d$ points doubles (y compris les rebroussements), on dit qu'elle est du *genre* $\frac{(n-1)(n-2)}{2}-d$ (d'après M. Clebsch). Le genre d'une courbe gauche (qui est donné par la même formule, où $d$ comprenne aussi les points doubles apparents) située sur $F_3$ est le même que celui de la courbe plane correspondante. [Voir la *Teoria geometrica delle superficie,* 54 et 55.]

vant une courbe gauche $C_{6,4}$ du sixième ordre et du quatrième genre, qui rencontre deux fois chacune des 27 droites; et à laquelle correspond, en $E$, une courbe plane du même ordre qui passe deux fois par chacun des points ***123456***. Cette courbe peut avoir quatre autres points doubles, donc une surface quadrique peut toucher $F_3$ en quatre points, au plus, sans que la courbe d'intersection se décompose en courbes inférieures.

123. Si la surface quadrique passe par une droite de $F_3$, par ex. $b_1$, la courbe gauche $C_{6,4}$ se décomposera en deux parties, dont la deuxième sera une courbe gauche $C_{5,2}$ du cinquième ordre et du deuxième genre. Dès que $b_1$ correspond à la conique ***23456***, à la courbe $C_{5,2}$ correspondra une courbe plane $\mathbf{1^2 23456}$ (c'est-à-dire, passant deux fois par ***1*** et une fois par ***23...6***) du quatrième ordre. Cette courbe plane rencontre (au dehors des points fondamentaux) la conique ***23456*** en trois points, les autres coniques ***13456***, ... en deux points, les droites ***12***, ..., ***16*** en un point et les autres droites ***23***, ..., ***56*** en deux points; donc la courbe gauche $C_{5,2}$ rencontre trois fois la droite $b_1$, deux fois les droites $a_1$, $b_2$, $b_3$, ... $b_6$, $c_{23}$, $c_{24}$, ... $c_{56}$, et une seule fois les droites $a_2$, ... $a_6$, $c_{12}$, ... $c_{16}$.

Si la surface quadrique, au lieu de passer par $b_1$, passe par une droite $c_{12}$ ou par une droite $a_1$, on obtient une courbe plane $\mathbf{123^2 4^2 5^2 6^2}$ du cinquième ordre ou une courbe plane $\mathbf{1^3 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2}$ du sixième ordre, qui correspondent toujours à une courbe gauche analogue à $C_{5,2}$.

Chaque droite de $F_3$ détermine (sur cette surface) un système de courbes analogues à $C_{5,2}$; toutes les courbes d'un système rencontrent trois fois la même droite. Chaque courbe d'un système donné est déterminée par six points, car la courbe plane $\mathbf{1^2 23456}$ peut passer par six points arbitraires. Deux courbes d'un même système se coupent en sept points; deux courbes de systèmes différents correspondants à deux droites qui ne se rencontrent pas (qui se rencontrent) ont huit (neuf) points communs.

124. Si la surface quadrique passe par deux droites non situées dans un même plan, comme $b_1$, $b_2$, elle coupera de nouveau $F_3$ suivant une courbe gauche $C_{4,0}$ du quatrième ordre et du genre 0, qui n'est pas l'intersection de deux surfaces du second ordre. En effet, la quadrique donnée a deux systèmes de génératrices rectilignes: dont l'un est formé par des droites qui rencontrent $b_1$ et $b_2$, et l'autre par des droites qui ne rencontrent

ni $b_1$ ni $b_2$. Or, chaque génératrice du premier système rencontrera $F_3$ en deux points situés sur $b_1$, $b_2$, et par suite $C_{4,0}$ en un seul point, qui est la troisième intersection avec la surface. Au contraire, toute génératrice de l'autre système rencontrera $F_3$ (au dehors de $b_1$, $b_2$) et par suite $C_{4,0}$ en trois points. Donc, il n'y a pas une autre quadrique passant par $C_{4,0}$, parce que la courbe commune à deux surfaces du second ordre coupe en deux points toute génératrice rectiligne de chaque surface quadrique passant par la courbe elle-même *).

A la courbe gauche $C_{4,0}$ correspond, en $E$, une conique passant par les points **12**, qui, avec les coniques correspondantes aux droites $b_1$, $b_2$, forme une courbe $\mathbf{1^2 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2}$ du sixième ordre. On déduit des intersections de la conique **12** avec les lignes correspondantes aux droites de $F_3$, que la courbe $C_{4,0}$ coupe $b_1$, $b_2$ en trois points, les dix droites $b_3$, $b_4$, ... $b_6$, $c_{34}$, $c_{35}$, ... $c_{56}$ en deux points, et les dix droites $a_1$, $a_2$, $c_{13}$, $c_{14}$, ... $c_{26}$ en un seul point. Les cinq droites restantes $a_3$, ... $a_6$, $c_{12}$ ne sont pas rencontrées par $C_{4,0}$. De ce qu'il passe une (seule) conique par les points **12** et par trois autres points quelconques du plan $E$, il suit que par trois points donnés de $F_3$ on peut décrire sur cette surface une (seule) courbe gauche de quatrième ordre et genre 0, qui doive être rencontrée trois fois par deux droites données (non situées dans un même plan) de la surface cubique **).

Si l'on fait passer la surface quadrique par $b_1$ et $c_{23}$, ou par $c_{12}$ et $c_{13}$, ou par $a_1$ et $b_1$, ou par $a_1$ et $c_{23}$, ou par $a_1$ et $a_2$, on obtient dans le plan $E$ une courbe $\mathbf{1^2 456}$ du troisième ordre, ou une courbe $\mathbf{234^2 5^2 6^2}$ du quatrième ordre, ou une courbe $\mathbf{1^3 23456}$ du quatrième ordre, ou une courbe $\mathbf{1^3 234^2 5^2 6^2}$ du cinquième ordre, ou une courbe $\mathbf{1^2 2^3 3^2 4^2 5^2 6^2}$ du sixième ordre, auxquelles correspondra toujours, sur $F_3$, une courbe analogue à $C_{4,0}$.

125. Si la surface quadrique coupe $F_3$ suivant une conique située par ex. dans un plan passant par $a_1$, les deux surfaces auront, de plus, en commun une courbe gauche $C_{4,1}$ du quatrième ordre et du premier genre, qui sera rencontrée en deux points par toute droite située dans la

*) Les théorèmes énoncés par Steiner, à propos de cette courbe gauche, ont été déjà démontrés géométriquement, avec plusieurs autres, dans un Mémoire inséré aux Annali di Matematica, t. IV, p. 71.

**) Deux coniques passant par **1**, **2** se coupent en deux autres points; donc, deux courbes du quatrième ordre et genre 0, tracées sur $F_3$, qui rencontrent trois fois les mêmes droites ($b_1$, $b_2$), se coupent en deux points.

quadrique; car cette droite, ayant un point commun avec la conique, coupe la surface cubique en deux autres points. Tout plan mené par la droite $a_1$ coupe $F_3$ suivant une conique qui a quatre points communs avec $C_{4,1}$, d'où il suit que par cette conique et par $C_{4,1}$ on peut faire passer une surface du second ordre. Donc, la courbe $C_{4,1}$ est la base d'un faisceau de quadriques.

A $C_{4,1}$ correspond, en $E$, une courbe **23456** du troisième ordre (car la conique a pour courbe correspondante une cubique $\mathbf{1^2 23456}$). Donc, la courbe gauche $C_{4,1}$ ne rencontre pas $a_1$; elle rencontrera en deux points les dix droites $b_2, \ldots b_6, c_{12}, \ldots c_{16}$, et en un seul point les seize restantes.

Les dix droites coupées deux fois par la courbe gauche sont rencontrées aussi par la droite unique qui ne rencontre pas la courbe. Donc, $F_3$ contient 27 systèmes de courbes $C_{4,1}$, les courbes d'un même système n'étant pas rencontrées par une même droite. Quatre points déterminent une courbe d'un système donné. Deux courbes d'un même système ont quatre points communs; deux courbes de systèmes différents se coupent en cinq points.

Si l'on change la droite $a_1$, on peut obtenir d'autres courbes planes d'ordre supérieur (mais toujours du genre 1) comme correspondantes à des courbes gauches analogues à $C_{4,1}$.

126. La courbe d'intersection de $F_3$ avec une surface quadrique peut se décomposer en deux cubiques gauches $C_{3,0}$, dont si l'une correspond à une droite quelconque (113.) en $E$, l'autre correspondra à une courbe $\mathbf{1^2 2^2 3^2 4^2 5^2}$ du cinquième ordre. L'analyse de ces courbes planes fait voir tout de suite qu'une cubique gauche (décrite sur $F_3$) rencontre deux fois six droites, ne rencontre pas six autres droites et coupe en un point les dix restantes. Les deux groupes de six droites sont les *six* conjugués d'un même double-six, de manière que chaque double-six détermine deux systèmes conjugués de cubiques gauches, dans lesquels chaque courbe rencontre deux fois les droites d'un six, et ne rencontre pas les droites de l'autre six. Deux cubiques gauches, résultantes d'une même surface quadrique, appartiennent toujours à deux systèmes conjugués (et réciproquement), et se rencontrent en cinq points. Deux cubiques gauches d'un même système ont un seul point commun.

127. Considérons maintenant les courbes résultantes de l'intersection de $F_3$ avec une autre surface $F_3^0$ du même ordre. Généralement, cette intersection sera une courbe gauche du neuvième ordre qui rencontrera

trois fois chacune des 27 droites: la courbe plane correspondante est du même ordre et passe trois fois par chaque point fondamental; d'où il suit que cette courbe, ainsi que la courbe gauche, est du genre $\frac{8.7}{2} - 3.6 = 10$. La courbe plane peut avoir dix autres points doubles au plus; donc, deux surfaces cubiques peuvent se toucher au plus en dix points, sans que leur courbe d'intersection se partage en courbes inférieures.

Trois cubiques gauches forment l'intersection de $F_3$ avec une surface cubique, lorsque leurs courbes planes correspondantes forment ensemble une ligne $1^3 2^3 3^3 4^3 5^3 6^3$ du neuvième ordre; telles sont par ex. les cubiques gauches correspondantes à une droite quelconque et à deux courbes $1^2 2^2 3^2 456$, $1234^2 5^2 6^2$ du quatrième ordre.

Sous la même condition, deux courbes gauches du quatrième ordre avec une droite peuvent former la courbe commune à $F_3$ et $F_3^{\prime\prime}$. Si les deux courbes gauches sont du genre 0 *), elles se coupent en huit points, et rencontrent la droite, chacune deux fois. Si les deux courbes gauches sont du premier genre **), elles appartiennent à deux systèmes correspondants à deux droites situées dans un même plan: la troisième droite de ce plan étant celle qui complète l'intersection des deux surfaces cubiques. Les deux courbes gauches se coupent en six points, et chacune d'elles rencontre deux fois la droite complémentaire. Enfin, si des deux courbes gauches l'une est du genre 0 et l'autre du genre 1 ***), elles se coupent en sept points; et la droite complémentaire rencontre la première courbe en trois points et l'autre en un seul point.

Sous la même condition, l'intersection de $F_3$ et $F_3^{\prime\prime}$ peut résulter d'une courbe du quatrième ordre, d'une cubique gauche et d'une conique (ou de deux droites, même non situées dans un plan); mais nous n'avons pas l'intention de nous arrêter sur tous les cas possibles.

Supposons que $F_3$ et $F_3^{\prime\prime}$ aient en commun la courbe gauche $C_{5,2}$ (123.) qui correspond à une courbe plane $1^2 23456$ du quatrième ordre; les deux surfaces se couperont, en outre, suivant une courbe gauche du quatrième

---

*) Par ex. celles qui correspondent à la cubique $1456^2$ et à la courbe $1^2 2^2 3^2 45$ du quatrième ordre; la droite étant $b_1$.

**) Par ex. celles qui correspondent à une cubique $12345$ et à une courbe $1^2 23456^2$ du quatrième ordre; la droite complémentaire est $b_1$.

***) Par ex. celles qui correspondent à deux courbes $234^2 5^2 6^2$, $1^2 23^2 456$ du quatrième ordre; la droite complémentaire est $c_{12}$.

ordre, dont la ligne plane correspondante sera une courbe $\mathbf{1\,2^2 3^2 4^2 5^2 6^2}$ du cinquième ordre; donc la deuxième courbe gauche est du premier genre. Ainsi, deux courbes gauches $C_{5,2}$ et $C_{4,1}$ peuvent former l'intersection de $F_3$ avec une autre surface cubique pourvu que les systèmes (123., 125.) auxquels elles appartiennent correspondent à une même droite; savoir, à condition que la première courbe coupe en trois points la droite qui n'est pas rencontrée par l'autre courbe. Les deux courbes gauches ont huit points communs. Mais une courbe $C_{5,2}$ et une courbe $C_{4,0}$ ne peuvent pas être situées à la fois sur deux surfaces du troisième ordre.

Comme cas particulier du précédent, l'intersection des surfaces $F_3$, $F_3^0$ peut se composer d'une courbe $C_{5,2}$, d'une cubique gauche et d'une droite rencontrée deux fois par chacune des courbes gauches. Celles-ci ont six points communs.

128. Mais il y a lieu de considérer d'autres courbes gauches du cinquième ordre, différentes de $C_{5,2}$. En effet, si $F_3^0$ passe par une droite et par une cubique gauche, situées dans $F_3$, l'intersection sera complétée par une courbe gauche du cinquième ordre, qui est (127.) du second genre en cas que la droite et la cubique gauche aient deux points communs. Mais, si la droite coupe une seule fois ou ne coupe pas la cubique gauche, on a des courbes gauches d'un genre inférieur.

Le premier cas a lieu par ex. si la courbe plane du sixième ordre correspondante à la complète intersection de $F_3$ et $F_3^0$ est composée de la conique $\mathbf{23456}$ (qui correspond à la droite $b_1$), d'une courbe de quatrième ordre $\mathbf{1^2 2^2 3^2 456}$ (qui correspond à une cubique gauche appuyée à $b_1$ en un point) et d'une cubique $\mathbf{1456}$; à celle-ci correspondra donc une courbe gauche $C_{5,1}$ du cinquième ordre et du premier genre, qui coupe la cubique gauche en neuf points et la droite en trois points. On obtient cette même courbe $C_{5,1}$, lorsque les deux surfaces cubiques ont en commun une courbe $C_{4,0}$; les deux courbes gauches ont alors dix points communs, et la première courbe rencontre en 0, 1, 2, 3 points les mêmes droites que l'autre coupe en 3, 2, 1, 0 points resp.

On aura le dernier cas si par ex. la courbe plane du sixième ordre se décompose dans les trois lignes suivantes: la conique $\mathbf{23456}$, qui correspond à la droite $b_1$; une courbe $\mathbf{1^2 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2}$ du cinquième ordre, qui correspond à une cubique gauche n'ayant aucun point commun avec la droite

$b_1$; et une conique passant par le point *1*, à laquelle correspondra par suite une courbe gauche $C_{5,0}$ du cinquième ordre et du genre 0. Cette courbe coupe la cubique gauche en huit points, la droite $b_1$ en quatre points, les droites $b_2, \ldots, b_6$ en trois points, les droites $c_{23}, \ldots, c_{56}$ en deux points, les droites $a_1, c_{12}, \ldots, c_{16}$ en un seul point, et les autres droites $a_2, \ldots, a_6$ en aucun point.

De ces trois courbes gauches $C_{5,2}$, $C_{5,1}$, $C_{5,0}$ du cinquième ordre ce n'est que la première qui est située sur une surface quadrique. Elle a quatre points doubles apparents (c'est-à-dire que par un point arbitraire de l'espace on peut mener quatre droites à rencontrer la courbe deux fois), au lieu que la deuxième en a cinq et la troisième six. La troisième, la plus simple de toutes, est la seule qui admette une droite qui la coupe en quatre points.

129. Cette méthode d'étudier sur le plan $E$ les propriétés des courbes tracées sur $F_3$ est si évidente et si facile, que nous nous bornerons désormais à énoncer des résultats. Ainsi, pour obtenir les courbes gauches du sixième ordre qui font partie de l'intersection de deux surfaces cubiques, il faudra considérer les cas suivants:

1°. Les surfaces $F_3$, $F_3''$ ont en commun une section plane; l'autre partie de l'intersection est alors une courbe gauche $C_{6,4}$ du sixième ordre et du quatrième genre, qui résulte aussi de la rencontre de $F_3$ avec une surface quadrique (122.);

2°. Les surfaces $F_3$, $F_3''$ ont en commun une cubique gauche; elles se couperont aussi suivant une courbe gauche $C_{6,3}$ du sixième ordre et du troisième genre, qui a huit points communs avec la cubique gauche et coupe en 1, 2, 3 points les mêmes droites que la cubique rencontre en 2, 1, 0 points resp. D'où il suit que $C_{6,3}$, de même que la cubique, correspond à un certain double-six.

3°. Les surfaces $F_3$, $F_3''$ passent à la fois par une droite et une conique qui n'ont aucun point commun. L'intersection est alors complétée par une courbe gauche $C_{6,2}$ du sixième ordre et du second genre, qui coupe la conique en six points et la droite donnée en quatre points. Parmi les autres droites il y a 8, 9, 8, 1 qui sont rencontrées en 3, 2, 1, 0 points resp.

4°. Les surfaces $F_3$, $F_3''$ ont en commun trois droites qui ne se coupent pas; elles se rencontreront en outre suivant une courbe gauche $C_{6,1}$ du sixième ordre et du premier genre, qui coupe chacune des trois droites données en quatre points, etc.

De ces quatre courbes gauches du sixième ordre, la première seule est située sur une surface quadrique. Elles ont respectivement six, sept, huit, neuf points doubles apparents.

La courbe $C_{6,3}$ est celle que nous avons rencontrée ailleurs (25, 78, 107) comme lieu des sommets des cones quadriques d'un réseau. La courbe plane correspondante peut être une courbe générale du quatrième ordre (passant par les six points fondamentaux); d'où il résulte que, comme par ex. cette courbe plane a 28 tangentes doubles et 24 tangentes stationnaires, de même parmi les cubiques gauches qui coupent en deux points les droites de $F_3$ que $C_{6,3}$ rencontre trois fois, il y en a 28 qui touchent $C_{6,3}$ en deux points, et 24 qui ont avec cette courbe un contact du second ordre.

De même que pour les cubiques gauches, chaque double-six détermine deux systèmes conjugués de courbes du sixième ordre et troisième genre. Deux courbes appartenant à deux systèmes conjugués ont vingt points communs et forment la complète intersection de $F_3$ avec une surface du quatrième ordre.

130. Il y a aussi une courbe gauche du sixième ordre et du genre 0, mais elle n'est pas située à la fois sur deux surfaces cubiques. On obtient cette courbe, en faisant passer une surface du quatrième ordre par trois droites, comme $b_1$, $b_2$, $b_3$, qui ne se coupent pas, et par une cubique gauche (correspondante à une courbe $1^2 2^2 3^2 456$ du quatrième ordre) qui rencontre chacune de ces droites en un point. La courbe gauche résultante $C_{6,0}$ correspond à une conique qui ne passe par aucun des points fondamentaux, et coupe la cubique gauche en huit points. Des 27 droites de $F_3$, il y en a 6, 6, 15 rencontrées par $C_{6,0}$ en 4, 0, 2 points resp. Cette courbe $C_{6,0}$ a dix points doubles apparents.

131. De l'intersection des deux surfaces cubiques $F_3$, $F_3^0$ il ne peut résulter plus que deux courbes gauches du septième ordre $C_{7,5}$ et $C_{7,4}$, et une seule courbe gauche du huitième ordre $C_{8,7}$; on obtient ces courbes en faisant passer $F_3^0$ par une conique, ou par deux droites qui ne se coupent pas, ou par une droite (de $F_3$) resp.

Il y a sur $F_3$, 27 systèmes de courbes analogues à $C_{8,7}$, chaque système correspondant à une droite de $F_3$. Si le système est donné, la courbe est déterminée par quatorze points. Deux courbes d'un même système ont vingt points communs.

L'intersection de $F_3$ avec des surfaces d'ordres supérieurs donne d'autres

courbes du 7$^e$, 8$^e$, 9$^e$, ... ordre. Par ex., si par deux droites qui ne se coupent pas et par une cubique gauche qui ne rencontre aucune de ces droites, on fait passer une surface du quatrième ordre, on a une courbe gauche $C_{7,1}$ du septième ordre et du premier genre, qui coupe la cubique en onze points et chacune des droites données en cinq points. Si par trois droites qui ne se coupent pas et par une courbe $C_{4,0}$ qui rencontre deux de ces droites en un point et ne rencontre pas la troisième, on fait passer une surface du cinquième ordre, l'intersection sera complétée par une courbe gauche $C_{8,1}$ du huitième ordre et du premier genre, qui coupe $C_{4,0}$ en seize points, les deux premières droites en cinq points et la troisième en six. Enfin, on obtient une courbe gauche du neuvième ordre et du premier genre, lorsque l'intersection de $F_3$ par une surface du sixième ordre se décompose en deux courbes du même ordre; etc. etc.

132. On vient de voir qu'à une même courbe sur $F_3$, dont l'ordre et le genre soient donnés, correspondent en $E$ des courbes planes d'ordres différents, mais toujours d'un même genre *). En nous bornant à considérer, pour chaque genre, la courbe plane de l'ordre le plus petit possible, nous pourrons donner le résumé suivant:

1°. A une droite en $E$ correspond, en $F_3$, une conique ou une cubique gauche, suivant que la droite passe ou ne passe pas par un des points fondamentaux.

2°. A une conique en $E$ correspond, en $F_3$, une courbe gauche $C_{4,0}$, ou $C_{5,0}$, ou $C_{6,0}$, suivant que la conique passe par 2, 1, 0 points fondamentaux.

3°. A une cubique (générale) en $E$ correspond, en $F_3$, une cubique plane $C_{3,1}$, ou une courbe gauche $C_{4,1}$, ou $C_{5,1}$, ou $C_{6,1}$, ou $C_{7,1}$, ou $C_{8,1}$, ou $C_{9,1}$, suivant que la cubique donnée passe par 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0 points fondamentaux.

Etc. etc.

133. Soit en général donnée, dans le plan $E$, une courbe d'ordre $n$, qui passe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_6$ fois par les points *1, 2, ..., 6* resp. et qui est douée de $d$ points doubles et $k$ points de rebroussement, situés ailleurs. L'ordre de la courbe gauche correspondante en $F_3$ sera évidemment $3n-\Sigma\alpha$, et son

*) [*Teoria geom. delle superficie,* 54].

genre sera celui même de la courbe plane, savoir

$$\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)-\tfrac{1}{2}\Sigma\alpha(\alpha-1)-(d+k).$$

Or, une courbe gauche d'ordre $3n-\Sigma\alpha$, douée de $d$ points doubles, $k$ rebroussements et $h$ points doubles apparents, est du genre donné par la formule

$$\tfrac{1}{2}(3n-\Sigma\alpha-1)(3n-\Sigma\alpha-2)-(h+d+k),$$

donc

$$h = 4n^2-3n(\Sigma\alpha+1)+\tfrac{1}{2}(\Sigma\alpha+1)^2+\tfrac{1}{2}(\Sigma\alpha^2-1).$$

Connaissant, de cette manière, l'ordre de la courbe gauche (désignons-le par $m$) et les nombres des points doubles effectifs et apparents, on peut, d'après les formules dues à M. Cayley, calculer les autres caractéristiques de la courbe; savoir

l'ordre de la développable osculatrice

$$\varrho = m(m-1)-2(h+d)-3k = n(n+3)-\Sigma\alpha(\alpha+1)-(2d+3k),$$

la classe de cette développable

$$\nu = 3m(m-2)-6(h+d)-8k = 3(n^2-\Sigma\alpha^2)-(6d+8k),$$

le nombre des plans osculateurs stationnaires

$$\sigma = k+2(\nu-m) = 6n(n-1)-2\Sigma\alpha(3\alpha-1)-3(4d+5k),$$

la classe de la développable bitangente

$$y = h+\tfrac{1}{2}(\varrho-m)(\varrho+m-9)+d$$

$$= \tfrac{1}{2}n(n^2-1)(n+6)+\tfrac{1}{2}\Sigma\alpha^2(\Sigma\alpha+1)-\tfrac{1}{2}[2d+3k+\Sigma\alpha(\alpha+1)][2n^2+6n-9-2d-3k-\Sigma\alpha^2]$$
$$+\tfrac{1}{2}\Sigma\alpha(2d+3k+\Sigma\alpha-7)+d,$$

le nombre des plans qui touchent la courbe en trois points

$$t = \tfrac{1}{3}[(\varrho-2)y-\varrho(3\nu+m)+6\nu+10(\sigma+m)], \text{ etc. etc.}$$

Réciproquement, ces nombres expriment aussi des propriétés de la courbe plane donnée; c'est-à-dire que dans le système des cubiques passant par les six points **123456**, il y en a $\sigma$ qui ont un contact du troisième ordre avec la courbe donnée, et $t$ qui touchent cette courbe en trois points distincts; que dans un réseau de ces cubiques, il y en a $\nu$ qui ont un contact du second ordre avec la courbe donnée, et $y$ qui la touchent en deux points distincts; et que dans un faisceau de ces mêmes cubiques, il y en a $\varrho$ qui sont tangentes à la courbe donnée.

Observons en outre que la courbe plane donnée passe $\alpha_r$ fois par le point fondamental $r$, coupe en $2n-(\Sigma\alpha-\alpha_r)$ points (différents des points fond.) la conique qui passe par les points fond. excepté $r$, et coupe en $n-(\alpha_r+\alpha_s)$ points

(différents des points fond.) la droite $rs$; donc la courbe gauche correspondante rencontrera la droite $a_r$ en $\alpha_r$ points, la droite $b_r$ en $2n+\alpha_r-\Sigma\alpha$ points et la droite $c_{rs}$ en $n-(\alpha_r+\alpha_s)$ points.

134. Qu'il nous soit permis de faire mention spéciale du cas dans lequel tous les $\alpha$ sont nuls, c'est-à-dire que la courbe plane ne passe par aucun des points fondamentaux. Alors, la courbe gauche qui est de l'ordre $3n$, correspond à un certain double-six, dont elle coupe $2n$ fois les droites d'un six, et ne rencontre pas les droites de l'autre six; tandis que chacune des autres quinze droites est rencontrée par la courbe gauche en $n$ points. Chaque double-six détermine donc deux systèmes conjugués de courbes gauches analogues; si le système est donné, il y a une (seule) courbe qui passe par $\frac{n(n+3)}{2}$ points donnés arbitrairement; et deux courbes d'un même système ont $n^2$ points communs.

La courbe gauche d'ordre $3n$, correspondante à la courbe plane d'ordre $n$ qui ne passe par aucun point fond. et la courbe gauche du même ordre, correspondante à la courbe plane d'ordre $5n$ qui passe $2n$ fois par chaque point fond., forment ensemble l'intersection complète de $F_3$ avec une surface d'ordre $2n$, et appartiennent à deux systèmes conjugués (relatifs au même double-six). Ces deux courbes gauches ont $5n^2$ points communs. Si elles n'ont pas de points doubles (c'est-à-dire, si les courbes planes correspondantes n'en ont pas au dehors des points fond.), ou bien si elles en ont le même nombre, toutes les caractéristiques seront communes aux deux courbes gauches. Ces caractéristiques sont (en supposant qu'il n'y ait pas de points doubles):

ordre $3n$,
genre $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$,
nombre des points doubles apparents $n(4n-3)$,
ordre de la développable osculatrice $n(n+3)$,
classe de cette développable $3n^2$,
nombre des plans osculateurs stationnaires $6n(n-1)$,
classe de la développable bitangente $\frac{1}{2}n(n^2-1)(n+6)$,
nombre des plans tritangents $\frac{1}{6}n(n-1)(n^4+10n^3+7n^2-74n+48)$,
etc.

## Chapitre neuvième.

## Surfaces quadriques qui coupent une surface du troisième ordre suivant des coniques.

135. Deux coniques situées dans une surface donnée $F_3$ du troisième ordre et dans deux plans passant par deux droites (de la surface), qui, comme $a_1$, $b_2$, se coupent, ont toujours deux points communs: puisque la droite commune aux deux plans rencontre chaque conique en deux points, et d'ailleurs cette droite ne rencontre $F_3$ qu'en deux points, outre le point $a_1 b_2$; ces deux points sont donc communs aux deux coniques. Et réciproquement, si deux coniques (de la surface) ont deux points communs, la droite qui joint ces points, étant l'intersection des plans des coniques, coupera la surface en un troisième point qui sera commun aux deux droites de la surface, situées dans ces plans.

Au contraire, deux coniques (de la surface) situées dans deux plans passant par deux droites qui, comme $a_1$, $a_2$, ne se coupent pas, ont un seul point commun, ainsi qu'on a déjà remarqué (118.). Et deux coniques situées dans deux plans passant par une même droite $a_1$, n'ont aucun point commun, car elles coupent $a_1$ suivant deux couples de points conjugués d'une certaine involution (109.).

Par conséquent, une droite de la surface, comme $a_1$, rencontre en deux points toute conique située dans un plan passant par $a_1$, et en un seul point toute conique située dans un plan passant par une droite qui ne coupe pas $a_1$; mais la même droite $a_1$ ne rencontre pas les coniques dont les plans passent par des droites appuyées sur $a_1$.

136. Deux coniques (de $F_3$) situées dans deux plans passant par $a_1$, $b_2$, resp., ayant deux points communs, forment la base d'un faisceau de surfaces quadriques, dont chacune coupera $F_3$ suivant une troisième conique située dans un plan passant par la droite $c_{12}$ qui rencontre $a_1$ et $b_2$ *). Cette troisième conique peut être choisie arbitrairement; car, la base du faisceau contenant quatre points de toute conique située dans un plan passant par $c_{12}$, un autre point quelconque de celle-ci suffit pour déterminer la quadrique (du faisceau)

*) Les plans des trois coniques forment une surface cubique qui coupe $F_3$ suivant trois coniques et trois droites; les trois coniques étant dans une surface quadrique, les trois droites seront dans un plan (11. *note*).

qui passe par cette conique. Il y a donc une (seule) surface quadrique qui passe par trois coniques situées dans trois plans menés arbitrairement par $a_1$, $b_2$, $c_{12}$ resp. Réciproquement, si une surface quadrique rencontre $F_3$ suivant trois coniques, les plans de celles-ci couperont de nouveau $F_3$ suivant trois droites situées dans un même plan (11. *note*). D'où il résulte que trois couples quelconques de points conjugués des involutions, qui sont marquées sur $a_1$, $b_2$, $c_{12}$ resp. par les coniques de la surface (109.), appartiennent à une même courbe du second ordre (qui n'est pas située sur $F_3$).

137. Soient $A$, $B$ deux plans bitangents de $F_3$, menés l'un par $a_1$ et l'autre par $b_2$; par les deux coniques $(A)$, $(B)$, contenues dans ces plans, on pourra faire passer deux cones quadriques, dont les sommets seront sur la droite réciproque de l'intersection $AB$, par rapport à une surface quelconque du second ordre passant par $(A)$ et $(B)$. Nous pouvons fixer arbitrairement un plan $C$ passant par $c_{12}$; et la surface quadrique $(ABC)$ passant par les coniques $(A)$, $(B)$, $(C)$ suffira pour déterminer la droite qui joint les sommets des deux cones.

Si l'on fait tourner le plan $B$ autour de $b_2$, la quadrique $(ABC)$ engendrera un faisceau $(AC)$, et la droite $AB$ produira, dans le plan $A$ et autour du point $a_1 b_2$, un autre faisceau projectif au précédent. Les droites de ce faisceau sont coupées par la droite $AC$ en des points dont les plans polaires, par rapport aux surfaces correspondantes du faisceau $(AC)$, passent par une même droite (la réciproque de $AC$ par rapport aux quadriques $(AC)$); et semblablement les plans polaires du point $a_1 b_2$, par rapport aux quadriques $(AC)$ passent par une même droite. Donc les plans polaires des points $a_1 b_2$ et $ABC$, par rapport à la surface $(ABC)$, si $B$ est variable, engendreront deux faisceaux projectifs, et par suite le lieu de la droite réciproque de $AB$ est un hyperboloïde $J_A$, dont les génératrices de l'autre système sont évidemment les droites réciproques de $AC$ par rapport à la quadrique $(ABC)$, où le plan $C$ soit variable autour de $c_{12}$. Les droites $AB$, $AC$ se coupent au point $ABC$; leurs réciproques seront par suite dans le plan polaire de ce point par rapport à la surface $(ABC)$. L'hyperboloïde $J_A$ est donc l'enveloppe du plan polaire du point $ABC$ par rapport à la quadrique $(ABC)$, où $A$ est fixe, $B$ et $C$ variables.

Un point quelconque de l'espace est l'intersection de trois plans $A$, $B$, $C$, qui donnent une quadrique $(ABC)$; et réciproquement, toute surface $(ABC)$ détermine un point de l'espace. L'hyperboloïde $J_A$ est l'enveloppe des

plans polaires des points du plan $A$ par rapport aux surfaces $(ABC)$ qui correspondent à ces points.

Dès que les droites réciproques de $AB$, $AC$ sont situées dans le plan polaire du point $ABC$ par rapport à la quadrique $(ABC)$, le point commun à ces réciproques est le pole du plan $A$ par rapport à la même surface; l'hyperboloïde $J_A$ est donc le lieu des poles du plan fixe $A$ par rapport aux quadriques $(ABC)$.

Les surfaces $(ABC)$ passent par la conique fixe $(A)$, donc les plans polaires du point $a_1 b_2$ se coupent suivant la droite polaire de ce point par rapport à la conique $(A)$. D'où il résulte que l'hyperboloïde $J_A$ rencontre le plan $A$ suivant la droite polaire du point $a_1 b_2$ par rapport à la conique $(A)$, et analoguement suivant la droite polaire du point $a_1 c_{12}$ par rapport à la même conique.

138. Désignons par $o$ le point $b_2 c_{12}$; une droite quelconque $ol$ est l'intersection de deux plans $B$, $C$. Soient $l$, $m$, $n$ les points conjugués harmoniques de $o$ par rapport aux couples de points d'intersection des coniques $(B)$, $(C)$ avec les droites $ol$, $b_2$, $c_{12}$; les droites $lm$, $ln$ seront alors les polaires du point $o$ par rapport à ces coniques, et par suite $lmn$ sera le plan polaire de $o$ par rapport aux quadriques du faisceau $(BC)$. En outre, si l'on mène par $o$ dans le plan $B$ une droite quelconque, qui coupera la conique $(B)$ et par suite la surface $F_3$ en deux points, le point conjugué harmonique de $o$, par rapport à ces intersections, tombera sur $lm$; donc $lm$ et de même $ln$ appartiennent à la quadrique $O$, première polaire de $o$ par rapport à $F_3$; en d'autres termes, le plan $lmn$ est tangent en $l$ à cette quadrique polaire. D'où il resulte que les plans polaires du point $o$ par rapport à toutes les quadriques $(ABC)$, quels que soient $A$, $B$, $C$, enveloppent la quadrique polaire de $o$.

On se souvient que l'hyperboloïde $J_A$ est l'enveloppe du plan polaire du point $ABC$ par rapport aux quadriques $(ABC)$, $A$ étant fixe; or, si le plan $A$ vient coïncider avec le plan tritangent $a_1 b_2 c_{12}$ (dans lequel cas, la quadrique $(ABC)$ se réduit aux deux plans $B$, $C$), tous les points $ABC$ tombent sur $o$; donc, l'hyperboloïde $J_A$, correspondant au plan $A = a_1 b_2 c_{12}$, n'est autre que la quadrique $O$ polaire de $o$.

139. Si le plan $lmn$ est mobile autour d'un point fixe $i$ de l'espace, son enveloppe sera un cone circonscrit à la quadrique $O$; le point $l$ décrira la conique de contact, et par suite le lieu de la droite $ol$ sera un cone qua-

## Inhaltsverzeichniss des acht und sechzigsten Bandes ersten Hefts.

---

Heft 1. mit [illegible] in 8 [illegible]

# Journal

für die

# reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Als Fortsetzung des von

A. L. Crelle

gegründeten Journals

herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

**Schellbach, Kummer, Kronecker, Weierstrass**

von

**C. W. Borchardt.**

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preussischer Behörden.

---

**Acht und sechzigster Band.**

Zweites Heft.

---

Berlin, 1868.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

drique, qui passera toujours par les droites $b_2$, $c_{12}$; car, ces droites étant situées sur $O$, les plans $ib_2$, $ic_{12}$ touchent cette surface, quel que soit $i$, en des points appartenant aux mêmes droites $b_2$, $c_{12}$.

Soit $p$ le point $ABC$ où la droite $ol$ rencontre un plan fixe $A$ (passant par $a_1$). Si $ol$ tourne autour de $o$, le plan polaire de $p$ par rapport à la quadrique $(ABC)$ enveloppe l'hyperboloïde $J_A$. Or, comme les plans tangents de $O$ correspondent projectivement aux droites par $o$ (au plan qui touche $O$ en $l$ correspond la droite $ol$ et inversement), de même aux plans tangents de $J_A$ correspondront projectivement les droites par $o$, de la manière suivante. Un plan tangent de $J_A$ coupe $A$ suivant une droite, dont le pole $p$ par rapport à la conique $(A)$ détermine la droite correspondante $olp$. Réciproquement, une droite par $o$ rencontre $A$ en un point $p$; et par la droite polaire de $p$, par rapport à la conique $(A)$, il passera (outre $A$) un plan tangent de $J_A$, qui est le plan correspondant à la droite menée par $o$.

Les plans tangents de $J_A$ qui passent par le point $i$ enveloppent un cone qui coupera $A$ suivant une conique; la polaire réciproque de cette conique, par rapport à la conique $(A)$, est vue du point $o$ suivant un cone qui passe par les droites $b_2$, $c_{12}$, quel que soit $i$; à cause des deux plans menés par $i$ et par les droites polaires des points $a_1 b_2$, $a_1 c_{12}$ par rapport à la conique $(A)$ (137.). Ce cone et l'autre cone, formé par les droites $ol$ correspondantes aux plans tangents de $O$ qui passent par $i$, se couperont suivant deux droites (outre $b_2$ et $c_{12}$); c'est-à-dire que par un point quelconque $i$ passent deux couples de plans correspondants tangents à $O$ et $J_A$: où l'on dit ***correspondants*** deux plans qui correspondent à une même droite $ol$.

Soit $g$ la droite suivant laquelle se coupent deux plans tangents correspondants de $O$, $J_A$, savoir les plans polaires des points $o$ et $ABC$, par rapport à une même surface $(ABC)$; ou mieux, soit $g$ la réciproque de la droite $BC$ par rapport à la surface $(ABC)$, où le plan $A$ est donné arbitrairement. Il résulte de ce qui précède, que les droites $g$ correspondantes à toutes les couples possibles des plans $B$, $C$ ($g$ est indépendante de $A$) forment un tel système que par un point arbitraire $i$ de l'espace passent deux droites $g$.

**140.** Proposons-nous maintenant de trouver les points de l'espace pour lesquels les deux droites $g$ coïncident.

Si la droite $ol$ est tangente en $l$ à la surface cubique $F_3$ et par suite à toute surface quadrique du faisceau $(BC)$, le plan polaire de $p$ par rapport

à cette quadrique passera par $l$; donc, parmi les plans tangents de $J_A$ menés par $l$, il y en a un, dont la droite correspondante est $olp$. Plaçons le point $i$ en $l$. Les plans tangents menés du point $o$ à la surface $O$ passent par les deux génératrices $lm$, $ln$ et ont leurs points de contact sur celles-ci; les droites correspondantes issues de $o$ forment donc deux plans, $olm$ et $oln$ (savoir $B$ et $C$). Or, au cone de sommet $l$, circonscrit à $J_A$, correspond un cone de sommet $o$ qui passe par $ol$, ainsi qu'on vient de le voir; donc les deux droites qui, pour un point quelconque $i$, résultent de l'intersection des deux cones de sommet $o$ (139.) se réduisent, dans ce cas, à la droite unique $ol$; c'est-à-dire que les points communs à $F_3$ et à $O$ sont tels que par chacun d'eux passe une seule droite $g$.

141. Le point $i$ soit, en second lieu, le sommet d'un cone quadrique passant par les coniques $(B)$, $(C)$. Comme le choix du plan $A$ pour la détermination de la droite $g$ est arbitraire, on peut supposer que ce plan passe par $i$. Alors, $i$ étant sur la droite réciproque de $BC$ (ou $olp$) par rapport à toute quadrique du faisceau $(BC)$, le plan polaire de $o$ relatif à la quadrique $(ABC)$ passera par $i$; de plus, le même plan polaire est tangent en $l$ à la surface $O$; donc, il passe par $i$ un plan tangent de $O$ dont le point de contact est $l$, et par suite la droite correspondante est $olp$.

Analoguement, $i$ est situé dans les plans polaires de tous les points de $ol$ par rapport à la quadrique $(ABC)$; c'est pourquoi les points $i$, $p$ sont conjugués relativement à la conique $(A)$.

Quant à l'hyperboloïde $J_A$, ses plans tangents menés par $i$ coupent $A$ suivant des droites croisées en $i$, dont les poles par rapport à la conique $(A)$ se trouvent sur la polaire de $i$, qui est une droite passant par $p$. D'où il suit qu'au cone de sommet $i$ circonscrit à $O$ correspond un cone $K$ de sommet $o$, passant par $ol$; et au cone de sommet $i$ circonscrit à l'hyperboloïde $J_A$ correspond (outre le plan $a_1 b_2 c_{12}$) un plan $E$ passant par $op$ et par la droite polaire de $i$, par rapport à la conique $(A)$. Or, on peut démontrer que ce plan $E$ est tangent au cone $K$ suivant $op$.

En effet, le plan qui passe par $i$ et touche $O$ en $l$ contient un groupe harmonique de quatre droites, savoir les droites $lm$, $ln$, génératrices de la surface, la droite $li$ génératrice du cone circonscrit (de sommet $i$), et la droite $lj$ tangente en $l$ à la conique de contact (où $j$ soit la trace de cette droite sur le plan $A$). En projetant du point $o$ sur le plan $A$ ces quatre droites

harmoniques, on a les droites $p(u, v, i, j)$ *) qui formeront de même un groupe harmonique. Mais d'un autre côté, la couple de plans $BC$, le cone $(BC)$ et la quadrique $(ABC)$ appartiennent à un même faisceau; donc, la conique $(A)$ doit passer par les quatre points où les droites intersections du cone avec $A$ rencontrent les droites $AB$ et $AC$ (savoir $pu$ et $pv$); c'est pourquoi la droite polaire de $i$ par rapport à la conique $(A)$ est la conjuguée harmonique de $pi$, par rapport aux droites $pu$, $pv$: en d'autres termes, la droite $pj$ est la polaire de $i$ par rapport à la conique $(A)$.

Donc, le plan $E$ est tangent au cone $K$ suivant $op$; et par conséquent le point $i$ est tel qu'il est situé sur une seule droite $g$.

142. La droite $g$, réciproque de la droite $BC$ par rapport à toute surface du faisceau $(BC)$, est située (137.) sur les hyperboloïdes $J_B$ et $J_C$. Inversement, $J_B$ est le lieu de la droite réciproque de $BC$ (où $B$ est fixe et et $C$ variable) par rapport aux surfaces du faisceau $(BC)$, et aussi le lieu de la droite réciproque de $BA$ (où $B$ est fixe et $A$ variable) par rapport aux surfaces $(BA)$. Et de même pour $J_C$. Or, on a démontré qu'il passe par tout point de l'espace deux droites $g$, réciproques de $BC$, et analoguement deux droites réciproques de $CA$, et deux droites réciproques de $AB$; donc, par tout point de l'espace on peut faire passer deux hyperboloïdes $J_A$, deux hyperboloïdes $J_B$ et deux hyperboloïdes $J_C$. Et de ce qui précède il résulte que, si $i$ est le sommet d'un cone quadrique coupant $F_3$ en trois coniques $(A)$, $(B)$, $(C)$, par $i$ il passe une seule droite réciproque de $BC$, et de même une seule droite réciproque de $CA$ et une seule droite réciproque de $AB$; donc par $i$ il passe un seul hyperboloïde $J_A$, un seul hyperboloïde $J_B$ et un seul hyperboloïde $J_C$. C'est-à-dire que le lieu des sommets des cones quadriques qui coupent la surface cubique $F_3$ suivant trois coniques $(A)$, $(B)$, $(C)$ coïncide avec l'enveloppe des hyperboloïdes de chacune des trois séries $J_A$, $J_B$, $J_C$. Ce lieu passe par les trois courbes gauches (du quatrième ordre) suivant lesquelles $F_3$ est coupée par les quadriques polaires des points $o$, $u$, $v$ (140.).

Vu que ce lieu a la propriété que par chacun de ses points il passe une seule surface enveloppée de chaque série, il s'ensuit que l'enveloppe et l'enveloppée se touchent partout où elles se rencontrent. La courbe de con-

*) $u$, $v$ désignent les points $a_1b_4$, $a_1c_{11}$.

tact est l'intersection de deux enveloppées successives, et est par suite du quatrième ordre: donc l'enveloppe est une surface du quatrième ordre; les courbes de contact de deux enveloppées de la même série sont situées sur une même surface du second ordre; etc.*).

143. Considérons maintenant le faisceau des surfaces quadriques $S$ qui passent par la courbe gauche du quatrième ordre, intersection de $F_3$ avec $O$, première polaire de $o$. Deux surfaces $S$ couperont de nouveau la surface cubique suivant deux coniques; la droite commune aux plans de ces coniques, ayant quatre points communs avec $F_3$ (les quatre points où cette droite rencontre les deux coniques), sera située tout entière dans cette surface. Or, une des surfaces $S$ est la quadrique $O$, pour laquelle la conique résultante est la couple de droites $b_2$, $c_{12}$; et la droite où le plan de celles-ci coupe de nouveau $F_3$ est $a_1$; donc, les surfaces $S$ coupent $F_3$ suivant des coniques dont les plans passent par la droite $a_1$. Et réciproquement, tout plan $A$, mené par $a_1$, rencontrera $F_3$ suivant une conique située dans une surface $S_A$ du faisceau qu'on considère. Les plans $A$ et les quadriques $S_A$ forment évidemment deux faisceaux projectifs, propres à engendrer la surface donnée $F_3$ (111.).

Les plans polaires du point $o$ par rapport aux quadriques $S$ font un faisceau projectif à celui de ces quadriques; le lieu des coniques de contact des quadriques $S$ avec les cones circonscrits de sommet $o$ sera donc (112.) une surface $\mathfrak{Z}$ du troisième ordre, passant par la base du faisceau $(S)$ et par les droites $b_2$, $c_{12}$ (qui forment l'intersection de $O$ par le plan polaire correspondant). En outre, la courbe-base du faisceau $(S)$ sera l'intersection de $\mathfrak{Z}$ avec la première polaire de $o$ par rapport à $\mathfrak{Z}$, savoir avec la quadrique $S$ $(\equiv O)$ qui passe par $o$; donc les surfaces cubiques $\mathfrak{Z}$, $F_3$ se touchent suivant une courbe gauche du quatrième ordre et se coupent en deux droites; c'est pourquoi elles se confondront en une seule et même surface. C'est-à-dire que toute quadrique $S_A$ coupe $F_3$ suivant une conique dont le plan $A$ est le plan polaire du point $o$ par rapport à $S_A$: en d'autres termes, la surface cubique $F_3$ est le lieu des courbes de contact entre les quadriques $S$ et les cones circonscrits de sommet $o$. Il résulte d'ici que les sommets des quatre cones du faisceau $S$ sont situés en $F_3$, et que les plans tangents à cette surface en ces quatre points sont des plans tritangents passant par $a_1$.

---

*) [*Teoria geom. delle superficie*, 47.]

144. Si $A$ et $B$ sont deux plans donnés (passant par $a_i$ et $b_i$ resp.), les quadriques $(AB)$ forment un faisceau auquel appartient la couple des plans $A$, $B$. Le lieu des courbes de contact entre ces quadriques et les cones circonscrits de sommet $o$ est, d'après un théorème général (112.), une surface cubique; mais, pour la quadrique composée des plans $A$, $B$, on peut regarder la courbe de contact comme épanchée sur le plan $B$; ce plan appartient donc tout entier à la surface cubique. C'est-à-dire que celle-ci se réduira au plan $B$ et à une surface quadrique $\Sigma$, contenant la conique $(A)$ et les coniques d'intersection des surfaces $(AB)$ avec les plans polaires de $o$.

D'ailleurs, la base du faisceau $(AB)$ doit être la courbe d'intersection de la surface cubique $B\Sigma$ avec la première polaire de $o$ par rapport à cette surface, donc $A$ est le plan polaire de $o$ par rapport à $\Sigma$. Il en résulte, de plus, que $\Sigma$ passe par les sommets des deux cones du faisceau $(AB)$ et y est touchée par deux plans, qui font partie du faisceau des plans polaires de $o$ et (par suite) se coupent suivant une droite située dans le plan $B$.

D'après cela, les surfaces $\Sigma$ et $S_A$ passent ensemble par la conique $(A)$, et ont $A$ pour plan polaire du point $o$. Or, si du point $o$ on mène les tangentes à la conique $(B)$, les points de contact seront situés en $\Sigma$, car ils doivent appartenir à une quadrique quelconque du faisceau $(AB)$ et au plan polaire de $o$, correspondant. Mais ces mêmes points appartiennent aussi à la courbe de contact de $F_3$ avec le cone circonscrit de sommet $o$, et par suite à $S_A$; donc les quadriques $\Sigma$ et $S_A$ ne font qu'une seule et même surface. C'est-à-dire que $S_A$ est le lieu des courbes de contact de toutes les quadriques $(ABC)$ (où $A$ est fixe) avec les cones circonscrits de sommet $o$; et par conséquent $S_A$ contient les sommets de tous les cones du système $(ABC)$, où $A$ soit fixe.

Si le plan $A$ est donné, les sommets des cones $(ABC)$ sont donc situés dans chacune des surfaces $S_A$ et $J_A$ (137.); ainsi le lieu de ces sommets est la courbe gauche du quatrième ordre, intersection de ces deux quadriques. Et si l'on fait varier $A$, le lieu de cette courbe gauche, commune aux deux surfaces correspondantes $S_A$ et $J_A$, sera la surface du quatrième ordre (lieu complet des sommets de tous les cones $(ABC)$), que nous avons déjà trouvée comme enveloppe des hyperboloïdes $J$. Naturellement, la même surface du quatrième ordre est aussi le lieu de la courbe gauche du quatrième ordre commune à deux surfaces correspondantes $S_B$ et $J_B$, ou $S_C$ et $J_C$; $S_B$ et $S_C$ ayant par

rapport aux points $u$, $v$ et aux plans $B$, $C$ la même signification que $S_A$ par rapport au point $o$ et au plan $A$ *).

145. Considérons de nouveau les trois droites $a_1$, $b_2$, $c_{12}$ situées dans un même plan tritangent. Soient $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ deux plans passant par $a_1$, $b_2$ resp. et coupant la surface $F_3$ suivant deux coniques tangentes à $a_1$, $b_2$ aux points $\alpha$, $\beta$. Les quadriques du faisceau $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ rencontrent le plan $a_1 b_2$ suivant des coniques ayant un double contact aux points $\alpha$, $\beta$; et réciproquement, toute conique touchée en $\alpha$, $\beta$ par les droites $a_1$, $b_2$ sera la trace d'une surface du faisceau. Or, parmi ces coniques il y a la conique infiniment aplatie $(\alpha\beta)^2$ formée par la corde de contact estimée deux fois; dans le faisceau $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ il y a donc un cone tangent au plan $a_1 b_2$ suivant la droite $\alpha\beta$. Cette droite rencontre $c_{12}$ en un point $\gamma$; en ce point, $c_{12}$ sera tangente à ce cone et, par suite, aussi à une conique située simultanément en $F_3$, dans le cone et dans un plan $C$ (par $c_{12}$). Donc, les six points où les droites $a_1$, $b_2$, $c_{12}$ touchent la courbe parabolique de $F_3$ (109.) sont distribués, trois à trois, sur quatre droites qui sont les génératrices de contact du plan $a_1 b_2 c_{12}$ avec quatre cones quadriques lesquels contiennent, trois à trois, les six coniques $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{C})$ tangentes aux droites $a_1$, $b_2$, $c_{12}$, aux points susdits. Les deux points analogues à $\alpha$ sont les éléments doubles d'une involution, dans laquelle les points $a_1 b_2$, $a_1 c_{12}$ sont conjugués (109.); donc les droites $a_1$, $b_2$, $c_{12}$ sont les diagonales du quadrilatère formé par les quatre droites $\alpha\beta\gamma$.

Il y a un second cone qui passe par les coniques $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$, outre celui qui touche le plan $a_1 b_2$ suivant $\alpha\beta\gamma$. Les plans tangents communs aux deux coniques enveloppent ces deux cones; le sommet du nouveau cone sera donc le point commun aux trois plans suivants: le plan $a_1 b_2$, le plan des droites tangentes qu'on peut mener du point $a_1 b_2$ aux deux coniques (outre $a_1$, $b_2$), et le plan des droites polaires de ce même point par rapport aux deux coniques.

Représentons les quatre cones tangents au plan $a_1 b_2$ et les six coniques suivant lesquelles ils coupent la surface $F_3$, par la notation suivante:

$$\mathfrak{K} \equiv (\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}), \quad \mathfrak{K}' \equiv (\mathfrak{A}\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'), \quad \mathfrak{K}'' \equiv (\mathfrak{A}'\mathfrak{B}\mathfrak{C}'), \quad \mathfrak{K}''' \equiv (\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}).$$

Les cones $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$ se coupent suivant la conique $(\mathfrak{A})$ et, par suite, suivant une autre conique (non située en $F_3$); ils auront donc deux plans tangents communs, dont l'un est $a_1 b_2 c_{12}$; l'autre soit $\pi$. Ce plan $\pi$ est tangent

*) Chacun des 45 plans tritangents donne lieu à une surface analogue du 4^e^ ordre.

aux cinq coniques $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{C})$, $(\mathfrak{B}')$, $(\mathfrak{C}')$, situées en $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$; donc, il sera tangent aussi aux cones $\mathfrak{K}''$ et $\mathfrak{K}'''$. Ces quatre cones $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$, $\mathfrak{K}''$, $\mathfrak{K}'''$ ont, par conséquent, deux plans tangents communs, $a_1 b_2 c_{12}$ et $\pi$; d'où il résulte que leurs sommets sont alignés sur une seule et même droite (l'intersection des plans $a_1 b_2 c_{12}$ et $\pi$).

146. Passons à considérer les coniques $(A)$, $(B)$, $(C)$ qui se décomposent en lignes droites.

Parmi les plans $A$ il y en a quatre (outre $a_1 b_2 c_{12}$) qui coupent $F_3$ suivant des couples de droites; et de même pour les plans $B$ et $C$. Si nous considérons le plan $A$ qui contient les droites $b_3 c_{13}$ et le plan $B$ qui contient $a_3 c_{32}$, les coniques $(b_3 c_{13})$, $(a_3 c_{32})$ doivent se couper en deux points (135.) sur la droite $AB$; donc $b_3$ rencontre $c_{32}$, et $c_{13}$ rencontre $a_3$. Les plans $b_3 c_{32}$, $a_3 c_{13}$ couperont $F_3$ suivant deux droites nouvelles, $a_2$ et $b_1$. Or, des neuf droites $(a_1 b_2 c_{12})$ $(a_2 b_3 c_{23})$ $(a_3 b_1 c_{13})$ qui résultent de l'intersection de $F_3$ par trois plans, il y en a trois $a_1 b_3 c_{13}$ dans le plan $A$, et trois autres $a_3 b_2 c_{32}$ dans le plan $B$; donc, les trois droites restantes $a_2 b_1 c_{12}$ seront dans un même plan $C$.

Il résulte d'ici que les 24 droites, situées dans les 12 plans tritangents qui passent par $a_1$, $b_2$, $c_{12}$ (outre $a_1 b_2 c_{12}$), sont aussi distribuées en 16 couples d'autres plans tritangents: chacune de ces couples étant déterminée par deux plans (tritangents) $A$ et $B$ choisis arbitrairement. Au moyen de ces deux plans, est déterminé aussi un plan correspondant $C$.

Si nous concevons trois plans $A$, $B$, $C$ coupant $F_3$ suivant six droites (outre $a_1$, $b_2$, $c_{12}$) qui ne soient pas placées dans une couple de plans, ces six droites appartiendront (136.) à un hyperboloïde $(ABC)$ du système considéré ci-dessus. Chacun des quatre plans $A$ peut être combiné avec chacun des quatre plans $B$ et avec chacun des quatre plans $C$; mais il faut excepter les 16 combinaisons qui donnent six droites placées sur deux plans; le système des quadriques $(ABC)$ contient donc $4.4.4-16=48$ hyperboloïdes $H$, chacun desquels rencontre la surface cubique $F_3$ suivant six droites.

Des six droites communes à $F_3$ et à un hyperboloïde $H$, trois appartiennent à un même système de génératrices de celui-ci, et les trois restantes à l'autre système*); on peut donc, de six manières différentes, distribuer ces

*) Une surface cubique ne peut jamais contenir quatre droites d'un hyperboloïde, d'un même système de génération; car toute génératrice de l'autre système aurait quatre points communs avec la surface cubique, et dès lors serait située entièrement sur celle-ci.

droites en trois couples telles que les droites de chaque couple soient dans un plan. Chaque manière donne trois plans contenant les six droites et coupant $F_3$ suivant trois droites nouvelles, qui seront dans un même plan, car les six premières droites appartiennent à une surface du second ordre. Tout hyperboloïde $H$ fait donc partie de six systèmes de quadriques, analogues à celui des surfaces ($ABC$) fourni par le plan $a_1 b_2 c_{12}$. Le nombre de ces systèmes est 45, chaque système correspondant à un plan tritangent; donc le nombre total des hyperboloïdes qui rencontrent $F_3$ suivant six droites est $\frac{48 . 45}{6} = 360$.

147. Un hyperboloïde $H$ est déterminé par trois droites (de $F_3$) qui ne se rencontrent pas. Or, trois droites (de $F_3$) qui ne se rencontrent pas sont coupées par trois autres droites qui de même ne s'entrecoupent pas (116.); ces six droites formeront donc l'intersection de $H$ et $F_3$. C'est-à-dire que tout hyperboloïde coupant $F_3$ suivant trois droites qui ne se rencontrent pas, coupe la même surface suivant trois autres droites.

Il y a donc 2.360 groupes de trois droites (de $F_3$) qui n'ont aucun point d'intersection; ces groupes sont conjugués deux à deux; les droites d'un groupe rencontrent les droites du groupe conjugué; et les six droites de deux groupes conjugués appartiennent à un seul et même hyperboloïde.

## Chapitre dixième.

## Propriétés diverses.

148. Soient $T$, $T'$ deux plans tritangents (de la surface cubique $F_3$) qui se rencontrent suivant une droite non placée sur $F_3$; et soient $a_1 b_2 c_{12}$, $a_2 b_3 c_{23}$ les droites de la surface comprises dans ces plans. Dès que la droite $TT'$ coupe $F_3$ en trois points seulement, ces points seront communs aux couples de droites $a_1 b_3$, $b_2 c_{23}$, $a_2 c_{12}$. Les plans $a_1 b_3$, $b_2 c_{23}$, $a_2 c_{12}$ rencontreront $F_3$ suivant trois nouvelles droites $c_{13}$, $a_3$, $b_1$ resp., qui seront dans un même plan, car de ces neuf droites résultantes de l'intersection de $F_3$ avec trois plans, il y en a six placées sur deux autres plans $T$, $T'$.

Ainsi les triangles $a_1 b_2 c_{12}$, $a_2 b_3 c_{23}$ en déterminent quatre autres, et les côtés de ces six triangles sont les intersections mutuelles de deux groupes de trois plans, c'est-à-dire, des faces de deux trièdres, que nous dirons *conjugués*.

Deux plans tritangents quelconques, dont la droite d'intersection ne soit pas située sur $F_3$, peuvent servir de faces à un trièdre; la troisième face en résulte déterminée. Ces trois plans contiennent neuf droites qui se coupent en neuf points communs à $F_3$ et aux arêtes du trièdre. Ces mêmes neuf droites sont distribuées dans trois autres plans, qui forment le trièdre conjugué.

On a déjà vu (146.) qu'en considérant les trois droites $a_1 b_2 c_{12}$ situées dans un plan $T$, les autres 24 droites de $F_3$ sont distribuées en 16 couples de plans. Chaque couple forme avec $T$ un trièdre, c'est-à-dire que chaque plan $T$ entre en 16 trièdres. Et, vu que chaque trièdre contient trois plans tritangents, le nombre total des trièdres sera $\frac{45.16}{3} = 240$. Ces trièdres sont conjugués deux à deux; il y a donc 120 couples de trièdres conjugués.

149. Les neuf droites $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_{23} \\ a_2 & b_2 & c_{31} \\ a_3 & b_3 & c_{12} \end{vmatrix}$ sont placées, ainsi qu'on vient de le démontrer, sur six plans tritangents qui forment deux trièdres conjugués. Par chacune de ces droites on peut faire passer trois autres plans tritangents; il y a donc 27 plans, chacun desquels contient une des neuf droites et dès lors deux autres droites; c'est-à-dire que les autres 18 droites sont distribuées, deux à deux, dans ces 27 plans, de sorte que ces plans passeront $\frac{2.27}{18} = 3$ fois par chacune des 18 droites. Il reste encore $45 - 6 - 27 = 12$ plans, qui contiendront exclusivement ces 18 droites, chacune deux fois.

Or, chacune des trois droites $a_1$, $b_2$, $c_{12}$, situées dans un même plan, doit rencontrer (au dehors des droites de la matrice ci-dessus) six droites non coupées par les deux autres; donc, les 18 droites sont rencontrées par l'une ou par l'autre des droites $a_1$, $b_2$, $c_{12}$. Et d'ailleurs, trois droites, ainsi que $a_1$, $b_1$, $c_{23}$, qui ne se coupent pas, sont rencontrées par les trois mêmes droites; et pareillement $a_1$, $a_2$, $a_3$, etc. Donc, on peut distribuer les 18 droites en deux matrices nouvelles $\begin{vmatrix} b_4 & a_4 & c_{56} \\ b_5 & a_5 & c_{64} \\ b_6 & a_6 & c_{45} \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} c_{14} & c_{24} & c_{34} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} \end{vmatrix}$, tellement que

les droites d'une ligne verticale de la première matrice rencontrent les droites de la ligne verticale correspondante de la seconde matrice, et les droites d'une ligne horizontale de la première matrice rencontrent les droites de la ligne verticale correspondante de la troisième matrice. Alors il est aisé de constater 1°. que les droites d'une ligne horizontale de la deuxième matrice rencontrent les droites de la ligne horizontale correspondante de la troisième matrice; 2°. que les neuf droites de chacune des deux dernières matrices sont les intersections des faces de deux trièdres conjugués.

Donc, chaque couple de trièdres conjugués détermine deux autres couples, de manière que les trois couples contiennent (deux fois) toutes les 27 droites. Naturellement, le nombre de ces groupes de trois couples de trièdres conjugués est $\frac{120}{3} = 40$.

150. Les 240 trièdres ont $3.240 = 720$ arêtes $k$, et 240 sommets $t$. Chaque arête $k$ rencontre la surface $F_3$ en trois points $\delta$, intersections de couples de droites de la surface. On peut donc dire que les 135 points $\delta$, sommets des 45 triangles formés par les 27 droites sur les plans tritangents, sont distribués, trois à trois, sur 720 droites $k$ qui se coupent, trois à trois, en 240 points $t$. Les mêmes 135 points sont allignés, dix à dix, sur les 27 droites de $F_3$.

Considérons le point $\delta$ commun aux droites $a_1$, $b_2$. Par chacune de ces droites passent, outre le plan $a_1 b_2$, quatre autres plans tritangents et dès lors 16 droites $k$. Tout point $\delta$ est donc situé sur 16 droites $k$.

Le plan $a_1 b_3 c_{13}$ coupe les quatre plans tritangents qui passent par $b_2$ (excepté $a_1 b_2$), suivant quatre droites $k$, qui rencontreront $b_3$ et $c_{13}$ en huit points $\delta'$, $\delta''$; dans chacune de ces quatre droites $k$ concevons pris le point $\lambda$, conjugué harmonique de $\delta$ relativement à $\delta'\delta''$. Les quatre points $\lambda$ appartiendront à la droite polaire du point $\delta$ par rapport à la conique composée des droites $b_3 c_{13}$; et ils appartiendront aussi à la quadrique polaire de $\delta$ (par rapport à $F_3$). Les 16 points $\lambda$, correspondants aux 16 droites $k$ issues de $\delta$, sont donc distribués, quatre à quatre, sur quatre droites situées dans quatre plans passant par $a_1$, et dès lors aussi sur quatre autres droites situées dans quatre plans passant par $b_2$; et toutes ces huit droites sont des génératrices d'un seul et même hyperboloïde, qui est la quadrique polaire du point $\delta$. Cette quadrique passe évidemment par les droites $a_1$ et $b_2$.

151. Soit $t$ le sommet d'un trièdre formé par trois plans tritangents (150.). La quadrique polaire de $t$ (par rapport à $F_3$) coupera ces plans suivant les coniques polaires de $t$, relatives aux triangles formés par les droites (de $F_3$) contenues dans ces mêmes plans, c'est-à-dire, suivant des coniques circonscrites à ces triangles, respectivement. Or, ces triangles résultent de l'intersection des trois plans considérés avec les faces du trièdre conjugué (148.); donc les arêtes de ce trièdre rencontreront, chacune en trois points, la quadrique polaire de $t$: en d'autres termes, la quadrique polaire de $t$ est un cone circonscrit au trièdre conjugué. Ainsi, les sommets de deux trièdres conjugués sont deux points correspondants de la Hessienne (72.).

152. On a démontré ailleurs que toute droite située sur $F_3$, comme $a_1$, est une tangente double de la Hessienne (60.), et que les points de contact, $\alpha$, $\alpha'$, sont les points doubles de l'involution marquée sur $a_1$ par les coniques, suivant lesquelles $F_3$ est coupée par les plans bitangents passant par $a_1$. Dès que la droite $a_1$ est placée sur $F_3$, la quadrique polaire de tout point de cette droite passe par la même droite; donc les sommets des cones polaires de $\alpha$, $\alpha'$ sont situés sur $a_1$. Or, ces sommets sont aussi des points de la Hessienne: donc $\alpha'$ est le sommet du cone polaire de $\alpha$, et inversement; c'est-à-dire que les points $\alpha$, $\alpha'$ sont deux points correspondants de la Hessienne.

153. Un plan $E$, donné arbitrairement, coupe la surface fondamentale $F_3$ suivant une courbe $C_3$ du troisième ordre. Le plan $M$ qui est tangent à $F_3$ en un point $m$ de $C_3$, et le plan polaire de $m$ par rapport à la Hessienne se rencontrent suivant une droite, qui perce $F_3$ aux points $xyz$ d'inflexion de la section de cette surface par le plan $M$ (89.). Quel est le lieu des droites $mx$, $my$, $mz$, si $m$ se déplace sur $C$? Premièrement, la courbe $C_3$ est triple pour ce lieu, car tout point $m$ de ce lieu est commun à trois génératrices $mx$, $my$, $mz$. Secondement, cherchons combien de génératrices tombent dans le plan $E$. Les plans polaires des points $m$, par rapport à la Hessienne, rencontrent $E$ suivant des droites l'enveloppe desquelles est de la 9^e classe (14.); les tangentes de cette enveloppe correspondent, une à une, aux tangentes de $C_3$ (car les unes et les autres correspondent aux points de cette courbe); et l'ordre du lieu du point commun à deux tangentes correspondantes, d'après un théorème connu*), est égal à la somme des classes des deux enveloppes,

*) [*Teoria geom. delle curve piane*, 83^a.]

savoir $9+6=15$. Pour ce lieu, les 12 points communs à $C_3$ et à la Hessienne sont doubles, car en chacun de ces points se rencontrent deux tangentes (successives) de $C_3$ et les tangentes correspondantes de l'enveloppe de la 9^e^ classe. Le lieu du 15^e^ ordre coupera donc $C_3$ en $3.15-2.12=21$ autres points, chacun desquels est évidemment un point analogue aux points $xyz$. Il s'ensuit que le plan $E$ contient 21 droites analogues aux $mx$, $my$, $mz$; et dès lors, le lieu de ces droites sera une surface de l'ordre $3.3+21=30$.

Ce lieu rencontre une droite quelconque $G$ en 30 points; d'où il résulte que, si le point $m$ parcourt la surface $F_3$, à condition qu'une des droites $mx$, $my$, $mz$ coupe la droite donnée $G$, le lieu de $m$ est une courbe gauche du 30^e^ ordre.

Cette courbe gauche, quelle que soit $G$, passe par les 135 points $\delta$ où se coupent, deux à deux, les 27 droites de la surface fondamentale. En effet, si nous considérons le plan tritangent qui contient les droites $a_1$, $b_2$, $c_{12}$, le plan polaire du point $a_1b_2$ par rapport à la Hessienne passe par $c_{12}$ *), et toute droite menée par ce point à couper $c_{12}$ est une droite analogue à $mx$. Or, le plan $a_1b_2c_{12}$ rencontre une droite quelconque $G$, donc la courbe gauche du 30^e^ ordre, relative à cette droite, passe par le point $a_1b_2$. Conséquemment la courbe gauche, dont il s'agit, coupe en dix points chacune des 27 droites de $F_3$.

Il résulte de là que, si l'on représente la surface cubique sur un plan, de la manière qui a été exposée ailleurs (119.), la courbe plane qui représentera la courbe gauche d'ordre 30, relative à $G$, sera de ce même ordre 30, et passera dix fois par chacun des points fondamentaux, en y touchant les lignes correspondantes aux droites $b$ et $c$ de $F_3$. Donc (121., 133.) la courbe gauche est l'intersection complète de $F_3$ par une surface du 10^e^ ordre.

Il y a donc un nombre infini de surfaces du 10^e^ ordre, qui passent par les 135 points $\delta$. Le système complet de ces points est donné par l'intersection de l'une quelconque de ces surfaces avec les 27 droites de $F_3$.

---

*) Cela résulte du théorème général (89.), et aussi de l'observation suivante. Les quatre intersections de la Hessienne avec la droite $a_1$ sont réunies en deux points $\alpha$, $\alpha'$ de contact, et par conséquent le centre harmonique de ces quatre intersections, par rapport au pole $a_1b_2$, coïncide avec le point $a_1c_{12}$ conjugué harmonique de $a_1b_2$ par rapport aux points $\alpha$, $\alpha'$. De même pour la droite $b_2$, donc etc.

154. Nous allons maintenant exposer une propriété de la section de la Hessienne par un plan quelconque $E$.

Ce plan coupe la surface fondamentale $F_3$ suivant une cubique $C_3$; soit $o$ un des poles de $E$, par rapport à $F_3$, non situés sur $E$. Dès que le cone $oC_3$ coupe $F_3$ suivant la courbe plane $C_3$, il rencontrera cette même surface suivant une courbe gauche du sixième ordre, placée sur une surface quadrique $\Phi_2$ (11. *note*). La surface $F_3$ appartenant au faisceau déterminé par le cone $oC_3$ et par le lieu composé $E\Phi_2$, la quadrique polaire d'un point quelconque $i$, relative à $F_3$, passera par l'intersection du cone polaire $oC_2$, relatif au cone $oC_3$, avec la quadrique polaire relative à $E\Phi_2$. Si $i$ est pris dans le plan $E$, la quadrique polaire de $i$, relativement à $E\Phi_2$, sera le système de deux plans, dont l'un est $E$, et l'autre $\Phi_1$ est le plan polaire de $i$ par rapport à $\Phi_2$. Donc la quadrique polaire de $i$, par rapport à $F_3$, passera par les deux coniques d'intersection du cone $oC_2$ avec les plans $E$ et $\Phi_1$. La première de ces coniques est évidemment $C_2$, première polaire de $i$ par rapport à $C_3$; et l'autre conique sera une couple de droites, parce que le plan $\Phi_1$ passe par $o$*). Or, si le plan $\Phi_1$ était tangent au cone $oC_2$, la quadrique polaire de $i$ relativement à $F_3$ serait un cone, et dès lors $i$ appartiendrait à la Hessienne. Donc, la courbe d'intersection de la Hessienne avec le plan $E$ est le lieu d'un point dont le plan polaire relatif à la quadrique $\Phi_2$ est tangent à la conique polaire relative à la cubique $C_3$.

On démontre de la manière suivante que ce lieu est du quatrième ordre. Les coniques polaires des points d'une droite $G$ (en $E$) par rapport à $C_3$, et les droites polaires des mêmes points par rapport à la conique $(E\Phi_2)$ forment deux faisceaux projectifs, qui engendrent une cubique passant par le pole de $G$, relatif à la conique $(E\Phi_2)$. Par ce pole on peut mener quatre tangentes à la cubique, donc il y a quatre droites du deuxième faisceau qui sont tangentes aux coniques correspondantes de l'autre faisceau; c'est pourquoi $G$ contiendra quatre points du lieu.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

*) Le plan polaire de $o$ par rapport au cone $oC_3$ étant indéterminé, $o$ a le même plan polaire $E$ par rapport à $F_3$ et au lieu composé $E\Phi_2$. Le plan $E$ est donc le polaire de $o$ par rapport à $\Phi_2$, et dès lors le plan polaire d'un point quelconque de $E$, par rapport à cette même quadrique, passera par $o$.

## Chapitre onzième.

## Classification des surfaces du troisième ordre, eu égard à la réalité des vingt-sept droites.

155. On a démontré que par les 27 droites d'une surface (générale) $F_3$ du troisième ordre on peut faire passer 120 couples de trièdres conjugués (148.), et que réciproquement, si deux trièdres conjugués et un point de la surface sont donnés, la surface peut être construite (110.). D'où il résulte qu'abstraction faite de la réalité des éléments donnés ou cherchés, il est possible d'obtenir une surface cubique quelconque, à l'aide de deux trièdres, par le procédé exposé ailleurs (110.). Nous nous proposons maintenant d'avoir égard à la réalité ou non-réalité des 27 droites d'une surface cubique réelle. Cherchant à former les deux trièdres propres à engendrer cette surface, nous serons naturellement conduits à la classification des surfaces cubiques (générales) réelles (d'après la méthode de M. Schläfli).

Pour construire deux trièdres conjugués qui forment un ensemble réel, il suffit de trouver (148.) deux plans tritangents $T$, $T'$, réels ou imaginaires conjugués, qui se coupent suivant une droite (nécessairement réelle) non située sur la surface. Les trois droites de la surface contenues en $T$ et les trois droites contenues en $T'$ se coupent, deux à deux, aux trois points où la droite $TT'$ perce la surface, et déterminent de cette manière trois plans $\mathfrak{T}\mathfrak{T}'\mathfrak{T}''$, qui seront tous réels, ou bien l'un réel et les deux autres imaginaires conjugués, ainsi que les trois points susdits. Chacun de ces plans $\mathfrak{T}$ coupe la surface suivant une autre droite, et ces trois droites nouvelles sont placées dans un seul et même plan réel $T''$. Alors, les ternes de plans $TT'T''$, $\mathfrak{T}\mathfrak{T}'\mathfrak{T}''$ formeront les trièdres demandés.

Or je dis que, la surface étant supposée réelle, il est toujours possible de trouver deux plans tritangents $T$, $T'$ qui satisfassent à la condition prescrite. Cela est évident quand les 27 droites sont toutes réelles; supposons donc qu'il y ait des droites imaginaires, qui seront nécessairement conjugées deux à deux.

Premièrement, soient $a_1$, $b_3$ deux droites imaginaires conjugées situées dans un même plan *), qui sera réel, auquel cas passeront par $a_1$ quatre autres plans, imaginaires, et par $b_3$ leurs conjugués. Deux plans conjugués (l'un par

*) Entendez toujours *plan tritangent*.

$a_1$ et l'autre par $b_3$) satisfont évidemment à la question; car la droite commune à ces plans ne peut pas être située sur la surface; autrement il y aurait trois droites croisées en un même point, qui serait double pour la surface.

Secondement, soient $b_2$, $b_3$ deux droites imaginaires conjuguées, non situées dans un même plan; et $a_1$, $a_4$, $a_5$, $a_6$, $c_{23}$ les cinq droites qui rencontrent celles-là, et qui formeront un ensemble réel: c'est pourquoi il y aura parmi celles-ci un nombre impair de droites réelles. Si ces cinq droites sont toutes réelles, il passera au moins un plan réel par chacune d'elles: or, parmi ces cinq plans réels, il est possible d'en choisir deux qui remplissent la condition requise. Soit, en effet, $a_1 b_4 c_{14}$ le plan réel par $a_1$; si le plan $c_{23} c_{15} c_{64}$ ou le plan $c_{23} c_{16} c_{45}$ était réel, on aurait déjà les deux plans cherchés. Si au contraire le seul plan $c_{23} c_{14} c_{56}$, par $c_{23}$, était réel, la droite $c_{14}$ étant placée sur deux plans réels serait réelle; donc $c_{56}$ est une droite réelle, et dès lors le plan $a_5 b_6 c_{56}$ sera réel. Ainsi les plans $a_1 b_4 c_{14}$, $a_5 b_6 c_{56}$ formeront la couple demandée.

Si, parmi les cinq droites qui rencontrent $b_2$, $b_3$ il y en a deux imaginaires conjuguées $a_1$, $c_{23}$, les plans $a_1 b_3$, $b_3 c_{23}$ seront imaginaires conjugués et se couperont suivant une droite non située sur la surface.

Concluons donc que toute surface (réelle, générale) du troisième ordre peut être engendrée à l'aide de deux trièdres, qui présentent un des trois cas suivants: 1°. les trièdres sont formés par six plans réels; 2°. un trièdre est complètement réel, tandis que l'autre est formé par un plan réel et deux plans imaginaires conjugués; 3°. chaque trièdre a un plan réel et deux plans imaginaires conjugués.

156. Premier cas. Les deux trièdres étant formés par six plans réels, ceux-ci se couperont suivant neuf droites réelles

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_{23} & c_{31} & c_{12}. \end{matrix}$$

L'hyperboloïde réel déterminé par les trois droites $b_1$, $b_2$, $b_3$ coupera la surface cubique suivant trois autres droites (147.) $a_4$, $a_5$, $a_6$, qui seront toutes réelles, ou l'une réelle et les deux autres imaginaires conjuguées. Distinguons ces deux cas.

*a.* Les droites $a_4$, $a_5$, $a_6$ sont réelles. Alors, les plans

$$\begin{matrix} b_1 a_4 & b_1 a_5 & b_1 a_6 \\ b_2 a_4 & b_2 a_5 & b_2 a_6 \\ b_3 a_4 & b_3 a_5 & b_3 a_6 \end{matrix}$$

donneront neuf autres droites réelles

$$\begin{matrix} c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{34} & c_{35} & c_{36} \end{matrix}$$

et les plans

$$\begin{matrix} c_{13}\,c_{24} & c_{13}\,c_{25} & c_{13}\,c_{26} \\ a_3\;c_{34} & a_3\;c_{35} & a_3\;c_{36} \end{matrix}$$

couperont la surface suivant six autres droites réelles

$$\begin{matrix} c_{56} & c_{46} & c_{45} \\ b_4 & b_5 & b_6\,. \end{matrix}$$

Dans ce cas, on a donc 27 droites réelles.

*b.* Soit $a_5$ une droite réelle, et $a_4$, $a_6$ imaginaires conjuguées. Les plans réels

$$b_1 a_5 \quad b_2 a_5 \quad b_3 a_5$$

donnent trois autres droites réelles

$$c_{15} \quad c_{25} \quad c_{35}$$

et les plans réels

$$c_{13}\,c_{25} \qquad a_3\,c_{35}$$

donnent deux autres droites réelles

$$c_{46} \quad b_5\,.$$

Les couples de plans imginaires conjugués

$$\begin{matrix} b_1 a_4 & b_1 a_6 \\ b_2 a_4 & b_2 a_6 \\ b_3 a_4 & b_3 a_6 \end{matrix}$$

donnent les couples de droites imaginaires conjuguées

$$\begin{matrix} c_{14} & c_{16} \\ c_{24} & c_{26} \\ c_{34} & c_{36} \end{matrix}$$

et les couples de plans imaginaires conjugués

$$\begin{matrix} a_1\;c_{14} & a_1\;c_{16} \\ c_{23}\,c_{14} & c_{23}\,c_{16} \end{matrix}$$

donnent deux autres couples de droites imaginaires conjuguées

$$\begin{matrix} b_4 & b_6 \\ c_{56} & c_{54}\,. \end{matrix}$$

On a donc 15 droites réelles et 15 plans réels: 3 plans réels

par chaque droite réelle, et 3 droites réelles dans chaque plan réel. Deux droites imaginaires conjuguées ne se coupent pas.

157. Deuxième cas. Un trièdre est tout à fait réel; l'autre a une face réelle, les deux autres étant imaginaires conjuguées. Les plans du premier trièdre seront rencontrés par la face réelle de l'autre suivant trois droites réelles

$$b_1 \quad c_{13} \quad a_3,$$

et par les faces imaginaires de ce même trièdre suivant trois couples de droites imaginaires conjuguées

$$\begin{matrix} b_2 & c_{23} \\ b_3 & a_1 \\ a_2 & c_{12}. \end{matrix}$$

Les hyperboloïdes, imaginaires conjugués, déterminés par les droites $(b_1, b_2, b_3)$, $(b_1, c_{23}, a_1)$ couperont la surface cubique suivant deux ternes de droites imaginaires $(a_4, a_5, a_6)$, $(c_{14}, c_{15}, c_{16})$, conjuguées deux à deux, qui déterminent trois plans $a_4 c_{14}$, $a_5 c_{15}$, $a_6 c_{16}$. Distinguons deux cas, suivant que ces trois plans sont tous réels, ou qu'un seul soit réel et les deux autres imaginaires conjugués.

*a.* Les trois plans sont réels, et par suite chacun d'eux contient deux droites conjuguées

$$\begin{matrix} a_4 & c_{14} \\ a_5 & c_{15} \\ a_6 & c_{16}. \end{matrix}$$

Les couples de plans imaginaires conjuguées

$$\begin{matrix} b_2 a_4 & c_{23} c_{14} \\ b_2 a_5 & c_{23} a_{15} \\ b_2 a_6 & c_{23} a_{16} \\ b_3 a_4 & a_1 c_{14} \\ b_3 a_5 & a_1 c_{15} \\ b_3 a_6 & a_1 c_{16} \end{matrix}$$

fournissent les six couples de droites imaginaires conjuguées

$$\begin{matrix} c_{24} & c_{56} \\ c_{25} & c_{64} \\ c_{26} & c_{45} \\ c_{34} & b_4 \\ c_{35} & b_5 \\ c_{36} & b_6, \end{matrix}$$

situées dans six plans réels, dont les trois premiers passent par $c_{13}$, et les trois autres par $a_3$.

Ainsi, dans ce cas, nous avons 3 droites réelles, et 13 plans réels, dont l'un contient les 3 droites réelles, et les autres passent, 4 à 4, par les 3 mêmes droites. Deux droites imaginaires conjuguées sont toujours dans un même plan (réel).

*b.* Les six droites imaginaires $a_4$, $a_5$, ... soient conjuguées de la manière suivante

$$a_4 \quad c_{14}$$
$$a_5 \quad c_{16}$$
$$a_6 \quad c_{15},$$

d'où il résulte que le plan $a_4 c_{14}$ est réel, mais $a_5 c_{15}$, $a_6 c_{16}$ sont deux plans imaginaires conjugués. Alors, les couples de plans imaginaires conjugués

$$b_2 a_4 \quad c_{23} c_{14}$$
$$b_3 a_4 \quad a_1\ c_{14}$$
$$b_2 a_5 \quad c_{23} c_{16}$$
$$b_3 a_5 \quad a_1\ c_{16}$$
$$b_2 a_6 \quad c_{23} c_{15}$$
$$b_3 a_6 \quad a_1\ c_{15}$$

donneront les six couples de droites imaginaires conjuguées

$$c_{24} \quad c_{56}$$
$$c_{34} \quad b_4$$
$$c_{25} \quad c_{45}$$
$$c_{35} \quad b_6$$
$$c_{26} \quad c_{64}$$
$$c_{36} \quad b_5,$$

dont les premières deux seulement sont formées par des droites qui se coupent, en déterminant les plans réels $c_{24} c_{56}$, $c_{34} b_4$, qui passent par $c_{13}$, $a_3$ resp.

Ce cas nous offre donc 3 droites réelles et 7 plans réels, dont l'un contient les 3 droites réelles, et les autres passent, 2 à 2, par les mêmes droites. Parmi les droites imaginaires, il y a 6 couples de droites conjuguées qui se coupent, et 6 couples de droites conjuguées qui ne se coupent pas.

158. Troisième cas. Chacun des deux trièdres a une face réelle et deux faces imaginaires conjuguées. La face réelle du premier trièdre coupe les faces de l'autre suivant une droite réelle

$$b_1$$

et deux droites imaginaires conjuguées

$$a_3 \quad c_{13}.$$

Le plan réel du second trièdre rencontre les faces imaginaires du premier suivant deux droites imaginaires conjuguées

$$a_2 \quad c_{12}.$$

Et les plans imaginaires des deux trièdres s'entrecoupent suivant deux couples de droites imaginaires conjuguées

$$\begin{matrix} b_2 & b_3 \\ a_1 & c_{23}, \end{matrix}$$

où les droites d'une même couple ne se rencontrent pas.

L'hyperboloïde réel déterminé par les droites $b_1$, $b_2$, $b_3$ coupera la surface cubique suivant trois droites nouvelles $a_4$, $a_5$, $a_6$, à propos desquelles il faut distinguer deux cas possibles.

*a.* Si les droites

$$a_4 \quad a_5 \quad a_6$$

sont toutes réelles, les plans réels

$$b_1 a_4 \quad b_1 a_5 \quad b_1 a_6$$

donneront trois autres droites réelles

$$c_{14} \quad c_{15} \quad c_{16}.$$

Les plans imaginaires conjugués

$$\begin{matrix} b_2 a_4 & b_3 a_4 \\ b_2 a_5 & b_3 a_5 \\ b_2 a_6 & b_3 a_6 \end{matrix}$$

fournissent les trois couples de droites imaginaires conjuguées

$$\begin{matrix} c_{24} & c_{34} \\ c_{25} & c_{35} \\ c_{26} & c_{36}, \end{matrix}$$

et les plans imaginaires conjugués

$$\begin{matrix} a_1 c_{14} & c_{23} c_{14} \\ a_1 c_{15} & c_{23} c_{15} \\ a_1 c_{16} & c_{23} c_{16} \end{matrix}$$

donneront trois autres couples de droites imaginaires conjuguées

$$\begin{matrix} b_4 & c_{56} \\ b_5 & c_{64} \\ b_6 & c_{45}. \end{matrix}$$

On obtient ainsi 7 droites réelles et 5 plans réels. Ces 5

plans passent par une même droite; il y en a 3 dont chacun contient 2 autres droites réelles, tandis que chacun des 2 autres plans contient 2 droites imaginaires conjuguées. Les droites imaginaires conjuguées des 8 autres couples ne se coupent pas.

*b.* Si

$$a_4$$

est une droite réelle, et

$$a_5 \quad a_6$$

deux droites imaginaires conjuguées, le plan réel $b_1 a_4$ donnera une troisième droite réelle

$$c_{14}$$

et les plans imaginaires conjugués

$$\begin{array}{ll} b_1 a_5 & b_1 a_6 \\ b_2 a_5 & b_3 a_6 \\ b_2 a_6 & b_3 a_5 \\ b_2 a_4 & b_3 a_4 \end{array}$$

donneront les quatre couples de droites imaginaires conjuguées

$$\begin{array}{ll} c_{15} & c_{16} \\ c_{25} & c_{36} \\ c_{26} & c_{35} \\ c_{24} & c_{34}. \end{array}$$

Les plans imaginaires conjugués

$$\begin{array}{ll} a_1 c_{14} & c_{23} c_{14} \\ a_1 c_{16} & a_{23} c_{15} \\ a_1 c_{15} & c_{23} c_{16} \end{array}$$

donnent enfin les trois couples de droites imaginaires conjuguées

$$\begin{array}{ll} b_4 & c_{56} \\ b_6 & c_{46} \\ b_5 & c_{45}. \end{array}$$

On retombe ainsi sur un cas déjà considéré (deuxième cas, *b.*).

159. Nous pouvons conclure que la surface générale du troisième ordre ne présente que cinq espèces différentes, eu égard à la réalité des 27 droites, savoir:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1e | espèce | — 27 | droites et | 45 | plans | réels |
| 2e | - | — 15 | - | 15 | - | - |
| 3e | - | — 7 | - | 5 | - | - |
| 4e | - | — 3 | - | 7 | - | - |
| 5e | - | — 3 | - | 13 | - | - . |

On peut demander, pour chaque espèce, le nombre des double-six qui sont formés par deux six réels ou imaginaires conjugués. En s'aidant du tableau donné ailleurs (117.), on trouve sans peine ce qui suit.

Première espèce. — Tout est réel.

Deuxième espèce. — Il y a 15 double-six réels, dont chaque six est réel et formé par 4 droites réelles et 2 droites imaginaires conjuguées. Il y a un autre double-six réel, dont les six sont imaginaires conjugués.

Troisième espèce. — Il y a 6 double-six réels, dont chaque six est réel et formé par 2 droites réelles et 2 couples de droites imaginaires conjuguées. Il y a 2 autres double-six réels, chacun desquels a deux six imaginaires conjugués.

Quatrième espèce. — Il y a un seul double-six réel et formé par deux six réels; chacun de ces six est l'ensemble de 3 couples de droites imaginaires conjuguées. Il y a en outre 3 double-six réels, formés par des six imaginaires conjugués.

Cinquième espèce. — Il n'y a pas de six réels; mais seulement 12 double-six réels, chacun étant une couple de six imaginaires conjugués.

160. On a vu (118.) qu'une surface cubique peut, en général, être engendrée à l'aide de trois réseaux projectifs de plans. Dans ce mode de génération, on déduit les 27 droites des six points *1, 2, 3, 4, 5, 6,* où un plan $E$ est rencontré par une certaine courbe gauche du sixième ordre. En effet, les 27 droites correspondent (114.) aux six points

***1, 2, 3, 4, 5, 6,***

aux six coniques

***23456, 13456, 12456, 12356, 12346, 12345,***

et aux quinze droites

***23, 31, 12,*** ***56, 64, 45,***

***14, 15, 16, 24, 25, 26, 34, 35, 36.***

L'ensemble des trois réseaux étant supposé réel, de même que le plan $E$, le système des six points ***123456*** sera réel aussi; et par conséquent, on pourra distinguer les cas suivants:

1°. Si les six points sont tous réels, les 27 droites sont toutes réelles (première espèce).

2°. Si quatre points sont réels, et que les deux autres soient imaginaires conjugués, on aura $4+4+6+1=15$ droites réelles; les autres sont

imaginaires et telles que deux conjuguées ne se rencontrent pas (deuxième espèce).

3°. Si deux points sont réels, et que les autres soient imaginaires conjugués par couples, on aura $2+2+1+2=7$ droites réelles; 2 couples de droites imaginaires conjuguées qui se coupent, et 8 couples de droites imaginaires conjuguées qui ne se coupent pas (troisième espèce).

4°. Si les six points sont tous imaginaires et conjugués par couples, on aura $1+1+1=3$ droites réelles; 6 couples de droites imaginaires conjuguées qui se coupent, et 6 couples de droites imaginaires conjuguées qui ne se coupent pas (quatrième espèce).

Il n'est pas possible d'obtenir la cinquième espèce par ce mode de génération: ce qui résulte aussi du remarque que, dans la cinquième espèce, il n'y a aucun six réel, tandis que la génération à l'aide de trois réseaux projectifs (dont l'ensemble soit réel) nous mène à un double-six, les deux six duquel (formés par les droites qui correspondent aux six points et aux six coniques) sont nécessairement réels*).

Nous nous proposons maintenant de prouver que, si la génération par des réseaux projectifs ne peut donner que les quatre premières espèces, il y a un autre mode de génération qui est propre à donner toutes les cinq espèces. Pour cela, il faut que nous discutions d'abord les cas possibles fournis par l'intersection de deux surfaces quadriques, qui ne se touchent en aucun point.

161. Deux surfaces de second ordre, qui n'aient aucun point de contact, se coupent suivant une courbe gauche de quatrième ordre, par laquelle passent quatre cones quadriques; les sommets de ces cones sont aussi les sommets du tétraèdre conjugué commun à toutes les surfaces quadriques passant par la courbe gauche. Ces surfaces forment un faisceau: c'est-à-dire que par un point quelconque $x$ de l'espace et par la courbe gauche passe une seule surface quadrique. Les deux génératrices rectilignes de cette surface, qui passent

---

*) Si l'on regarde une surface cubique $F_3$ comme polaire mixte de deux plans $E$, $E'$, par rapport à une surface fondamentale du même ordre (76.), on arrive à un double-six, dont les droites correspondent aux intersections des plans donnés avec deux courbes gauches du 6^e^ ordre, resp. Si les plans donnés sont imaginaires conjugués, il en est de même des deux six, et par conséquent, il peut d'abord paraître possible d'obtenir, par ce moyen, la cinquième espèce aussi. Mais l'illusion s'évanouit en considérant que les droites homologues des deux six, qui sont imaginaires conjuguées, ne se coupent pas: tandis que, dans la cinquième espèce, deux droites imaginaires conjuguées sont toujours dans un même plan.

par $x$, sont les deux droites qu'on peut mener du point $x$ à couper deux fois la courbe gauche.

Tout cone passant par la courbe gauche et ayant son sommet en un point de la courbe est du troisième ordre; et par conséquent, la perspective de la courbe gauche sur un plan, l'oeil étant placé sur elle, est une courbe (générale) du troisième ordre.

C'est des propriétés de cette perspective plane qu'on déduit un grand nombre de propriétés de la courbe gauche de quatrième ordre (et de premier genre (125.)). Par ex., par un point quelconque de la cubique plane on peut lui mener quatre droites tangentes, et le rapport anharmonique de ces quatre droites est constant (rapport anharmonique de la cubique). Donc, par toute droite appuyée à la courbe gauche en deux points $oo'$, on peut lui mener quatre plans tangents. Si $o$ est l'oeil et que l'on déplace $o'$, le rapport anharmonique de ces quatre plans reste invariable; et dès lors il ne changera pas si $o'$ est fixe et $o$ variable; et conséquemment, le même rapport ne variera pas non plus de quelque manière qu'on déplace la corde $oo'$. Il résulte de là que, si l'oeil parcourt la courbe gauche, le rapport anharmonique de la cubique perspective se conserve constant. On peut donner à ce nombre constant la dénomination de *rapport anharmonique de la courbe gauche.*

162. On peut regarder une courbe gauche $C_4$ de quatrième ordre (premier genre) comme l'intersection incomplète d'une surface $S$ du second ordre et d'un cone $K$ du troisième ordre, dont le sommet soit un point $o$ de $C_4$. Les deux génératrices de $S$ qui passent par $o$ coupent de nouveau la courbe gauche; et dès lors elles appartiennent aussi au cone $K$; c'est-à-dire qu'elles formeront, avec $C_4$, l'intersection complète des lieux $S$ et $K$. Le plan de ces génératrices est tangent à $S$ au point $o$; il contient donc la droite $T$ tangente en ce point à $C_4$: droite qui est aussi une génératrice du cone $K$. Le plan osculateur à $C_4$ en $o$ coupera la courbe en un autre point $o'$; donc, ce même plan touchera le cone $K$ suivant $T$ et le coupera suivant la droite $oo'$.

L'oeil étant placé en $o$, la perspective de $C_4$ est une cubique (base du cone $K$). Soit $\omega$ la trace de $T$ sur le plan du tableau; les droites tangentes de la cubique, issues de $\omega$, seront les traces des quatre plans tangents de $C_4$, qu'on peut mener par $T$. Or, ces plans touchent la courbe gauche en deux points (dont l'un est $o$); donc ils passeront resp. par les sommets des quatre cones quadriques, sur lesquels $C_4$ est placée: car ces cones forment l'enveloppe complète des plans bitangents de $C_4$. Conséquemment, le rapport anharmo-

unique des quatre plans qui touchent $C_4$ en un point quelconque et passent resp. par les sommets des quatre cones quadriques est égal au rapport anharmonique de la courbe gauche même; et dès lors, il est un nombre constant.

163. Réciproquement, une cubique plane donnée peut être regardée comme perspective d'une courbe gauche du quatrième ordre (premier genre) passant par l'oeil $o$. Soit $\omega$ un point quelconque de la cubique plane: et qu'une droite menée par $\omega$ coupe cette courbe en deux autres points $\omega_1$, $\omega_2$. Alors, le cone qui a le point $o$ pour sommet et la cubique plane pour base, rencontrera une surface quadrique menée arbitrairement par les droites $o\omega_1$, $o\omega_2$, suivant une courbe gauche du quatrième ordre, touchée en $o$ par la droite $o\omega$.

164. Si les deux surfaces quadriques (161.) sont réelles, leur intersection peut être réelle ou imaginaire; et dans la première hypothèse, ou elle consiste en un *trait* (*Zug, Stück*) unique; ou bien elle est l'ensemble de deux *traits* associés qui n'ont aucun point commun, pas même à distance infinie. Nous aurons à examiner ces trois cas séparément.

165. Si l'intersection $C_4$ de deux surfaces quadriques est une courbe *monogrammique* (à un seul trait), sa perspective (l'oeil étant toujours placé sur la courbe gauche) sera aussi d'un seul trait, c'est-à-dire qu'elle n'aura qu'une branche serpentine avec trois inflexions *). Or, on sait qu'une telle cubique plane a un rapport anharmonique imaginaire: en d'autres termes, d'un point quelconque de la cubique on ne peut lui mener que deux tangentes réelles. Donc (162.), parmi les quatre plans tangents à $C_4$ en un point quelconque et passant resp. par les sommets des quatre cones quadriques (qui font partie du faisceau dont $C_4$ est la base) il n'y en a que deux réels; c'est-à-dire que des quatre cones deux seulement sont réels.

De ce que la cubique perspective n'admet que deux tangentes réelles issues d'un quelconque de ses points, il résulte en outre que par toute droite appuyée à $C_4$ en deux points réels, distincts ou coïncidents, on peut mener à cette courbe deux plans tangents réels, et deux seulement. D'après la loi de continuité, cette propriété subsistera aussi pour une droite appuyée à $C_4$ en deux points imaginaires conjugués.

Le tétraèdre conjugué a deux sommets réels, et dès lors deux faces

*) En considérant la continuité de la courbe comme non interrompue par les passages à l'infini.

réelles: chaque face réelle contient un sommet réel. Donc, chaque face réelle coupe $C_4$ en deux points réels; c'est-à-dire qu'elle coupe le cone quadrique, dont le sommet est situé sur cette face, suivant deux droites, dont une rencontre en deux points réels la section de l'autre cone.

Les cones réels de second ordre, qui passent par $C_4$, constituent la limite de séparation entre les surfaces gauches et les surfaces non réglées du faisceau, dont $C_4$ est la base. Dans le cas actuel, il est aisé de voir que la quadrique (du faisceau) passant par un point quelconque de l'espace intérieur ou extérieur à tous les deux cones réels, est gauche; au lieu que la quadrique passant par un point quelconque de l'espace intérieur à l'un des cones et extérieur à l'autre n'est pas réglée.

166. L'intersection $C_4$ soit maintenant une courbe *digrammique* (à deux traits), auquel cas la cubique perspective sera composée d'une ovale *) et d'une branche serpentine avec trois inflexions. Soit $\omega$ la trace, sur le tableau, de la droite qui touche $C_4$ au point $o$ de l'oeil (163.); les tangentes menées par $\omega$ à la cubique seront les traces des quatre plans qui touchent $C_4$ en $o$ et passent resp. par les sommets du tétraèdre conjugué (162.). Or, les quatre tangentes de la cubique, issues de $\omega$, sont toutes imaginaires ou toutes réelles, selon que ce point appartient à l'ovale ou à la branche serpentine; donc, les sommets du tétraèdre conjugué (savoir les sommets des quatre cones quadriques qui passent par $C_4$) seront tous imaginaires ou tous réels, selon que la perspective du trait, sur lequel est placé l'oeil, est une ovale ou une branche serpentine.

Il résulte de là que, si la courbe $C_4$ est donnée, la perspective du trait sur lequel on place l'oeil, quel que soit le trait choisi, sera toujours une ovale, ou toujours une branche serpentine. Nous avons donc deux cas à distinguer, suivant que le tétraèdre conjugué est tout réel ou tout imaginaire.

167. Si le tétraèdre est tout imaginaire, c'est-à-dire si $\omega$ est un point de l'ovale, un plan quelconque mené par l'oeil coupera $C_4$ en trois autres points (dont deux peuvent être imaginaires), les perspectives desquels ou appartiendront toutes à la branche serpentine, ou l'une à cette branche et les deux autres à l'ovale. Donc, si un plan rencontre $C_4$ en quatre points réels, trois de ces points appartiendront à un même trait;

*) En appliquant cette dénomination même aux formes hyperboliques et paraboliques [d'après M. Bellavitis].

et le quatrième à l'autre trait; et si un plan rencontre $C_4$ en deux points réels seulement, ces deux points seront toujours l'un sur un trait et l'autre sur l'autre trait. D'où il suit qu'un plan tangent en un point coupe la courbe en deux autres points situés sur des traits différents; qu'un plan osculateur à un trait coupe l'autre trait; et qu'il n'y a aucun plan réel qui touche la courbe en deux points ou qui la rencontre en quatre points tous imaginaires ou tous coïncidents.

En outre, il résulte de ce qui a été remarqué pour la cubique perspective, que par toute droite appuyée à la courbe en deux points (réels ou imaginaires conjugués) d'un même trait il ne passe aucun plan réel tangent ailleurs à la courbe; et que par une droite appuyée aux deux traits on peut toujours faire passer quatre plans tangents réels.

Quand un tétraèdre est conjugué à une surface quadrique, toute génératrice de celle-ci, rencontrant une arête du tétraèdre, rencontre aussi l'arête opposée; et par suite la surface contient les quatre droites suivant lesquelles s'entrecoupent les quatre plans tangents menés par deux arêtes opposées. Si le tétraèdre est formé (comme l'on suppose actuellement) par deux couples de plans imaginaires conjugués, il a néanmoins deux arêtes opposées réelles, dont chacune est l'intersection de deux plans tangents de la surface. Or, ces plans sont réels, car ils doivent former un système harmonique avec deux faces du tétraèdre, lesquelles sont des plans imaginaires conjugués. Donc les quatre droites d'intersection des deux couples de plans tangents sont réelles, et conséquemment la surface est gauche.

Ainsi, dans le cas actuel, toutes les quadriques passant par $C_4$ sont gauches; c'est-à-dire que par tout point de l'espace on peut faire passer deux droites réelles qui rencontrent deux fois la courbe (l'une au moins en des points réels).

168. Supposons maintenant que notre courbe gauche $C_4$ (digrammique) corresponde à un tétraèdre conjugué tout réel, c'est-à-dire qu'elle soit située sur quatre cones quadriques réels. Un plan mené arbitrairement par l'oeil coupera $C_4$ en trois autres points (deux peuvent être imaginaires), dont les perspectives tomberont ou toutes trois sur la branche serpentine, ou bien l'une sur cette branche et les deux autres sur l'ovale. Donc, si un plan rencontre $C_4$ en quatre points réels, ceux-ci peuvent appartenir tous à un même trait ou bien deux à l'un trait et deux à l'autre;

et si un plan rencontre la courbe en deux points réels seulement, ceux-ci appartiennent toujours à un même trait. D'où il résulte qu'un plan osculateur à un trait coupe ce même trait.

De l'analyse des quatre tangentes de la cubique perspective, issues d'un quelconque de ses points, on déduit en outre que par toute droite appuyée à la courbe en deux points (réels ou imaginaires conjugués) d'un même trait on peut faire passer quatre plans tangents, dont deux touchent un trait et deux l'autre; tandis que par toute droite appuyée aux deux traits il ne passe aucun plan tangent réel.

Chaque face du tétraèdre conjugué coupe la courbe $C_4$ en quatre points, sommets d'un quadrangle complet, dont les côtés opposés se rencontrent en trois points réels (sommets du tétraèdre); donc ces quatre intersections sont toutes réelles ou toutes imaginaires. Mais d'autre part, si un trièdre est conjugué à un cone quadrique, il y a une face du trièdre qui ne rencontre pas le cone. Donc, deux faces du tétraèdre coupent $C_4$ en quatre points réels et les deux autres en quatre points imaginaires.

Il est aisé de voir que la quadrique du faisceau, dont $C_4$ est la base, menée par un point quelconque de l'espace intérieur ou extérieur à tous les quatre cones, ou bien de l'espace intérieur à deux cones et extérieur aux deux autres, est une surface gauche: tandis que la quadrique passant par un point intérieur (extérieur) à un cone et extérieur (intérieur) aux trois autres, est une surface non réglée. En outre, par un point quelconque de l'espace intérieur ou exterieur à tous les quatre cones, on peut mener deux droites, dont chacune est appuyée en deux points (réels ou imaginaires conjugués) à un même trait de $C_4$; au lieu que par tout point extérieur à deux cones et intérieur aux deux autres on peut mener deux droites, chacune desquelles coupe l'un et l'autre trait.

169. Enfin, supposons que la courbe $C_4$ soit imaginaire: auquel cas tout plan réel coupe $C_4$ en quatre points imaginaires, sommets d'un quadrangle complet qui aura deux côtés réels; tandis que les autres couples de côtés opposés n'ont de réel que le point de concours. Il y a donc, dans l'espace, un nombre infini de points par lesquels on peut mener deux droites réelles à rencontrer en deux points (nécessairement imaginaires conjugués) la courbe; et il y a un nombre infini aussi de points par lesquels ces deux droites sont imaginaires conjuguées; c'est pourquoi il y aura une surface réelle, lieu des points pour lesquels ces deux mêmes droites sont coïncidentes. Or,

ce lieu est en général formé par les quatre cones quadriques passant par $C_4$; donc, dans le cas actuel, il y aura au moins deux cones réels.

Le tétraèdre conjugué est tout réel. En effet, si $a$ est le sommet d'un cone réel, le plan polaire de $a$ (par rapport aux quadriques du faisceau dont $C_4$ est la base) coupera $C_4$ suivant un quadrangle imaginaire, dont les couples de côtés opposés ont trois points de concours réels, $b$, $c$, $d$. Or, *abcd* est précisément le tétraèdre conjugué.

Puis, si l'on réfléchit que chaque face du tétraèdre coupe l'un des trois cones, dont elle contient les sommets, suivant deux droites réelles, et chacun des deux autres suivant deux droites imaginaires (conjugués), et que des trois faces concourant au sommet d'un cone réel deux seules peuvent couper ce cone suivant des droites réelles; on reconnaitra que deux cones, seulement, sont réels; les deux autres, tout en ayant leurs sommets réels, sont imaginaires.

Les deux cones réels sont totalement extérieurs l'un à l'autre. Les surfaces (du faisceau dont $C_4$ est la base) qui passent par les points de l'espace extérieur à l'un et à l'autre cone sont gauches; au lieu que par les points intérieurs à l'un des cones, il ne passe que des quadriques (du faisceau) non réglées.

170. Ainsi, il y a trois espèces différentes de la courbe gauche (générale) de quatrième ordre et de premier genre, c'est-à-dire:

1^er^ cas — Courbe réelle *monogrammique:* le tétraèdre conjugué a deux sommets réels; il y a deux cones quadriques réels qui passent par la courbe.

2^e^ cas — Courbe réelle *digrammique:* le tétraèdre n'a aucun sommet réel; il n'y a aucun cone réel.

3^e^ cas — Courbe réelle *digrammique:* le tétraèdre a quatre sommets réels, qui donnent quatre cones réels aussi.

En outre, l'intersection de deux quadriques réelles (qui ne se touchent en aucun point) présente un autre cas possible:

4^e^ cas — Courbe imaginaire: le tétraèdre a quatre sommets réels: mais il n'y a que deux cones réels.

171. Qu'on revienne maintenant à la surface cubique générale $F_3$, et qu'on remarque que dans toutes les cinq espèces qu'elle peut présenter (159.) il y a toujours trois droites réelles situées dans un même plan: soient ces droites $a$, $b$, $c$. La première polaire du point $o$, commun à $b$ et $c$, est une

quadrique gauche qui ne passe pas seulement par les droites $b$, $c$; elle coupe $F_3$ aussi suivant une courbe gauche $C_4$ de quatrième ordre (premier genre), lieu des points où $F_3$ est touchée par des droites issues de $o$. Cette courbe gauche rencontre chacune des droites $b$, $c$ en deux points, qui sont évidemment les mêmes où cette droite touche deux coniques de la surface.

La courbe $C_4$ est la base d'un faisceau de quadriques coupant $F_3$ suivant des coniques, dont les plans passent par la droite $a$ (143.): ainsi ces quadriques et les plans par $a$ forment deux faisceaux projectifs propres à engendrer la surface $F_3$. Remarquons de plus (143.) que les plans par $a$ sont les polaires du point $o$ par rapport aux quadriques correspondantes; d'où il résulte que la surface cubique est complètement déterminée par la courbe gauche $C_4$ et par le point $o$.

Les autres 24 droites sont, deux à deux, situées dans les 12 plans tritangents qui passent par $a$, $b$, $c$; parmi lesquels, les 4 plans par $a$ sont déterminés par les sommets des 4 cones quadriques qui passent par $C_4$; et les autres sont les plans qu'on peut mener par $b$ et $c$ à toucher ailleurs $C_4$ (112.).

A présent, il faut démontrer qu'en choisissant la courbe $C_4$ et le point $o$ d'une manière convenable, on peut déduire toutes les cinq espèces des surfaces cubiques, de ce mode de génération.

172. Que la courbe $C_4$ soit réelle, digrammique et placée sur quatre cones quadriques réels, et que le point $o$ soit extérieur à tous les quatre cones: auquel cas (168.) non-seulement passent par $o$ deux cordes réelles $b$, $c$ de $C_4$, mais, en outre, les plans polaires de $o$ se coupent suivant une droite $a$, qui rencontrera chaque cone en des points réels. D'où il résulte que par $a$ passent quatre plans tritangents (de $F_3$) réels (les plans polaires de $o$ par rapport aux quatre cones), chacun desquels contiendra (outre $a$) deux droites réelles. On peut ajouter (168.) que chacune des droites $b$, $c$ coupera en deux points (réels ou non) un même trait de $C_4$; et que par chacune de ces droites on peut conséquemment mener quatre plans tangents à la courbe gauche, et dès lors tritangents à $F_3$. Cela est propre et exclusif à la première espèce des surfaces cubiques (156.); donc chacun de ces huit plans tritangents par $b$ ou par $c$ contiendra deux autres droites réelles. Ainsi la surface engendrée aura 27 droites réelles.

Réciproquement, on peut démontrer que le choix adopté pour $C_4$ et pour le point $o$ est nécessaire afin que la surface engendrée soit de la première espèce.

173. Si la courbe $C_4$ est de nouveau réelle, digrammique et placée sur quatre cones quadriques réels, mais que le point $o$ soit intérieur à tous les quatre cones, nous aurons encore (168.) quatre plans tritangents réels par chacune des droites $a$, $b$, $c$. Mais, comme dans ce cas la droite $a$ (intersection des plans polaires de $o$) est entièrement extérieure à tous les cones, il en suit que chacun des quatre plans par cette droite, ne rencontrant pas le cone correspondant suivant des droites réelles, coupera $F_3$ suivant deux droites imaginaires conjuguées. Ce résultat est propre et exclusif à la cinquième espèce (157.); donc chacun des huit plans par $b$ ou par $c$ contiendra aussi une couple de droites imaginaires conjuguées. Ainsi la surface engendrée aura trois droites réelles et douze couples de droites imaginaires conjuguées qui se coupent.

Réciproquement, on peut démontrer que pour engendrer une surface cubique de la cinquième espèce, il faut choisir la courbe $C_4$ et le point $o$, de la manière que nous venons de faire.

174. Que la courbe gauche $C_4$ soit encore réelle, digrammique et placée sur quatre cones réels, et que le point $o$ soit pris dans l'espace intérieur à deux cones et extérieur aux deux autres: auquel cas la droite $a$ rencontrera (en des points réels) les deux derniers cones seulement, et chacune des droites $b$, $c$ sera appuyée à tous les deux traits de $C_4$. D'où il résulte (168.) que par $a$ passeront quatre plans (tritangents) réels, dont deux seulement couperont $F_3$ suivant d'autres droites réelles; et que par $b$ et $c$ il ne passera aucun plan (tritangent) réel. Cela est propre et exclusif à la troisième espèce; la surface engendrée aura donc sept droites réelles, deux couples de droites imaginaires conjuguées qui se coupent, et huit couples de droites imaginaires conjuguées qui ne se coupent pas.

Il y a deux autres manières d'obtenir la surface cubique de la troisième espèce: 1°. si $C_4$ est réelle, digrammique, sans aucun cone quadrique réel, le point $o$ étant du reste tout à fait arbitraire; 2°. si $C_4$ est imaginaire, et que le point $o$ soit extérieur à tous les deux cones réels.

175. Soit $C_4$ une courbe réelle, monogrammique, et que le point $o$ soit extérieur à tous les deux cones quadriques réels qui passent par la courbe: auquel cas (165.) il y aura deux plans réels par $a$, chacun contenant deux autres droites réelles; et de même il y aura deux plans réels par chacune des droites $b$ et $c$. Cela est propre et exclusif à la deuxième espèce; d'où

il résulte que chacun des quatre plans réels passant par $b$ ou par $c$ coupera $F_3$ suivant deux autres droites réelles. Ainsi la surface engendrée aura quinze droites réelles et six couples de droites imaginaires conjuguées qui ne se coupent pas.

Réciproquement, on peut démontrer que le choix adopté pour $C_4$ et pour le point $o$ est nécessaire afin d'obtenir une surface cubique de la deuxième espèce.

176. En dernier lieu, supposons que la courbe $C_4$ soit réelle monogrammique, et que le point $o$ soit intérieur à tous les deux cones réels. Dans ce cas (165.), par chacune des droites $a$, $b$, $c$, il ne passe que deux plans réels; et chacun des deux plans par $a$ contiendra deux droites imaginaires conjuguées. Nous tombons ainsi sur la quatrième espèce; et par conséquent chacun des plans réels par $b$ ou $c$ donnera aussi deux droites imaginaires conjuguées. La surface engendrée aura donc trois droites réelles, six couples de droites imaginaires conjuguées qui se coupent, et six couples de droites imaginaires conjuguées qui ne se coupent pas.

Et réciproquement, afin d'obtenir une surface cubique de la quatrième espèce, il faut choisir la courbe $C_4$ et le point $o$ de la manière que nous venons d'indiquer.

177. Dans tout ce qui précède, il est entendu qu'on veut prendre pour base des opérations un plan tritangent avec trois droites réelles: et nous avons démontré qu'il est possible d'engendrer toutes les cinq espèces de la surface cubique générale.

Mais si l'on voulait partir d'un plan tritangent réel contenant une seule droite réelle $a$ et deux droites imaginaires conjuguées $b$ et $c$, il ne serait plus possible d'obtenir la première et la deuxième espèce, car ces espèces n'admettent aucune couple de droites imaginaires qui se coupent. Au contraire, on peut construire les trois autres espèces, comme il suit:

la troisième espèce, si $C_4$ est réelle et digrammique, avec quatre cones réels, et que le point $o$ soit extérieur à trois cones et intérieur à l'autre;

la quatrième espèce, si $C_4$ est réelle, monogrammique, et que le point $o$ soit intérieur à l'un des deux cones et extérieur à l'autre;

enfin, la cinquième espèce, si $C_4$ est réelle et digrammique, avec quatre cones réels, et que le point $o$ soit intérieur à trois cones et extérieur au quatrième; ou bien si $C_4$ est imaginaire et que le point $o$ soit intérieur à l'un des deux cones réels (et extérieur à l'autre).

---

# Table des matières.

---

### *Chapitre premier.*



### *Chapitre deuxième.*

## *Chapitre troisième.*



## *Chapitre quatrième.*

## *Chapitre septième.*



## *Chapitre huitième.*

## *Chapitre neuvième.*



## *Chapitre dixième.*

### *Chapitre onzième.*

# Ueber die Vertheilung der statischen Elektricität in einem von zwei Kugelkalotten begrenzten Körper.

(Von Herrn *F. G. Mehler* zu Danzig.)

---

Das Problem der Elektricitätsvertheilung in einem von zwei sich nicht schneidenden Kugelflächen begrenzten Körper ist bekanntlich schon von *Poisson* für den besonderen Fall gelöst worden, dass der Körper aus zwei vollen Kugeln besteht und keine äusseren Kräfte auf ihn einwirken; seine allgemeine und vollständige Lösung aber hat es durch eine im Jahre 1862 erschienene Schrift des Herrn *C. Neumann* erhalten, deren Methoden und Hauptresultate man auch in diesem Journal (Bd. 62, p. 36 — 49) angegeben findet. Meine Absicht ist es, den bisher, so viel ich weiss, noch unerledigten Fall in Betracht zu ziehen, wo die Grenzen des Körpers durch zwei sich schneidende Kugelflächen bestimmt sind. Jeden der vier gesonderten Räume, in welche zwei solche Flächen den ganzen unendlichen Raum theilen, wird man nach Belieben als die Elektricität leitend oder nicht leitend voraussetzen können. Welche Anordnung man aber in dieser Beziehung auch treffen, und wo auch immer in dem nichtleitenden Raume der Sitz der vertheilend wirkenden elektrischen Massen sein möge, so sind doch alle daraus entspringenden Probleme, nach dem jetzigen Stande der allgemeinen Theorie, als vollständig gelöst zu betrachten *), sobald man kennt:

I. Die Dichtigkeit der elektrischen Schicht, welche durch einen elektrischen Massenpunkt auf einem von zwei Kugelkalotten eingeschlossenen Körper hervorgerufen wird und gebunden bleibt, wenn dieser Körper mit einem unendlich grossen Leiter in leitende Verbindung gebracht wird.

II. Die durch Influenz eines elektrischen Massenpunktes erzeugte Vertheilung in einem Leiter, der von innen durch zwei Kugelkalotten begrenzt, nach aussen hin unbegrenzt ist.

III. Die Vertheilung einer gegebenen Elektricitätsmenge auf einem isolirten Leiter der ersten Art.

Bei der Behandlung dieser Aufgaben, von denen übrigens die dritte,

---

*) Man vergleiche die beiden Aufsätze des Herrn *Lipschitz* in Bd. 58, p. 1 — 53 und 152 — 173 dieses Journals.

wie stets bei einem Leiter, der nur aus einem einzigen Stücke besteht, als ein Grenzfall der ersten angesehen werden kann, werde ich mich der Coordinaten bedienen, welche Herr *C. Neumann* seiner „*Theorie der Elektricitäts- und Wärme-Vertheilung in einem Ringe*" (Halle 1864) zu Grunde gelegt hat. Die Integration der Differentialgleichung des Potentials wird zunächst mit Hülfe einer durch ein bestimmtes Integral definirten Transcendenten geschehen, welche hier dieselben Dienste leistet, wie die „*Bessel*sche Function" für zwei sich berührende und die *Laplace*sche Function $P_n(x)$ für zwei völlig getrennte Kugelflächen; aber durch eine einfache Transformation wird es gelingen, das Resultat von jener Transcendenten zu befreien und in die Form eines einfachen bestimmten Integrales zu bringen, das unter dem Integralzeichen nur noch Kreis- und Exponentialfunctionen enthält. In gewissen speciellen Fällen, zu denen auch das von Herrn *Lipschitz* in dem zweiten der vorhin citirten Aufsätze und auch in einer späteren Arbeit *) behandelte „kreisförmig begrenzte Segment einer Kugelfläche" gehört, ist sogar dieses Integral selbst auf Elementarfunctionen zurückführbar. Wenn nun Herr *Lipschitz* an dem letztgenannten Orte ein Verfahren angegeben hat, welches geeignet ist, die elektrostatische Vertheilung auch für eine beliebige Anzahl von ganz ausserhalb einander liegenden Kugelflächensegmenten zu bestimmen, und wenn man selbst annehmen will, dass dieses Verfahren auch für den Fall zweier Segmente mit gemeinschaftlichem Rande zulässig sei, so ist doch zu beachten, dass eine wirkliche Durchführung desselben die Ausführung einer unendlichen Reihe von Integrationen erfordern würde, und daher eine directe Lösung nichts weniger als überflüssig gemacht wird.

Noch muss ich bemerken, dass mittels des zuerst von Herrn *W. Thomson* aufgestellten Princips der sphärischen Spiegelung, das ich indessen nur aus der von Herrn *Lipschitz* gegebenen Darstellung kenne, das Problem I. sich auch auf III. zurückführen lässt; aber dieser Umstand konnte mich nicht hindern, den entgegengesetzten Weg einzuschlagen, weil die directe Lösung der ersten Aufgabe sich mit derselben Leichtigkeit, wie die der letzten, bewerkstelligen lässt.

## § 1.

### Einführung der Coordinaten und der die Lösung vermittelnden Transcendenten.

Der Mittelpunkt des Kreises $K$, welcher den gemeinschaftlichen Rand der beiden den Leiter begrenzenden Kugelkalotten bildet, werde zum Anfangs-

*) Bd. 61, p. 1—21 dieses Journals.

punkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems gewählt, und die Achse der $x$ stehe senkrecht auf der Kreisebene. Man kann diese Ebene sich stets in horizontaler Lage und den positiven Theil der $x$-Achse nach oben gerichtet vorstellen. Die Ebene, welche durch irgend einen Punkt $(x, y, z)$ und die $x$-Achse gelegt wird, schneidet den Rand in zwei Punkten, nach denen hin wir von $(x, y, z)$ aus Radienvectoren ziehen. Von den beiden Winkeln, welche diese Radienvectoren bilden, bezeichnen wir, Herrn *C. Neumann* folgend, den hohlen oder den erhabenen durch $\omega$, je nachdem $(x, y, z)$ oberhalb oder unterhalb der $yz$-Ebene liegt; ferner durch $e^{\vartheta}$ das Verhältniss des grösseren Radiusvectors zum kleineren, und endlich durch $\varphi$ den Winkel, welchen die vom Anfangspunkt der Coordinaten nach dem Endpunkt des kleineren Radiusvectors gezogene Gerade mit der positiven Richtung der $y$-Achse bildet. Der Winkel $\varphi$ wird als zunehmend betrachtet werden im Sinne einer Drehung von der positiven $y$-Achse nach der positiven $z$-Achse hin. Um alle Punkte des Raumes zu erschöpfen, muss man $\omega$ und $\varphi$ von 0 bis $2\pi$ und $\vartheta$ von 0 bis $\infty$ variiren lassen, und je nachdem man entweder $\omega$ oder $\varphi$ oder $\vartheta$ einen constanten Werth beilegt, ist der Ort des Punktes $(x, y, z)$ entweder eine durch den Kreis $K$ begrenzte Kugelkalotte oder eine durch die Achse der $x$ begrenzte Ebene, oder eine Ringfläche, entstanden durch Rotation eines Kreises, der auf der $x$-Achse zwei feste imaginaire Punkte im Abstande $\pm a\sqrt{-1}$ vom Anfangspunkt hat, wenn $a$ den Radius des Kreises $K$ vorstellt. Der Zusammenhang zwischen den ursprünglichen und den neuen Coordinaten wird durch die folgenden Formeln gegeben, in denen $i$ die Bedeutung von $\sqrt{-1}$ hat:

$$(1.)\quad \begin{cases} x = a\dfrac{\sin\omega}{\cos\vartheta i - \cos\omega}, \\[2mm] y = \dfrac{a}{i}\,\dfrac{\sin\vartheta i\cos\varphi}{\cos\vartheta i - \cos\omega}, \\[2mm] z = \dfrac{a}{i}\,\dfrac{\sin\vartheta i\sin\varphi}{\cos\vartheta i - \cos\omega}. \end{cases}$$

Für das Quadrat der Entfernung $r$ des Punktes $(x, y, z)$ von einem zweiten Punkte $(x_1, y_1, z_1)$ oder $(\vartheta_1, \varphi_1, \omega_1)$ findet man:

$$(2.)\qquad r^2 = 2a^2\frac{\cos\vartheta i\cos\vartheta_1 i + \sin\vartheta i\sin\vartheta_1 i\cos(\varphi-\varphi_1) - \cos(\omega-\omega_1)}{(\cos\vartheta i - \cos\omega)(\cos\vartheta_1 i - \cos\omega_1)},$$

so dass

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a\sqrt{2}}\,\frac{pp_1}{P}$$

wird, wenn man zur Abkürzung setzt:

$$\sqrt{\cos\vartheta i - \cos\omega} = p, \qquad \sqrt{\cos\vartheta_1 i - \cos\omega_1} = p_1,$$
$$\sqrt{[\cos\vartheta i\cos\vartheta_1 i + \sin\vartheta i\sin\vartheta_1 i\cos(\varphi-\varphi_1) - \cos(\omega-\omega_1)]} = P.$$

Aus dem Ausdrucke für $r^2$ erhält man, indem man die beiden Punkte einander unendlich nahe rücken, d. h. $x_1 = x + dx$, $\vartheta_1 = \vartheta + d\vartheta$ etc. werden lässt, das Quadrat des Linienelements:

$$(3.)\qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{a^2}{p^4}(d\vartheta^2 - \sin^2\vartheta i\, d\varphi^2 + d\omega^2).$$

Vermittelst desselben wird die Differentialgleichung $\Delta^2 V = 0$ in die folgende transformirt:

$$(4.)\qquad \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{\sin\vartheta i}{ip^2}\frac{\partial V}{\partial\vartheta}\right) + \frac{i}{p^2\sin\vartheta i}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\sin\vartheta i}{ip^2}\frac{\partial V}{\partial\omega}\right) = 0,$$

und diese nimmt durch die Substitution $V = pU$ die wesentlich einfachere Gestalt an:

$$(5.)\qquad \frac{1}{\sin\vartheta i}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta i\frac{\partial U}{\partial\vartheta}\right) - \frac{1}{\sin^2\vartheta i}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial\omega^2} + \tfrac{1}{4}U = 0.$$

Enthält $U$ die Variablen $\vartheta$ und $\varphi$ nur in der Verbindung:

$$(6.)\qquad \cos\vartheta i\cos\vartheta_1 i + \sin\vartheta i\sin\vartheta_1 i\cos(\varphi-\varphi_1) = \cos\eta i,$$

wobei $\eta$ stets reell ist und positiv genommen werden darf, so verwandelt sich die letzte Differentialgleichung in:

$$(7.)\qquad \frac{1}{\sin\eta i}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\sin\eta i\frac{\partial U}{\partial\eta}\right) + \frac{\partial^2 U}{\partial\omega^2} + \tfrac{1}{4}U = 0,$$

und von dieser ist die Function

$$P^{-1} = (\cos\eta i - \cos(\omega_1-\omega))^{-\frac{1}{2}}$$

ein particuläres Integral.

Unsere nächste Aufgabe wird nun darin bestehen, für $P^{-1}$ eine unseren Zwecken entsprechende Darstellung durch eine Summe von Elementen zu finden, deren jedes für sich der Gleichung (7.) Genüge leistet und dabei in zwei Factoren zerfällt, von denen der eine nur von $\omega_1-\omega$, der andere nur von $\eta$ abhängt. Setzt man in der Gleichung

$$P^{-1} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{du}{u^2 + \cos\eta i - \cos(\omega_1-\omega)}$$

$\cos\alpha i$ statt $u^2 + \cos\eta i$, so wird dieselbe leicht in die folgende Form gebracht:

$$P^{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_\eta^\infty \frac{\cot\frac{1}{2}(\omega_1-\omega-\alpha i) - \cot\frac{1}{2}(\omega_1-\omega+\alpha i)}{\sqrt{\cos\alpha i - \cos\eta i}}\,d\alpha.$$

Aber bekanntlich ist, wenn $\omega_1-\omega$ zwischen 0 und $2\pi$ liegt:

$$\cot\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega-\alpha i) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{2\pi}(\omega_1-\omega-\alpha i)-1} - t^{-\frac{1}{2\pi}(\omega_1-\omega-\alpha i)}}{1-t}\,dt,$$

oder wenn man $t=e^{-2\mu\pi}$ setzt:

$$\cot\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega-\alpha i) = 2\int_0^\infty \frac{\sin(\pi-(\omega_1-\omega)+\alpha i)\mu i}{\sin\mu\pi i}\,d\mu.$$

Von dieser Gleichung ist die durch Verwandlung von $\alpha$ in $-\alpha$ daraus hervorgehende zu subtrahiren und das Resultat in den letzten Ausdruck von $P^{-1}$ zu substituiren. Kehrt man alsdann die Reihenfolge der Integrationen um und bezeichnet durch $J_\mu(\eta)$ die Transcendente:

$$(8^a.)\qquad J_\mu(\eta) = \frac{2i}{\pi\sin\mu\pi i}\int_\eta^\infty \frac{\sin\mu\alpha\,d\alpha}{\sqrt{\cos\alpha i-\cos\eta i}},$$

so wird $P^{-1}$, unter der Voraussetzung, dass $0<\omega_1-\omega<2\pi$, durch das folgende bestimmte Integral dargestellt:

$$(9.)\qquad P^{-1} = \int_0^\infty \cos(\pi-(\omega_1-\omega))\mu i\,J_\mu(\eta)\,d\mu.$$

Wenn man in der soeben erhaltenen Gleichung statt $\omega_1-\omega$ eine complexe Variable $\psi+\lambda i$ einführt und $2e^{-\mu\pi}F(\eta,\mu)$ statt $J_\mu(\eta)$ schreibt, so nimmt ihre rechte Seite die Form an:

$$\int_0^\infty (e^{-(\psi+\lambda i)\mu}+e^{-(2\pi-\psi-\lambda i)\mu})\,F(\eta,\mu)\,d\mu,$$

und die Function $F(\eta,\mu)$ bleibt zufolge ($8^a$.) für jedes endliche $\mu$ endlich und nimmt auch für $\mu=\infty$ sicher keinen unendlich grossen Werth an. Das Integral behält also, wenn $\psi$ zwischen 0 und $2\pi$ gewählt wird, stets einen bestimmten Sinn und ist offenbar eine eindeutige und stetige Function von $\psi+\lambda i$. Ebendasselbe gilt von der linken Seite von (9.), wenn ihr reeller Theil stets mit einerlei Vorzeichen genommen wird, und zwar mit dem positiven, weil dieses für $\lambda=0$ Geltung hat. Deshalb ist die Substitution $\omega_1-\omega=\psi+\lambda i$ in (9.) für jedes reelle $\lambda$ gestattet, wenn die Bedingung $0<\psi<2\pi$ festgehalten und das Vorzeichen der Wurzelgrösse in der angegebenen Weise bestimmt wird, und folglich ist auch:

$$(10.)\qquad \int_0^\infty \cos(\pi-\psi)\mu i\cos\lambda\mu\,J_\mu(\eta)\,d\mu = \tfrac{1}{2}\Sigma(\cos\eta i-\cos(\psi+\tau\lambda i))^{-\frac{1}{2}},$$

wenn die Summe auf der rechten Seite sich auf die beiden Werthe $\tau=1$ und $\tau=-1$ bezieht. Ein genaueres Eingehen auf das Verhalten von $J_\mu(\eta)$ für

ein unendlich grosses $\mu$ würde zeigen, dass man in (10.) sogar $\psi = 0$ oder $= 2\pi$ nehmen darf, wenn $\eta$ nicht $= 0$ und $\lambda^2$ nicht $= \eta^2$ ist, dass also

$$\int_0^\infty \cos\lambda\mu \, .\cos\pi\mu i\, J_\mu(\eta)\, d\mu = (\cos\eta i - \cos\lambda i)^{-\frac{1}{2}} \qquad (\text{für } 0 < \lambda < \eta)$$
$$= \qquad 0 \qquad\qquad (\text{für } \eta < \lambda < \infty),$$

und die Vergleichung der linken Seite dieser Gleichung mit der Darstellung, welche für die rechte Seite durch Anwendung des *Fourier*schen Satzes gewonnen wird, würde für $J_\mu(\eta)$ den neuen Ausdruck ergeben:

$$(8^b.) \qquad J_\mu(\eta) = \frac{2}{\pi\cos\mu\pi i}\int_0^\eta \frac{\cos\mu\alpha\, d\alpha}{\sqrt{\cos\eta i - \cos\alpha i}} \qquad (\eta > 0).$$

Wir wollen den strengen Beweis dieser Formel aber lieber auf einem anderen Wege führen, auf dem wir auch noch andere bemerkenswerthe Ausdrücke für $J_\mu(\eta)$ gewinnen werden. Die Gleichung (10.) ist sicher gültig für $\psi = \pi$ und liefert:

$$(\cos\eta i + \cos\lambda i)^{-\frac{1}{2}} = \int_0^\infty \cos\lambda\mu\, J_\mu(\eta)\, d\mu,$$

so dass zufolge des *Fourier*schen Satzes:

$$(8^c.) \qquad J_\mu(\eta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{\mu\nu i}\, d\nu}{\sqrt{\cos\eta i + \cos\nu i}}\,.$$

Bringt man dies Integral in die Form:

$$J_\mu(\eta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\infty \frac{z^{\mu i - \frac{1}{2}}\, dz}{\sqrt{1 + 2z\cos\eta i + z^2}},$$

ersetzt den reciproken Werth der Quadratwurzel durch das bestimmte Integral

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{dt}{z + \cos\eta i + i\sin\eta i\cos t}$$

und wendet, nach Umkehrung der Integrationsfolge, die Substitution

$$z = (\cos\eta i + i\sin\eta i\cos t)\, z'$$

an, so wird die Integration nach $z'$ ausführbar, und man erhält:

$$(8^d.) \qquad J_\mu(\eta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi\cos\mu\pi i}\int_0^\pi (\cos\eta i + i\sin\eta i\cos t)^{\mu i - \frac{1}{2}}\, dt.$$

Durch die Substitution $\cos\eta i + i\sin\eta i\cos t = e^{\alpha}$, welche nur für $\eta = 0$ unstatthaft ist, erweist sich dieser Ausdruck als identisch mit dem in ($8^b$.) befindlichen, dessen Gültigkeit somit ebenfalls bewiesen ist.

Aus dem in ($8^c$.) enthaltenen Ausdrucke der Function $J_\mu(\eta)$ ergiebt sich am leichtesten, dass dieselbe der Differentialgleichung

$$(11.)\qquad \frac{1}{\sin\eta i}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\sin\eta i\frac{\partial J_\mu(\eta)}{\partial\eta}\right)+(\mu^2+\tfrac{1}{4})J_\mu(\eta) \;=\; 0,$$

und folglich jedes Element des Integrales in (9.) der Gleichung (7.), Genüge leistet, ferner dass sie nebst ihren sämmtlichen nach $\cos\eta i$ genommenen Differentialquotienten bis $\eta=0$ inclusive stetig bleibt, und endlich, dass sie sich in eine nach Potenzen der positiven Grösse $h=\frac{1}{2}(\cos\eta i-1)$ fortschreitende, jedoch nur von $h=0$ bis $h=1$ convergente Reihe entwickeln lässt:

$$J_\mu(\eta) \;=\; \frac{\sqrt{2}}{\cos\mu\pi i}\left[1-\frac{(4\mu^2+1^2)h}{2^2}+\frac{(4\mu^2+1^2)(4\mu^2+3^2)h^2}{2^2 4^2}-\cdots\right].$$

Hieraus lässt sich der enge Zusammenhang der Transcendenten $J_\mu(\eta)$ sowohl mit der *Bessel*schen Function $J(x)$ als auch der *Laplace*schen $P_n(\cos\theta)$ sofort erkennen. Nimmt man nämlich $\mu$ unendlich gross und $h$ unendlich klein, jedoch so, dass $4\mu^2 h$ einen endlichen Werth $x^2$ behält, so geht die in der Klammer befindliche Reihe über in $J(x)$; setzt man dagegen $2\mu i-1=2n$ und $h=-\sin^2\frac{1}{2}\theta$ (d. h. $\eta i=\theta$), so verwandelt sie sich in die von *Dirichlet* gegebene, nach Potenzen von $\sin\frac{1}{2}\theta$ fortschreitende Entwicklung von $P_n(\cos\theta)$.

## §. 2.

### Das Potential der durch einen Massenpunkt erzeugten Vertheilung, dargestellt mit Hülfe der Transcendenten $J_\mu(\eta)$.

Die Gleichungen der den Leiter begrenzenden Kalotten seien $\omega=\gamma$ und $\omega=\beta$, und es sei $\gamma<\beta$, so dass, wenn $\gamma$ und $\beta$, der bisherigen Festsetzung über das Intervall von $\omega$ entsprechend, beide zwischen 0 und $2\pi$ gewählt werden, die zweite Kalotte stets unterhalb der ersten liegt. Die Bedingung dafür, dass ein Punkt $(\vartheta,\varphi,\omega)$ innerhalb des Leiters liege, wird durch die Ungleichheit $\gamma<\omega<\beta$ ausgedrückt, und der Punkt liegt ausserhalb desselben, wenn $\omega$ entweder zwischen $\beta$ und $2\pi$ oder zwischen 0 und $\gamma$ enthalten ist. Hiernach müsste die Variable $\omega$ beim Durchgange des Punktes durch das Unendliche oder den den Rand umgebenden Theil der $yz$-Ebene plötzlich von einem der Werthe $2\pi$ und 0 auf den andern überspringen; allein diese Unstetigkeit, welche in der Rechnung zu sehr lästigen Unterscheidungen Veranlassung geben würde, lässt sich vermeiden, wenn man den Winkel $\omega$, der nach (1.) nur bis auf ein beliebiges zu addirendes Multiplum von $2\pi$ als Function der rechtwinkligen Coordinaten bestimmt ist, nachdem er den Werth $2\pi$ erreicht hat, von da sich continuirlich bis $2\pi+\gamma$ ändern lässt, so dass für Punkte ausserhalb des Leiters die eine Ungleichheit $\beta<\omega<2\pi+\gamma$ be-

steht. Jetzt steht auch nichts im Wege, der Constanten $\beta$ einen Werth zu ertheilen, der $> 2\pi$ aber $< 2\pi+\gamma$ ist, und in diesem Falle besitzt der Leiter unendlich grosse Dimensionen, während der nichtleitende Raum von der Kalotte $\gamma$ und der jetzt oberhalb dieser befindlichen Kalotte $\beta$ vollständig eingeschlossen wird. *Dadurch wird es möglich, die in der Einleitung aufgestellten Probleme* I. *und* II. *gleichzeitig zu behandeln;* es werden sich nämlich die nachfolgenden Entwicklungen auf das erste oder zweite beziehen, je nachdem $\beta$ zwischen $\gamma$ und $2\pi$ oder zwischen $2\pi$ und $2\pi+\gamma$ liegt. Wir setzen also ein für alle Mal fest, dass:

$$0 < \gamma < 2\pi, \qquad \gamma < \beta < 2\pi+\gamma,$$

ferner dass für ausserhalb des Leiters gelegene Punkte:

$$(12.) \qquad \beta < \omega < 2\pi+\gamma,$$

und endlich nehmen wir für Punkte in der leitenden Substanz, je nachdem das Eine oder das Andere vortheilhafter ist:

$$(13.) \qquad \gamma < \omega < \beta \text{ oder } 2\pi+\gamma < \omega < 2\pi+\beta.$$

Die Coordinaten des erregenden Punktes, in welchem man sich die Einheit der negativen Elektricität concentrirt denkt, seien $\vartheta_1$, $\varphi_1$, $\omega_1$; da dieser Punkt ausserhalb des Leiters liegen muss, so muss $\omega_1$ zwischen $\beta$ und $2\pi+\gamma$ enthalten sein. Die Lösung der Aufgaben I. und II. erfordert nun die Kenntniss eines Potentiales $V$, welches von einer nur auf der Oberfläche des Leiters befindlichen Massenschicht herrührt und für jeden beliebigen Punkt der Oberfläche dem reciproken Werthe $\left(\frac{1}{r}\right)$ seines Abstandes von $(\vartheta_1, \varphi_1, \omega_1)$ gleich wird. Ich behaupte, dass dieses Potential $V$, bezogen auf irgend einen Punkt $(\vartheta, \varphi, \omega)$, sich für den ganzen Raum durch die folgenden Formeln darstellen lässt:

$$(14.) \quad \begin{cases} V = V_\beta + V_\gamma, \\ V_\beta = \frac{pp_1}{a\sqrt{2}} U_\beta, \qquad V_\gamma = \frac{pp_1}{a\sqrt{2}} U_\gamma, \\ U_\beta = \int_0^\infty A_\beta \cos(\pi-\omega+\beta)\mu i \, J_\mu(\eta)\, d\mu, \quad (\beta \leqq \omega \leqq 2\pi+\beta), \\ U_\gamma = \int_0^\infty A_\gamma \cos(\pi-\omega+\gamma)\mu i \, J_\mu(\eta)\, d\mu, \quad (\gamma \leqq \omega \leqq 2\pi+\gamma), \end{cases}$$

wenn $A_\beta$ und $A_\gamma$ passend als Functionen von $\mu$ bestimmt werden, und wenn man, den beigefügten Ungleichheiten entsprechend, für innere Punkte in $U_\beta$ die zweite, in $U_\gamma$ die erste der Ungleichheiten (13.), für äussere Punkte dagegen in beiden Ausdrücken die Ungleichheit (12.) bestehen lässt. Um diese Behauptung zu rechtfertigen, soll zunächst gezeigt werden, dass in der That

$A_\beta$ und $A_\gamma$ sich so bestimmen lassen, dass die auf die Oberfläche bezügliche Bedingung befriedigt wird. Lässt man den variablen Punkt $(\vartheta, \varphi, \omega)$, z. B. von aussen her, in die eine oder die andere der begrenzenden Kalotten rücken, und beachtet, dass die Gleichung (9.) des vorigen §. auf die Werthe $\omega = \beta$ und $\omega = \gamma$ anwendbar ist, weil die Differenzen $\omega_1 - \beta$ und $\omega_1 - \gamma$ positiv und $< 2\pi$ sind, so sieht man, dass die folgenden beiden Gleichungen zu erfüllen sind:

$$(U_\beta + U_\gamma)_{(\omega=\beta)} = P^{-1}_{(\omega=\beta)} = \int_0^\infty \cos(\pi - \omega_1 + \beta)\mu i\, J_\mu(\eta)\, d\mu,$$

$$(U_\beta + U_\gamma)_{(\omega=2\pi+\gamma)} = P^{-1}_{(\omega=\gamma)} = \int_0^\infty \cos(\pi - \omega_1 + \gamma)\mu i\, J_\mu(\eta)\, d\mu,$$

und diese werden erfüllt, wenn:

$$A_\beta \cos\pi\mu i + A_\gamma \cos(\pi + \gamma - \beta)\mu i = \cos(\pi - \omega_1 + \beta)\mu i,$$

$$A_\beta \cos(\pi + \gamma - \beta)\mu i + A_\gamma \cos\pi\mu i = \cos(\pi - \omega_1 + \gamma)\mu i.$$

Hieraus folgt:

$$(15.) \qquad A_\beta = \frac{\sin(2\pi + \gamma - \omega_1)\mu i}{\sin(2\pi + \gamma - \beta)\mu i}, \qquad A_\gamma = \frac{\sin(\omega_1 - \beta)\mu i}{\sin(2\pi + \gamma - \beta)\mu i}.$$

Nachdem nun $A_\beta$ und $A_\gamma$ so bestimmt worden sind, dass $V$ sich an der Oberfläche auf den vorgeschriebenen Werth reducirt, so wird die ausgesprochene Behauptung ihrem ganzen Inhalte nach bewiesen sein, sobald noch nachgewiesen sein wird, dass $V_\beta$ und $V_\gamma$ für den ganzen Raum resp. die Potentiale zweier Massenschichten vorstellen, von denen die erste nur auf der Kalotte $\beta$, die zweite nur auf der Kalotte $\gamma$ vertheilt ist. Hierbei genügt es aber offenbar, sich auf die Betrachtung von $V_\beta$ zu beschränken.

1. Die Function $\cos(\pi - \omega + \beta)\mu i J_\mu(\eta)$ ist endlich und stetig in Bezug auf die Variablen $\mu$, $\omega$, $\eta$, sie wird am Rande, wo $\vartheta$ und folglich auch $\eta = \infty$, gleich Null, und sie hat zu beiden Seiten der Kalotte, d. h. für $\omega = \beta$ und $\omega = 2\pi + \beta$, einen und denselben Werth. Der Factor $A_\beta$ ist ein echter Bruch und convergirt für $\mu = \infty$ hinreichend stark gegen Null, damit das Integral, durch welches $U_\beta$ in (14.) definirt ist, stets einen bestimmten Sinn behalte. Die Grösse $p$ ist stetig und endlich, ausser in unendlicher Nähe des Randes, und verschwindend klein für unendlich entfernte Punkte, weil für diese $\vartheta$ und $\omega$ sich resp. unendlich wenig von 0 und $2\pi$ unterscheiden. Ferner ist auch $\eta$ mit Ausnahme des Randes endlich und eine stetige Function nicht allein der Variablen $\vartheta$ und $\varphi$ sondern auch der rechtwinkligen Coordinaten, indem es auf der $x$-Achse, wo $\vartheta = 0$ und $\varphi$ unbestimmt, nach (6.) von $\varphi$ unabhängig ist. Aus dem Gesagten geht hervor, dass $V_\beta$ im Unendlichen verschwindet

und im ganzen Raume sich stetig ändert, wofern nicht etwa am Rande, wo $\vartheta = \infty$ und $\omega$ unbestimmt ist und $V_\beta$ unter der Form $\infty . 0$ erscheint, eine Ausnahme eintritt. Wir wollen aber zeigen, dass auch am Rande $V_\beta$ einen endlichen und eindeutigen Werth behält, und zu diesem Zwecke haben wir nur nachzuweisen, dass das Product $e^{\frac{1}{2}\eta} U_\beta$ für $\eta = \infty$ gegen einen festen und von $\omega$ unabhängigen Werth convergirt. Multiplicirt man beide Seiten von (8".) mit $e^{\frac{1}{2}\eta}$ und verwandelt $\alpha$ in $\eta + \alpha$, so wird, bis auf verschwindend kleine Grössen, für $\eta = \infty$:

$$e^{\frac{1}{2}\eta} J_\mu(\eta) = \frac{2\sqrt{2}\,i}{\pi \sin \mu \pi i} \int_0^\infty \frac{\sin \mu(\eta + \alpha)\, d\alpha}{\sqrt{e^\alpha - 1}},$$

und daher:

$$e^{\frac{1}{2}\eta} U_\beta = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\sqrt{e^\alpha - 1}} \int_0^\infty A_\beta \cos(\pi - \omega + \beta)\mu i \frac{2 i \sin \mu(\eta + \alpha)}{\sin \mu \pi i}\, d\mu.$$

Theilt man das Integral nach $\mu$ in zwei andere mit den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$ und $\infty$, so verschwindet das zweite für $\eta = \infty$, und das erste reducirt sich nach einem Theorem von *Dirichlet* auf den Werth von $A_\beta$ für $\mu = 0$; es wird also für $\eta = \infty$:

$$e^{\frac{1}{2}\eta} U_\beta = \frac{\sqrt{2}}{\pi} A_\beta(o) \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\sqrt{e^\alpha - 1}} = \sqrt{2} \cdot \frac{2\pi + \gamma - \omega}{2\pi + \gamma - \beta},$$

ist somit in der That endlich und von $\omega$ unabhängig.

2. Es ist auch leicht einzusehen, dass die ersten nach $x$, $y$, $z$ genommenen Differentialquotienten von $V_\beta$ nur beim Durchgange durch die Kalotte $\beta$ eine Stetigkeitsunterbrechung erleiden, und dass sie nur am Rande unendlich grosse Werthe annehmen können.

3. Da $J_\mu(\eta)$ der Differentialgleichung (11.) genügt, so genügt $U_\beta$ der Gleichung (5.) und folglich $V_\beta$ der Gleichung (4.) oder $\Delta^2 V_\beta = 0$.

Hiernach besitzt in der That $V_\beta$ die characteristischen Eigenschaften des Potentials einer auf der Kalotte $\beta$ vertheilten Massenschicht, und die Gleichungen (14.) und (15.) enthalten, wie behauptet wurde, die Lösung der Aufgabe.

## §. 3.

### Andere Ausdrücke für das Potential, welche die Transcendente $J_\mu(\eta)$ nicht enthalten. Bestimmung der Dichtigkeit.

Um die Ausdrücke von $U_\beta$ und $U_\gamma$ in (14.) in andere überzuführen, in denen $J_\mu(\eta)$ nicht mehr vorkommt, sollen $A_\beta$ und $A_\gamma$ in geeigneter Weise

durch bestimmte Integrale ersetzt werden. Als Ausgangspunkt kann die bekannte, für $-1 < \alpha < 1$ und $-\pi < \delta < \pi$ gültige Formel dienen:

$$\frac{\sin\alpha\delta}{\sin\alpha\pi} = \frac{\sin\delta}{\pi}\int_0^1 \frac{x^\alpha + x^{-\alpha}}{x+2\cos\delta+x^{-1}}\,\frac{dx}{x}.$$

Dieselbe bleibt, wie sich in üblicher Weise rechtfertigen lässt, auch dann noch richtig, wenn $\alpha$ eine complexe Grösse, deren reeller Theil zwischen $-1$ und $1$ liegt, oder auch eine rein imaginäre Grösse bedeutet. Führt man also statt $\alpha\delta$ und $\alpha\pi$ die Werthe:

$$\alpha\delta = (2\pi+\gamma-\omega_1)\mu i, \qquad \alpha\pi = (2\pi+\gamma-\beta)\mu i$$

ein, macht noch zur Abkürzung:

$$(16.)\qquad 2\pi+\gamma-\beta = \frac{\pi}{n},$$

so dass:

$$\delta = n(2\pi+\gamma-\omega_1) = \pi - n(\omega_1-\beta),$$

und setzt endlich $\log x = -n\lambda$, so erhält man:

$$A_\beta = \frac{n}{\pi}\sin n(\omega_1-\beta)\int_0^\infty \frac{\cos\lambda\mu\,d\lambda}{\cos n\lambda i - \cos n(\omega_1-\beta)}.$$

Für $A_\gamma$ gilt ein ganz ähnlicher Ausdruck, der sich von dem vorstehenden nur dadurch unterscheidet, dass er unter dem Integralzeichen im Nenner statt der Differenz der beiden Cosinus die Summe eben derselben enthält. Nach Einführung dieser bestimmten Integrale für $A_\beta$ und $A_\gamma$ in (14.) wird die Integration nach $\mu$ vermittelst der Gleichung (10.), worin $\psi$ resp. $=\omega-\beta$ und $=\omega-\gamma$ zu setzen, ausführbar, und man gelangt zu dem Resultate:

$$(17.)\quad \begin{cases} U_\beta = \dfrac{n}{2\pi}\sin n(\omega_1-\beta)\displaystyle\int_0^\infty \frac{d\lambda\,\Sigma(\cos\eta i - \cos(\omega-\beta+\tau\lambda i))^{-\frac{1}{2}}}{\cos n\lambda i - \cos n(\omega_1-\beta)}, \\[2ex] U_\gamma = \dfrac{n}{2\pi}\sin n(\omega_1-\beta)\displaystyle\int_0^\infty \frac{d\lambda\,\Sigma(\cos\eta i - \cos(\omega-\gamma+\tau\lambda i))^{-\frac{1}{2}}}{\cos n\lambda i + \cos n(\omega_1-\beta)}. \end{cases}$$

Diesen beiden Ausdrücken sollen jetzt, wenigstens für ausserhalb des Leiters gelegene Punkte, zwei andere für die Summe und die Differenz von $U_\beta$ und $U_\gamma$ an die Seite gestellt werden, bei welchen unter dem Integralzeichen statt des complexen Arguments der $(-\frac{1}{2})^{\text{ten}}$ Potenz ein reelles auftritt, und welche einige specielle Eigenschaften des Potentials, die aus (17.) nicht unmittelbar ersichtlich sind, leicht erkennen lassen. Man könnte die in Rede stehenden Darstellungen durch Transformation von (17.) mittels imaginärer Substitutionen ableiten, gelangt aber noch einfacher auf folgendem Wege zum Ziel. Nach-

dem man für $A_\beta$ und $A_\gamma$ ihre Werthe aus (15.) in die beiden letzten der Gleichungen (14.) eingesetzt hat, addire man diese Gleichungen, was für äussere Punkte ohne Weiteres erlaubt ist, weil dann bei beiden für $\omega$ dieselbe Ungleichheit gilt; von der Summe subtrahire man die Gleichung (9.), wodurch die Bedingung $\omega_1-\omega>0$ eingeführt wird: man findet dann nach einigen leichten Umformungen der Producte aus cos und sin:

$$U_\beta+U_\gamma-P^{-1}$$
$$=\int_0^\infty \frac{\cos(2\pi+\gamma+\beta-\omega_1-\omega)\mu i-\cos(2\pi+\gamma-\beta-\omega_1+\omega)\mu i}{\sin(2\pi+\gamma-\beta)\mu i}\sin\pi\mu i J_\mu(\eta)\,d\mu.$$

Ist aber $\omega_1<\omega$, so muss man in (9.) $\omega_1-\omega$ in $\omega-\omega_1$ verwandeln und kommt dann zu einem Ausdrucke, der sich von dem vorhergehenden nur durch Vertauschung von $\omega_1$ und $\omega$ unterscheidet. Substituirt man nun für $\sin\pi\mu i J_\mu(\eta)$ seinen Werth aus ($8^a$.) und setzt:

$$e^{(2\pi+\gamma-\beta)\mu}=e^{\frac{1}{n}\pi\mu}=t^{-\frac{1}{2}},$$

so wird die Integration nach $t$ vermöge einer von *Euler* herrührenden Integralformel ausführbar, und es ergiebt sich:

$$(18.)\quad\begin{cases} U_\beta+U_\gamma = P^{-1}-\dfrac{n}{\pi i}\displaystyle\int_\eta^\infty D.(\cos\alpha i-\cos\eta i)^{-\frac{1}{2}}d\alpha,\\[2ex] D = \dfrac{\sin n\alpha i}{\cos n\alpha i-\cos n(\omega_1-\omega)}-\dfrac{\sin n\alpha i}{\cos n\alpha i-\cos n(\omega_1+\omega-2\beta)}.\end{cases}$$

Dasselbe Resultat gilt auch für $\omega_1<\omega$, weil $D$ durch die Vertauschung von $\omega$ und $\omega_1$ ungeändert bleibt, und es gilt auch noch für $\omega_1=\omega$, wenn nicht gleichzeitig $\eta=0$, in welchem letzteren Falle es unter der Form $\infty-\infty$ erscheint. Ersetzt man übrigens $P^{-1}$ durch das bestimmte Integral

$$P^{-1}=\frac{1}{\pi i}\int_\eta^\infty\frac{(\cos\alpha i-\cos\eta i)^{-\frac{1}{2}}\sin\alpha i\,d\alpha}{\cos\alpha i-\cos(\omega_1-\omega)}$$

und bringt dies mit dem in (18.) stehenden unter dasselbe Integralzeichen, so erhält man eine Formel, die auch dann noch gilt, wenn gleichzeitig $\omega_1=\omega$ und $\eta=0$, also $\vartheta=\vartheta_1$ und $\varphi=\varphi_1$, d. h. wenn der Punkt $(\vartheta,\varphi,\omega)$ mit $(\vartheta_1,\varphi_1,\omega_1)$ zusammenfällt.

In ganz ähnlicher Weise, und zwar mit Benutzung des in ($8^b$.) enthaltenen Ausdrucks von $J_\mu(\eta)$, findet man für die Differenz von $U_\beta$ und $U_\gamma$:

$$(19.)\quad\begin{cases} U_\beta-U_\gamma = \sigma P^{-1}+\dfrac{n}{\pi}\displaystyle\int_0^\eta S.(\cos\eta i-\cos\alpha i)^{-\frac{1}{2}}d\alpha,\\[2ex] S = \dfrac{\sin n(\omega_1-\omega)}{\cos n\alpha i-\cos n(\omega_1-\omega)}+\dfrac{\sin n(\omega_1+\omega-2\beta)}{\cos n\alpha i-\cos n(\omega_1+\omega-2\beta)},\end{cases}$$

worin $\sigma = -1$ oder $= +1$ zu setzen, je nachdem $\omega_1 - \omega$ positiv oder negativ, und $\eta > 0$ vorausgesetzt ist. Für $\eta = 0$ hat man statt des Integrales den Grenzwerth zu nehmen, dem es für ein unendlich kleines $\eta$ zustrebt, und welcher sich mit Hülfe der Substitution $\alpha = \eta\alpha'$ ermitteln lässt. Man findet auf diese Weise:

$$(U_\beta - U_\gamma)_{(\eta=0)} = -\frac{1}{\sqrt{2}\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)} + \frac{n}{\sqrt{2}}[\cot\tfrac{1}{2}n(\omega_1-\omega) + \cot\tfrac{1}{2}n(\omega_1+\omega-2\beta)],$$

welche Grösse offenbar auch für ein unendlich kleines positives oder negatives $\omega_1 - \omega$ sich einer und derselben endlichen Grenze nähert, wie es sein muss. Uebrigens kann man, um die Analogie zwischen (19.) und (18.) vollständig zu machen, für $\sigma P^{-1}$ das bestimmte Integral

$$\sigma P^{-1} = -\frac{2}{\pi}\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega)\int_0^{\eta}\frac{(\cos\eta i - \cos\alpha i)^{-\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}\alpha i\, d\alpha}{\cos\alpha i - \cos(\omega_1-\omega)}$$

setzen, auf welches man durch Verbindung von (9.) und (8$^b$.) geführt wird, und welches sich auch direct durch Rationalmachung der Wurzelgrösse berechnen lässt.

Es bleibt jetzt noch übrig, die Dichtigkeit $k$ der elektrischen Belegung zu bestimmen. Hierzu dient die Gleichung:

$$-4\pi k = \frac{\partial(V - r^{-1})}{\partial N} = \frac{pp_1}{a\sqrt{2}}\,\frac{\partial(U_\beta + U_\gamma - P^{-1})}{\partial N},$$

worin $N$ die nach dem nichtleitenden Raume hin gerichtete Oberflächennormale bedeutet und nach vollzogener Differentiation $\omega = \beta$ oder $= 2\pi + \gamma$ gesetzt werden muss, je nachdem es sich um die Dichtigkeit für Punkte der Kalotte $\beta$ oder der Kalotte $\gamma$ handelt. Unterscheidet man diese Werthe von $k$ durch die Zeichen $k_\beta$ und $k_\gamma$, setzt:

$$\sqrt{\cos\vartheta i - \cos\beta} = p_\beta, \qquad \sqrt{\cos\vartheta i - \cos\gamma} = p_\gamma,$$

und beachtet, dass für die erste und die zweite Kalotte respective

$$p_\beta^2\,\partial N = a\,\partial\omega \quad \text{und} \quad p_\gamma^2\,\partial N = -a\,\partial\omega,$$

so ergiebt sich unter Anwendung von (18.) sofort:

$$(20.)\quad \begin{cases} k_\beta = \dfrac{p_1 n^2 \sin n(\omega_1-\beta)}{2\sqrt{2}a^2\pi^2 i}\cdot p_\beta^3 \displaystyle\int_\eta^\infty \frac{d\alpha \sin n\alpha i(\cos\alpha i - \cos\eta i)^{-\frac{1}{2}}}{(\cos n\alpha i - \cos n(\omega_1-\beta))^2}, \\[2ex] k_\gamma = \dfrac{p_1 n^2 \sin n(\omega_1-\beta)}{2\sqrt{2}a^2\pi^2 i}\cdot p_\gamma^3 \displaystyle\int_\eta^\infty \frac{d\alpha \sin n\alpha i(\cos\alpha i - \cos\eta i)^{-\frac{1}{2}}}{(\cos n\alpha i + \cos n(\omega_1-\beta))^2}. \end{cases}$$

Von besonderem Interesse ist es, das Verhalten von $k$ für Punkte, die dem

Rande sehr nahe liegen, kennen zu lernen. Nun bemerkt man leicht, dass man, wenn $\varepsilon$ einen gewissen Factor bezeichnet, der sich für ein ins Unendliche wachsendés $\vartheta$ unbegrenzt der Einheit nähert,

$$k_\beta = \varepsilon \frac{p_1 n^2 \sin n(\omega_1 - \beta)}{2\sqrt{2a^2\pi^2}} \cdot e^{\frac{1}{2}\vartheta} \int_\eta^\infty \frac{e^{-n\alpha}\,d\alpha}{\sqrt{e^\alpha - e^\eta}}$$

setzen darf. Das hierin vorkommende Integral wird durch die Substitution $\alpha = \eta + \log(1+t)$ in die Form eines *Euler*schen Integrals zweiter Gattung gebracht und nimmt mit dem unmittelbar davorstehenden Factor vereinigt für $\vartheta = \infty$ den Werth an:

$$\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)}(\cos\vartheta_1 i + i\sin\vartheta_1 i\cos(\varphi-\varphi_1))^{-n-\frac{1}{2}}.e^{(1-n)\vartheta}.$$

Die Dichtigkeit für einen Punkt in der Nähe des Randes ist also gleich dem Producte einer endlichen Grösse in die $(n-1)^{\text{te}}$ Potenz des kürzesten Abstandes des Punktes vom Rande; sie ist daher am Rande unendlich gross, wenn die Zahl $n$, deren kleinster Werth $\frac{1}{2}$ ist, zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 liegt, sie bleibt endlich für $n = 1$, und sie ist gleich Null, wenn $n > 1$. Nach (16.) ist $n$ der Quotient von $\pi$ und $2\pi+\gamma-\beta$, und die letztere Grösse bedeutet den äusseren Neigungswinkel der in einem Punkte des Randes an die Oberfläche gelegten beiden Tangentialebenen. Es tritt also der erste oder der letzte der drei unterschiedenen Fälle ein, je nachdem dieser äussere Winkel $>\pi$ oder $<\pi$, d. h. je nachdem der Leiter einen scharfen oder einspringenden Rand hat, und der zweite Fall findet nur dann statt, wenn der Leiter eine volle Kugel oder ein unendlich grosser Körper mit einer kugelförmigen Höhlung ist.

## §. 4.

### Specielle Fälle.

Wenn $n$ eine ganze Zahl ist, so lassen sich die beiden Bestandtheile von $D$ in (18.) in Partialbrüche zerlegen vermittelst der Formel

$$\frac{\sin n\alpha i}{\cos n\alpha i - \cos n\Omega} = \frac{1}{n}\sum_{s=0}^{s=n-1}\frac{\sin\alpha i}{\cos\alpha i - \cos\left(\Omega + \frac{1}{n}2s\pi\right)},$$

und man findet dann durch Ausführung der Integration:

$$U_\beta + U_\gamma$$

$$= -\sum_1^{n-1}\left(\cos\eta i - \cos\left(\omega-\omega_1+\frac{1}{n}2s\pi\right)\right)^{-\frac{1}{2}} + \sum_0^{n-1}\left(\cos\eta i - \cos\left(\omega+\omega_1-2\beta+\frac{1}{n}2s\pi\right)\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

19 *

Hieraus erkennt man leicht den folgenden Satz:

*Ist $n$ eine ganze Zahl, d. h. der äussere Winkel am Rande der Kalotten ein aliquoter Theil von $\pi$, so ist die Wirkung der durch einen Punkt* $(\vartheta_1, \varphi_1, \omega_1)$ *von der Masse* $-1$ *erregten Vertheilung nach aussen hin äquivalent der Wirkung von* $2n-1$ *im Innern gelegenen Punkten, welche die Coordinaten*

$$\vartheta_1, \varphi_1, \omega_1 - \frac{1}{n} 2s\pi, (s=1,2,\dots n-1) \text{ und } \vartheta_1, \varphi_1, 2\beta - \omega_1 - \frac{1}{n} 2s\pi, (s=0,1,\dots n-1)$$

*haben, und in denen respective die Elektricitätsmengen*

$$-p_1\left(\cos\vartheta_1 i - \cos\left(\omega_1 - \frac{1}{n} 2s\pi\right)\right)^{-\frac{1}{2}} \text{ und } +p_1\left(\cos\vartheta_1 i - \cos\left(2\beta - \omega_1 - \frac{1}{n} 2s\pi\right)\right)^{-\frac{1}{2}}$$

*concentrirt sind.*

Werden die zu den beiden Kalotten gehörigen Kugelradien unendlich gross, während irgend eine an die Randkurve gelegte Tangente im Endlichen festgehalten wird, so geht der Leiter in einen von zwei sich schneidenden Ebenen begrenzten Körper über, jene $2n-1$ Punkte fallen mit den Spiegelbildern des erregenden Punktes zusammen, und die ihnen mitzutheilenden Elektricitätsmengen sind abwechselnd $= \pm 1$, ein Resultat, dessen Richtigkeit auch ohne jede Rechnung einleuchtend ist. Man möge aber nicht unbemerkt lassen, dass für ein nicht ganzzahliges $n$ die Construction der Spiegelbilder für die Lösung der Aufgabe von keinem Nutzen ist, weil dann ein Theil der Bilder ausserhalb des Leiters fällt.

Noch ist ein anderer einfacher Fall, *in welchem die Integration in* (18.) *sich ausführen lässt,* hervorzuheben, nämlich derjenige, wo *$n$ ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{2}$.* Hier ergiebt sich, wenn man zur Abkürzung:

$$\cos\tfrac{1}{2}\left(\omega_1 - \omega + \frac{1}{2n} 4s\pi\right) = \cos\tfrac{1}{2}\eta i . \cos\Phi_s,$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\left(\omega_1 + \omega - 2\beta + \frac{1}{2n} 4s\pi\right) = \cos\tfrac{1}{2}\eta i . \cos\Psi_s$$

setzt und $\Phi_s$ und $\Psi_s$ zwischen 0 und $\pi$ wählt:

$$U_\beta + U_\gamma = \frac{1}{\pi\sqrt{2\cos\frac{1}{2}\eta i}}\left[\frac{\Phi_0}{\sin\Phi_0} - \sum_1^{2n-1}\frac{\pi - \Phi_s}{\sin\Phi_s} + \sum_0^{2n-1}\frac{\pi - \Psi_s}{\sin\Psi_s}\right].$$

Ist $n = \frac{1}{2}$, d. h. $\beta = \gamma$, fallen also die beiden den Leiter begrenzenden Kalotten in eine einzige zusammen, so muss die erste der beiden vorstehenden Summen fortfallen, und die zweite ist auf das dem Werthe $s=0$ entsprechende Glied zu beschränken.

## §. 5.

Die Vertheilung einer gegebenen Elektricitätsmenge ohne Einwirkung äusserer Kräfte.

Es bezeichne, wie bisher, $V$ das Potential der dem Oberflächenwerthe $r^{-1}$ entsprechenden Belegung; dagegen sei $v$ dasjenige Flächenpotential, welches an der Oberfläche sich auf den constanten Werth 1 reducirt, d. h. von einer gewissen Elektricitätsmenge herrührt, die dem Leiter mitgetheilt ist und sich frei auf ihm verbreiten kann. Die Dimensionen des Leiters dürfen jetzt nicht unendlich gross sein, d. h. es muss $\beta < 2\pi$ vorausgesetzt werden. Der kleinste Abstand des Punktes $(\vartheta_1, \varphi_1, \omega_1)$ von der Oberfläche sei $r_0$, der grösste $r_2$, und der Abstand von einem festen Punkte im Innern des Leiters sei $= r_1$. Dann sind die Differenzen

$$v - r_0 V \quad \text{und} \quad r_2 V - v,$$

welche eben so wie $V$ und $v$ die Potentiale gewisser Flächenbelegungen vorstellen, an der Oberfläche respective zwischen den Werthen 0 und $1 - \frac{r_0}{r_2}$, 0 und $\frac{r_2}{r_0} - 1$ enthalten, also nirgends negativ. Deshalb können jene Differenzen, wie nach *Gauss* *) leicht in aller Strenge bewiesen werden kann, auch im ganzen Raume nirgends negative Werthe annehmen, und es ist demnach stets:

$$\frac{r_1}{r_0} v \geqq r_1 V \geqq \frac{r_1}{r_2} v.$$

Lässt man nun den erregenden Punkt $(\vartheta_1, \varphi_1, \omega_1)$ ins Unendliche rücken, (d. h. $\vartheta_1 = 0$, $\omega_1 = 2\pi$ werden), so nähern sich die Coefficienten von $v$ beide unbegrenzt der Einheit, und es strebt also $r_1 V$ für $r_1 = \infty$ einem bestimmten Grenzwerthe zu, der von $v$ nicht verschieden ist. Beachtet man noch, dass nach (2.) $\lim r_1 p_1 = a\sqrt{2}$, so ergiebt sich mit Rücksicht auf den in (14.) enthaltenen Zusammenhang zwischen $V$ und $U_\beta + U_\gamma$:

$$(21.) \qquad v = p(U_\beta + U_\gamma)_{(\vartheta_1 = 0,\, \omega_1 = 2\pi)}.$$

Die Substitution der Werthe 0 und $2\pi$ statt $\vartheta_1$ und $\omega_1$ in den für $U_\beta$ und $U_\gamma$ gegebenen Formeln lässt sich ohne Weiteres ausführen, und es ist dabei nur zu beachten, dass dadurch $\eta = \vartheta$ wird. Ebenso verhält es sich mit den Formeln für die Dichtigkeit, und man erhält z. B.:

$$(22.) \qquad k_\beta = \frac{n^2 \sin n\gamma}{2 a \pi^2 i} p_\beta^3 \int_\vartheta^\infty \frac{d\alpha \sin n\alpha i (\cos\alpha i - \cos\vartheta i)^{-\frac{1}{2}}}{(\cos n\alpha i + \cos n\gamma)^2}.$$

---

*) Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungs-Kräfte. (Art. 26.)

Um die Mengen $m_\beta$ und $m_\gamma$ der auf den Kalotten $\beta$ und $\gamma$ vertheilten Elektricitäten zu bestimmen, kann die Bemerkung dienen, dass die zu einer Belegung irgend eines endlichen Flächenstücks gehörige Elektricitätsmenge gleich ist dem Potentiale der Belegung in Bezug auf einen unendlich entfernten Punkt multiplicirt mit der Entfernung ($\varrho$) des letzteren von einem im Endlichen gelegenen festen Punkte. Es ist also:

$$m_\beta = \varrho p U_\beta, \qquad m_\gamma = \varrho p U_\gamma,$$

wenn man nicht bloss $\vartheta_1 = 0$, $\omega_1 = 2\pi$, sondern auch $\vartheta = 0$, $\omega = 2\pi$ nimmt, wodurch $\varrho p = a\sqrt{2}$ wird. Unter Anwendung der Gleichungen (18.) und (19.) und mit Benutzung der dort resp. über $P^{-1}$ und den Fall $\eta = 0$ gemachten Bemerkungen, erhält man somit:

$$(23.) \quad \begin{cases} m_\beta + m_\gamma = \dfrac{a}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \left(-\cot\tfrac{1}{2}\alpha i + n\cot\tfrac{1}{2}n\alpha i + \frac{n\sin n\alpha i}{\cos n\alpha i - \cos 2n\gamma}\right)\frac{d\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha i}, \\ m_\beta - m_\gamma = -an\cot n\gamma. \end{cases}$$

Von diesen Ausdrücken ist der zweite durch seine Einfachheit bemerkenswerth, und das Integral in dem ersten lässt sich wenigstens dann auf Elementarfunctionen zurückführen, wenn $n$ ein rationaler Bruch ist.

Danzig, im Juli 1867.

# Ueber die Curven der Haupttangenten bei windschiefen Flächen.

(Von Herrn *A. Clebsch* zu Giessen.)

---

Betrachtet man eine windschiefe Fläche, entstanden durch die Bewegung einer Geraden über zwei Leitcurven, welche eindeutig auf einander bezogen sind, so kann man die Coordinaten eines Punktes der Fläche folgendermassen darstellen. Durch $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$, $\xi_4$ bezeichne ich die Coordinaten eines Punktes der einen Leitcurve, durch $\eta_1$, $\eta_2$, $\eta_3$, $\eta_4$ die des entsprechenden Punktes der anderen. Beide denke ich mir als Functionen eines Parameters $\lambda$, dessen für beide gleich anzunehmender Werth das Entsprechen ausdrückt. Die Coordinaten eines Punktes der Fläche sind dann gegeben durch die Gleichungen:

$$(1.)\quad \begin{cases} \varrho x_1 = \xi_1+\mu\eta_1, \\ \varrho x_2 = \xi_2+\mu\eta_2, \\ \varrho x_3 = \xi_3+\mu\eta_3, \\ \varrho x_4 = \xi_4+\mu\eta_4, \end{cases}$$

wo $\varrho$ eine willkürliche Grösse bedeutet. Setzt man für $\mu$ alle verschiedenen Werthe, indem man $\lambda$ constant lässt, so erhält man die verschiedenen Punkte einer Erzeugenden.

Sieht man vermittelst der Gleichungen (1.) die Oberfläche als auf der Ebene $\lambda$, $\mu$ abgebildet an, so entspricht einem ebenen Schnitt die Curve

$$(2.)\quad 0 = (c_1\xi_1+c_2\xi_2+c_3\xi_3+c_4\xi_4)+\mu(c_1\eta_1+c_2\eta_2+c_3\eta_3+c_4\eta_4),$$

wo die $c$ willkürliche Constanten bedeuten. Dieselbe wird zur Tangentenebene, wenn sie einen Doppelpunkt hat. Ist derselbe $\lambda$, $\mu$, so muss für ihn nicht nur die Gleichung (2.) bestehen, sondern auch die nach $\mu$ und $\lambda$ genommenen Differentialquotienten der rechten Seite müssen verschwinden. Man hat also dann die drei Gleichungen:

$$(3.)\quad \begin{cases} \Sigma c_i\xi_i = 0, \qquad \Sigma c_i\eta_i = 0, \\ \Sigma c_i\dfrac{\partial\xi_i}{\partial\lambda}+\mu\Sigma c_i\dfrac{\partial\eta_i}{\partial\lambda} = 0. \end{cases}$$

Endlich muss für die Tangentenrichtungen $d\lambda$, $d\mu$ des Doppelpunktes, welche den Haupttangenten eines Punktes der Fläche entsprechen, auch noch

das zweite Differential von (2.) verschwinden, also die Gleichung bestehen:

$$(4.)\qquad d\lambda^2\left(\Sigma c_i\frac{\partial^2\xi_i}{\partial\lambda^2}+\mu\,\Sigma c_i\frac{\partial^2\eta_i}{\partial\lambda^2}\right)+2\,d\lambda\,d\mu\,\Sigma c_i\frac{\partial\eta_i}{\partial\lambda}=0.$$

Eliminirt man die $c$ aus den Gleichungen (3.), (4.), so erhält man die Differentialgleichungen der ebenen Curven, durch welche die *Curven der Haupttangenten* sich abbilden.

Der Factor $d\lambda$, welcher aus (4.) sich absondert, sagt aus, dass die Erzeugenden selbst ($\lambda=$ Const.) ein System von Haupttangenten bilden. Der andere Factor liefert nach Elimination der $c$ die Gleichung:

$$0=\begin{vmatrix}\xi_1 & \eta_1 & \frac{\partial\xi_1}{\partial\lambda}+\mu\frac{\partial\eta_1}{\partial\lambda} & \frac{\partial^2\xi_1}{\partial\lambda^2}+\mu\frac{\partial^2\eta_1}{\partial\lambda^2}+2\frac{d\mu}{d\lambda}\frac{\partial\eta_1}{\partial\lambda}\\ \xi_2 & \eta_2 & \frac{\partial\xi_2}{\partial\lambda}+\mu\frac{\partial\eta_2}{\partial\lambda} & \frac{\partial^2\xi_2}{\partial\lambda^2}+\mu\frac{\partial^2\eta_2}{\partial\lambda^2}+2\frac{d\mu}{d\lambda}\frac{\partial\eta_2}{\partial\lambda}\\ \xi_3 & \eta_3 & \frac{\partial\xi_3}{\partial\lambda}+\mu\frac{\partial\eta_3}{\partial\lambda} & \frac{\partial^2\xi_3}{\partial\lambda^2}+\mu\frac{\partial^2\eta_3}{\partial\lambda^2}+2\frac{d\mu}{d\lambda}\frac{\partial\eta_3}{\partial\lambda}\\ \xi_4 & \eta_4 & \frac{\partial\xi_4}{\partial\lambda}+\mu\frac{\partial\eta_4}{\partial\lambda} & \frac{\partial^2\xi_4}{\partial\lambda^2}+\mu\frac{\partial^2\eta_4}{\partial\lambda^2}+2\frac{d\mu}{d\lambda}\frac{\partial\eta_4}{\partial\lambda}\end{vmatrix}.$$

Ich will der Kürze wegen eine Determinante dieser Art dadurch andeuten, dass ich *eine* Reihe, ohne Indices, in Klammer setze; ich bezeichne also für den Augenblick diese Gleichung durch

$$0=\left(\xi,\eta,\frac{\partial\xi}{\partial\lambda}+\mu\frac{\partial\eta}{\partial\lambda},\frac{\partial^2\xi}{\partial\lambda^2}+\mu\frac{\partial^2\eta}{\partial\lambda^2}+2\frac{d\mu}{d\lambda}\frac{\partial\eta}{\partial\lambda}\right).$$

Nach $\mu$ geordnet, nimmt sie die Gestalt an:

$$(5.)\quad\begin{cases}0=\left(\xi,\eta,\frac{\partial\xi}{\partial\lambda},\frac{\partial^2\xi}{\partial\lambda^2}\right)+\mu\left[\left(\xi,\eta,\frac{\partial\xi}{\partial\lambda},\frac{\partial^2\eta}{\partial\lambda^2}\right)+\left(\xi,\eta,\frac{\partial\eta}{\partial\lambda},\frac{\partial^2\xi}{\partial\lambda^2}\right)\right]\\ \qquad+\mu^2\left(\xi,\eta,\frac{\partial\eta}{\partial\lambda},\frac{\partial^2\eta}{\partial\lambda^2}\right)+2\frac{d\mu}{d\lambda}\left(\xi,\eta,\frac{\partial\xi}{\partial\lambda},\frac{\partial\eta}{\partial\lambda}\right).\end{cases}$$

Diese Gleichung wird integrirbar, sobald einer der Terme

$$\left(\xi,\eta,\frac{\partial\xi}{\partial\lambda},\frac{\partial^2\xi}{\partial\lambda^2}\right),\qquad\left(\xi,\eta,\frac{\partial\eta}{\partial\lambda},\frac{\partial^2\eta}{\partial\lambda^2}\right)$$

verschwindet. Da beide durch Vertauschung von $\xi$ und $\eta$ in einander übergehen, so genügt es, einen derselben zu betrachten. Die Gleichung

$$(6.)\qquad\left(\xi,\eta,\frac{\partial\eta}{\partial\lambda},\frac{\partial^2\eta}{\partial\lambda^2}\right)=0$$

drückt eine Eigenschaft der beiden zu Grunde gelegten Leitcurven aus, welche offenbar darin besteht, dass $\xi$ in der Schmiegungsebene des entsprechenden Punktes der Curve $\eta$ liegt. Und da $\eta$ selbst sich in dieser Ebene befindet, so

kann man das Bestehen der Gleichungen (6.) dahin deuten, die Leitcurve $\eta$ habe die Eigenschaft, *dass ihre Schmiegungsebenen immer die zugehörigen Erzeugenden der Fläche ganz enthalten.*

Ich werde zeigen, dass dieses nichts anderes als eine andere Definition einer Curve der Haupttangenten selbst ist. Suchen wir nämlich eine Curve $\zeta$, welche in (6.) an Stelle der Curve $\eta$ gesetzt, diese Gleichung befriedigt, so muss

$$(7.)\qquad \zeta_i = \xi_i + \sigma\eta_i$$

sein, wo $\sigma$ eine zu bestimmende Function von $\lambda$ ist. Setzt man dann die Gleichung für $\zeta$ an, so hat man:

$$0 = \left(\xi, \zeta, \frac{\partial\zeta}{\partial\lambda}, \frac{\partial^2\zeta}{\partial\lambda^2}\right)$$

$$= \left(\xi, \xi+\sigma\eta, \frac{\partial\xi}{\partial\lambda} + \sigma\frac{\partial\eta}{\partial\lambda} + \frac{d\sigma}{d\lambda}\eta, \frac{\partial^2\xi}{\partial\lambda^2} + \sigma\frac{\partial^2\eta}{\partial\lambda^2} + 2\frac{d\sigma}{d\lambda}\frac{\partial\eta}{\partial\lambda} + \eta\frac{d^2\sigma}{d\lambda^2}\right)$$

$$= \sigma\left(\xi, \eta, \frac{\partial\xi}{\partial\lambda} + \sigma\frac{\partial\eta}{\partial\lambda}, \frac{\partial^2\xi}{\partial\lambda^2} + \sigma\frac{\partial^2\eta}{\partial\lambda^2} + 2\frac{d\sigma}{d\lambda}\frac{\partial\eta}{\partial\lambda}\right).$$

Dies ist für $\sigma$ dieselbe Gleichung, wie (5.) für $\mu$; die Curve (7.) ist also eine Curve der Haupttangenten. Und man hat den Satz:

*Die Curven der Haupttangenten bei windschiefen Flächen sind dadurch definirt, dass ihre Schmiegungsebenen immer durch die entsprechenden Erzeugenden der Fläche gehen.*

Aber aus dem obigen folgt weiter der Satz:

*Bei windschiefen Flächen kann man alle Curven der Haupttangenten auf Quadraturen zurückführen, sobald irgend eine derselben bekannt ist.*

In der That hat man, indem man für die Curve $\eta$ eine solche Curve, also $\left(\xi, \eta, \frac{\partial\eta}{\partial\lambda}, \frac{\partial^2\eta}{\partial\lambda^2}\right) = 0$ setzt, durch Integration der Gleichung (5.)

$$\mu = e^{-\int \frac{\left(\xi, \eta, \frac{\partial\xi}{\partial\lambda}, \frac{\partial^2\eta}{\partial\lambda^2}\right) - \left(\xi, \eta, \frac{\partial^2\xi}{\partial\lambda^2}, \frac{\partial\eta}{\partial\lambda}\right)}{2\left(\xi, \eta, \frac{\partial\xi}{\partial\lambda}, \frac{\partial\eta}{\partial\lambda}\right)} d\lambda}$$

$$\times \left\{\text{Const.} - \int \frac{\left(\xi, \eta, \frac{\partial\xi}{\partial\lambda}, \frac{\partial^2\xi}{\partial\lambda^2}\right)}{2\left(\xi, \eta, \frac{\partial\xi}{\partial\lambda}, \frac{\partial\eta}{\partial\lambda}\right)} e^{\int \frac{\left(\xi, \eta, \frac{\partial\xi}{\partial\lambda}, \frac{\partial^2\eta}{\partial\lambda^2}\right) - \left(\xi, \eta, \frac{\partial^2\xi}{\partial\lambda^2}, \frac{\partial\eta}{\partial\lambda}\right)}{2\left(\xi, \eta, \frac{\partial\xi}{\partial\lambda}, \frac{\partial\eta}{\partial\lambda}\right)} d\lambda} . d\lambda\right\},$$

oder

$$(8.)\quad \begin{cases} \mu = \sqrt{\left(\xi,\eta,\frac{\partial\xi}{\partial\lambda},\frac{\partial\eta}{\partial\lambda}\right)}\, e^{-\int \frac{\left(\xi,\eta,\frac{\partial\xi}{\partial\lambda},\frac{\partial^2\eta}{\partial\lambda^2}\right)}{\left(\xi,\eta,\frac{\partial\xi}{\partial\lambda},\frac{\partial\eta}{\partial\lambda}\right)} d\lambda} \\ \times \left\{ \text{Const.} - \int \frac{\left(\xi,\eta,\frac{\partial\xi}{\partial\lambda},\frac{\partial^2\xi}{\partial\lambda^2}\right)}{2\sqrt{\left(\xi,\eta,\frac{\partial\xi}{\partial\lambda},\frac{\partial\eta}{\partial\lambda}\right)}^3}\, e^{\int \frac{\left(\xi,\eta,\frac{\partial\xi}{\partial\lambda},\frac{\partial^2\eta}{\partial\lambda^2}\right)}{\left(\xi,\eta,\frac{\partial\xi}{\partial\lambda},\frac{\partial\eta}{\partial\lambda}\right)} d\lambda} . d\lambda \right\}. \end{cases}$$

---

Insbesondre kann man hienach die Curven der Haupttangenten immer aufstellen, wenn auf der windschiefen Fläche irgend eine Gerade existirt, welche alle Erzéugenden schneidet. Indem man sie zur Curve $\eta$ wählt, kann man den Parameter $\lambda$ so einführen, dass

$$\eta_i = a_i + \lambda b_i,$$

wo die $a$, $b$ Coordinaten zweier constanten Punkte der Geraden sind. Dann ist $\frac{\partial^2\eta_i}{\partial\lambda^2} = 0$, und die Gleichung (8.) geht über in:

$$(9.)\qquad \mu = \sqrt{\left(\xi,a,\frac{\partial\xi}{\partial\lambda},b\right)}\left\{\text{Const.} + \int \frac{\left(\xi,a+\lambda b,\frac{\partial\xi}{\partial\lambda},\frac{\partial^2\xi}{\partial\lambda^2}\right)}{2\sqrt{\left(\xi,a,\frac{\partial\xi}{\partial\lambda},b\right)}^3}\, d\lambda\right\}.$$

Wenn auch die Curve $\xi$ die Eigenschaft besitzt, durch den Parameter $\lambda$ rational dargestellt zu werden, und also auf die Gerade $\eta$ projectivisch bezogen zu sein, so wird zugleich die Fläche auf der Ebene $\lambda$, $\mu$ eindeutig abgebildet. In diesem Falle sieht man, dass, wenn die $\xi$ von der $n^{\text{ten}}$ Ordnung in $\lambda$ sind, $\left(\xi, a, \frac{\partial\xi}{\partial\lambda}, b\right)$ von der $2(n-1)^{\text{ten}}$ ist, und dass also die Formel (9.) auf ein hyperelliptisches Integral führt, sobald $n > 3$. Die Fälle $n=1$, $n=2$, $n=3$ will ich beispielsweise näher ausführen. Sie entstehen als Ort der Geraden, welche eine Gerade mit den projectivisch entsprechenden Punkten einer andern Geraden, eines Kegelschnitts oder einer Raumcurve dritter Ordnung verbinden. Im ersten Falle entsteht also eine Fläche zweiter Ordnung, im zweiten eine windschiefe Fläche dritter, im letzten eine solche vierter Ordnung.

Ist $n = 1$, so kann man setzen:

$$\zeta_i = \alpha_i + \lambda\beta_i;$$

dann wird auch $\frac{\partial^2 \xi_i}{\partial \lambda^2} = 0$, und man hat aus (9.)

$$\mu = \text{Const.}$$

In der That liefert in diesem Falle $\mu = \text{Const.}$ die eine Schaar von Erzeugenden des Hyperboloids, während $\lambda = \text{Const.}$ die andere Schaar liefert, welcher die Curve $\eta$ entnommen war.

Ist $n = 2$, so wird

$$\xi_i = \alpha_i + 2\lambda\beta_i + \lambda^2\gamma_i,$$

daher

$$\left(\xi, a, \frac{\partial \xi}{\partial \lambda}, b\right) = 2(\alpha+\lambda\beta, a, \beta+\lambda\gamma, b)$$
$$= 2(\alpha, a, \beta, b) + 2\lambda(\alpha, a, \gamma, b) + \lambda^2(\beta, a, \gamma, b)$$
$$= A + 2\lambda B + \lambda^2 C,$$

wenn

$$A = 2(\alpha, a, \beta, b), \qquad B = (\alpha, a, \gamma, b), \qquad C = 2(\beta, a, \gamma, b)$$

gesetzt wird. Ferner ist

$$\left(\xi, a+\lambda b, \frac{\partial \xi}{\partial \lambda}, \frac{\partial^2 \xi}{\partial \lambda^2}\right) = 4(\alpha, a+\lambda b, \beta, \gamma) = 4(P+\lambda Q),$$

wo

$$P = (\alpha, a, \beta, \gamma), \qquad Q = (\alpha, b, \beta, \gamma).$$

Die Gleichung (9.) giebt daher:

$$\mu = \sqrt{A+2B\lambda+C\lambda^2}\left\{\text{Const.} - 2\int \frac{P+\lambda Q}{\sqrt{A+2\lambda B+\lambda^2 C}^{\,3}}\,d\lambda\right\},$$

oder nach Ausführung der Integration:

$$\mu = \text{Const.}\sqrt{A+2\lambda B+\lambda^2 C} - 2\,\frac{P(B+\lambda C) - Q(B+\lambda A)}{AC-B^2}.$$

Auch hier also sind diese Curven algebraisch (vgl. Bd. 67 dieses Journals p. 17).

Für $n = 3$ will ich für $\lambda$, $\mu$ immer $\frac{\lambda}{x}$, $\frac{\mu}{x^2}$ setzen, um homogene Functionen zu erhalten, und sodann, was bei specieller Wahl der Coordinatenebenen bekanntlich immer erlaubt ist, die Gleichungen der Curve 3[ter] Ordnung in der Form annehmen:

$$\xi_1 = x^3, \qquad \xi_2 = x^2\lambda, \qquad \xi_3 = \lambda^2 x, \qquad \xi_4 = \lambda^3.$$

Ist dann

$$\varphi(\lambda) = a_1\lambda^3 - 3a_2\lambda^2 x + 3a_3\lambda x^2 - a_4 x^3, \quad \psi(\lambda) = b_1\lambda^3 - 3b_2\lambda^2 x + 3b_3\lambda x^2 - b_4 x^3,$$

so geht (9.) über in die Gleichung:

$$(10.)\quad \mu = \sqrt{\frac{1}{9}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\frac{\partial\psi}{\partial\varkappa}-\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial\varkappa}\right)}\left\{\text{Const.}+\int\frac{(\varkappa\varphi+\lambda\psi)(\varkappa d\lambda-\lambda d\varkappa)}{\sqrt{\frac{1}{9}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\frac{\partial\psi}{\partial\varkappa}-\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial\varkappa}\right)}^3}\right\}.$$

Bezeichnen wir zunächst, um das hier auftretende Integral auf seine einfachste Form zurückzuführen, durch $p$ und $q$ die beiden linearen Covarianten der cubischen Formen $\varphi$, $\psi$, so dass

$$p = p_1\lambda+p_2\varkappa = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & b_1\lambda-b_2\varkappa \\ a_2 & a_3 & b_2\lambda-b_3\varkappa \\ a_3 & a_4 & b_3\lambda-b_4\varkappa \end{vmatrix},$$

$$q = q_1\lambda+q_2\varkappa = -\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & a_1\lambda-a_2\varkappa \\ b_2 & b_3 & a_2\lambda-a_3\varkappa \\ b_3 & b_4 & a_3\lambda-a_4\varkappa \end{vmatrix},$$

(vgl. Bd. 67 dieses Journals, pag. 360). Ist wie a. a. O.

$$K = p_2q_1-p_1q_2,$$

so hat man

$$K\lambda = qp_2-pq_2, \qquad K\varkappa = -qp_1+pq_1;$$

es wird ferner, wenn man alles durch $p$, $q$ ausdrückt,

$$K^3\varphi = \tfrac{1}{4}\frac{\partial F}{\partial q}, \qquad K^3\psi = \tfrac{1}{4}\frac{\partial F}{\partial p},$$

$$\frac{K^4}{9}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varkappa}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}-\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial\varkappa}\right) = \tfrac{1}{144}\left(\frac{\partial^2F}{\partial q^2}\frac{\partial^2F}{\partial p^2}-\left(\frac{\partial^2F}{\partial p\,\partial q}\right)^2\right) = \Delta,$$

wobei $F$ die a. a. O. angegebene Function vierter Ordnung ist. Hiedurch, und mit einer leichten Veränderung in der Bedeutung der Integrationsconstante, geht die Gleichung (10.) über in:

$$(11.)\qquad \mu = \sqrt{\Delta}\left\{\text{Const.}+\tfrac{1}{4}\int\frac{\left(m\frac{\partial F}{\partial q}+n\frac{\partial F}{\partial p}\right)(p\,dq-q\,dp)}{\sqrt{\Delta}^3}\right\},$$

wobei der Kürze wegen $m$ und $n$ gesetzt sind für die linearen Ausdrücke:

$$m = -qp_1+pq_1, \qquad n = qp_2-pq_2.$$

Ich werde nun das Integral weiter transformiren mit Hülfe einiger Sätze aus der Theorie der binären Formen vierten Grades. Ist

$$T = \tfrac{1}{16}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial\Delta}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial\Delta}{\partial q}\right),$$

oder, um mich einer oft angewandten Bezeichnung zu bedienen,

$$T = F_1\Delta_2-F_2\Delta_1,$$

wo der Variablen $q$ immer der Index 1, der Variablen $p$ der Index 2 entspricht, so ist

$$T^2 = -\left(\Delta^3 - \frac{i}{4}\Delta F^2 + \frac{j}{4}F^3\right).$$

Daher

$$pdq - qdp = -\frac{1}{F}\begin{vmatrix} F_1 & F_2 \\ \Delta_1 & \Delta_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} q & p \\ dq & dp \end{vmatrix} = \frac{1}{4T}(\Delta dF - Fd\Delta)$$

$$= \frac{\Delta dF - Fd\Delta}{4\sqrt{-\left(\Delta^3 - \frac{i}{4}\Delta F^2 + \frac{j}{4}F^3\right)}}.$$

Ich werde nun zeigen, dass man immer identisch setzen kann

$$(12.)\qquad \tfrac{1}{4}\left(m\frac{\partial F}{\partial q} + n\frac{\partial F}{\partial p}\right) = (P_1\Delta_2 - P_2\Delta_1) + hF,$$

wo $h$ eine Constante ist, $P_1$, $P_2$ aber die Differentialquotienten einer Function zweiter Ordnung von $q$ und $p$, dividirt durch 2, bedeuten. Indem man dies einführt, erhält man aus (11.)

$$\mu =$$

$$\sqrt{\Delta}\left\{\text{Const.} + \int \frac{P_1\Delta_2 - P_2\Delta_1}{\sqrt{\Delta}^3}(pdq - qdp) + \frac{h}{4}\int \frac{F(\Delta dF - Fd\Delta)}{\sqrt{-\Delta^2\left(\Delta^3 - \frac{i}{4}\Delta F^2 + \frac{j}{4}F^3\right)}}\right\}.$$

Führt man nun das erste Integral aus, und setzt in dem letzten

$$\frac{F}{\Delta} = z,$$

so geht das letztere in ein gewöhnliches elliptisches Integral zweiter Gattung über, und man erhält:

$$(13.)\qquad \mu = \sqrt{\Delta}\left\{\text{Const.} + \frac{1}{2}\frac{P}{\sqrt{\Delta}} + \frac{h}{4}\int \frac{z\,dz}{\sqrt{-\left(1 - \frac{i}{4}z^2 + \frac{j}{4}z^3\right)}}\right\}.$$

Den in der Formel (12.) enthaltenen Satz beweist man folgendermassen.

Sind $\pi$, $\varkappa$ zwei beliebige Grössen, und

$$F' = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\pi^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial p\,\partial q}\pi\varkappa + \frac{\partial^2 F}{\partial q^2}\varkappa^2\right),$$

$$\Delta' = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \Delta}{\partial p^2}\pi^2 + 2\frac{\partial^2 \Delta}{\partial p\,\partial q}\pi\varkappa + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial q^2}\varkappa^2\right),$$

und sind $F'_1$, $F'_2$, ... die Differentialquotienten dieser Functionen nach $q$ und $p$, dividirt durch 2, so ist identisch

$$(14.)\qquad \Delta'_1\Delta_2 - \Delta'_2\Delta_1 = \tfrac{1}{2}(\varkappa p - \pi q)\left(\varkappa\frac{\partial\Delta_\Delta}{\partial q} + \pi\frac{\partial\Delta_\Delta}{\partial p}\right).$$

Die Determinante $\Delta_\Delta$ der Function $\Delta$ hat aber nach der Theorie der Formen vierten Grades den Werth

$$\frac{j}{4}F-\frac{i}{12}\Delta.$$

Daher kann man der Gleichung (14.) die Form geben:

$$\frac{j}{2}(\varkappa p-\pi q)(\varkappa F_1+\pi F_2)=\Delta_2\left(\Delta_1'+\frac{i}{12}\pi(\varkappa p-\pi q)\right)-\Delta_1\left(\Delta_2'-\frac{i}{12}\varkappa(\varkappa p-\pi q)\right).$$

Setzt man hier für $\varkappa^2$, $\varkappa\pi$, $\pi^2$ die Grössen $q_1$, $-\frac{q_2-p_1}{2}$, $-p_2$, und addirt auf beiden Seiten

$$-\frac{j}{4}(q_2+p_1)F = -\frac{j}{4}(q_2+p_1)(qF_1+pF_2),$$

so erhält man nach Division mit $\frac{j}{2}$:

$$mF_1+nF_2 = -\frac{q_2+p_1}{2}F+\Delta_2P_1-\Delta_1P_2,$$

wo nun $P$ die Function zweiter Ordnung bedeutet:

$$P=\frac{1}{6j}\left\{\left(\frac{\partial^2\Delta}{\partial q^2}q_1-\frac{\partial^2\Delta}{\partial q\partial p}(q_2-p_1)-\frac{\partial^2\Delta}{\partial p^2}p_2\right)-i(q_1p^2+(q_2-p_1)pq-p_2q^2)\right\}.$$

Hiermit ist die Formel (12.) hergestellt, wenn man nur noch setzt

$$k = -\frac{p_1+q_2}{2}.$$

Geht man nun zu den ursprünglichen Variabeln zurück, und setzt der Kürze wegen

$$\Omega = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varkappa}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}-\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial\varkappa}\right),$$

so wird (vgl. Bd. 67 dieses Journals pag. 368):

$$j=K^6,\quad i=K^3J,\quad \Delta=K^5\Omega,\qquad z=\frac{F}{\Delta}=\frac{q\varphi+p\psi}{K^2\Omega}.$$

Daher, wenn $C$ eine Constante ist, welche von der frühern sich nur durch eine Potenz von $k$ unterscheidet:

$$(15.)\quad \begin{cases} \mu = C\sqrt{\Omega}+\frac{1}{12K}\left\{\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda^2}p_2-\frac{\partial^2\Omega}{\partial\varkappa\partial\lambda}(p_1-q_2)-\frac{\partial^2\Omega}{\partial\varkappa^2}q_1\right)-J(p\varkappa-q\lambda)^2\right\} \\ \qquad -\frac{p_1+q_2}{4}\sqrt{\Omega}\sqrt{K^3}\int\frac{z\,dz}{\sqrt{-(4-K^3Jz^2+K^6z^4)}}. \end{cases}$$

Das elliptische Integral bringt man leicht durch die Substitution

$$z = \frac{J}{K^3}y$$

in eine Form, in welcher nur noch die Constante $\frac{J^3}{K}$, die absolute Invariante auftritt.

Das elliptische Integral verwandelt sich in ein *circulares*, wenn der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen zwei gleiche Wurzeln hat, also wenn

$$J^3 = 27K.$$

In diesem Falle haben die Gleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$ eine gemeinsame Wurzel; es giebt also eine Schmiegungsebene, in welcher sowohl der Punkt $a$, als der Punkt $b$ liegt, d. h. die Gerade $a$, $b$. Dieser Fall tritt also ein, *wenn die Gerade in einer Schmiegungsebene der Curve liegt.* Man kann dann

$$J = 3\varepsilon, \qquad K = \varepsilon^3$$

setzen, und erhält:

$$\sqrt{K^5}\int\frac{z\,dz}{\sqrt{-(4-K^2Jz^2+K^2z^3}} = \sqrt{\varepsilon^{15}}\int\frac{z\,dz}{(\varepsilon^5z-2)\sqrt{-(\varepsilon^5z+1)}}$$
$$= -\frac{2}{\sqrt{\varepsilon^5}}\sqrt{-(\varepsilon^5z+1)}+\frac{4}{\sqrt{3\varepsilon^5}}\operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{\varepsilon^5z+1}{3}}.$$

Dagegen wird die Gleichung (15.) sogar *algebraisch* und ist dadurch von vorwiegendem Interesse, wenn

$$p_1+q_2 = 0.$$

Dieser Fall erfordert eine eingehendere geometrische Betrachtung, um die ihm entsprechende Beziehung der Geraden zu der Curve erkennen zu lassen. Bemerken wir zu diesem Ende folgendes.

Iedem Punkte $Ka_i+\Lambda b_i$ der Geraden $a$, $b$ entsprechen drei Punkte $\varkappa$, $\lambda$ der Curve, deren Schmiegungsebenen durch den ersten Punkt gehen. Diese Punkte sind durch das Verschwinden der cubischen Function $K\varphi+\Lambda\psi$ bestimmt. Ihnen entsprechen drei Punkte $\varkappa a_i+\lambda b_i$ der Geraden $a$, $b$ selbst, deren Parameter durch jene Gleichung bestimmt sind, so dass mit Hülfe der Curve jedem Punkte der Geraden ein bestimmtes Tripel von Punkten derselben entspricht. Die Punkte $\varkappa'$, $\lambda'$; $\varkappa''$, $\lambda''$, für welche die *Hesse*sche Determinante der cubischen Form verschwindet, sind bekanntlich durch die geometrische Eigenschaft charakterisirt, dass sie mit den ersten drei Punkten eine Reihe bilden, welche bei cyclischer Vertauschung der letzten drei Punkte immer sich selbst projectivisch bleibt. Bezeichnen wir die *Hesse*sche Determinante von $K\varphi+\Lambda\psi$ durch

$$\Delta = \Delta_{11}\lambda^2+2\Delta_{12}\varkappa\lambda+\Delta_{22}\varkappa^2,$$

wo denn die Coefficienten $\Delta_{11}$, $\Delta_{12}$, $\Delta_{22}$ von $K$, $\Lambda$ abhängen, so kann man setzen:

$$\Delta_{11} = \varkappa'\varkappa'', \qquad -2\Delta_{12} = \varkappa'\lambda''+\lambda'\varkappa'', \qquad \Delta_{22} = \lambda'\lambda''.$$

Bildet man nun in Bezug auf ein beliebiges durch die Gleichung

$$K_1\varphi+\Lambda_1\psi = 0$$

gegebenes Tripel von Punkten das System harmonischer Centra erster Ordnung von $\varkappa'$, $\lambda'$, und für das erhaltene Punktenpaar den zu ihm und $\varkappa''$, $\lambda''$ harmonischen Punkt — eine Operation, deren Resultat durch Vertauschung von $\varkappa'$, $\lambda'$ mit $\varkappa''$, $\lambda''$ nicht geändert wird — so ist dieser letztere gegeben durch die Gleichung

$$\varkappa'\varkappa''\frac{\partial^2.(K_1\varphi+\Lambda_1\psi)}{\partial\varkappa^2}+(\varkappa'\lambda''+\varkappa''\lambda')\frac{\partial^2(K_1\varphi+\Lambda_1\psi)}{\partial\varkappa\partial\lambda}+\lambda'\lambda''\frac{\partial^2.(K_1\varphi+\Lambda_1\psi)}{\partial\lambda^2}=0,$$

oder

$$\Delta_{11}\frac{\partial^2.(K_1\varphi+\Lambda_1\psi)}{\partial\varkappa^2}-2\Delta_{12}\frac{\partial^2.(K_1\varphi+\Lambda_1\psi)}{\partial\varkappa\partial\lambda}+\Delta_{22}\frac{\partial^2.(K_1\varphi+\Lambda_1\psi)}{\partial\lambda^2}=0.$$

Aus der Theorie der simultanen binären cubischen Formen folgt aber, dass dieser Ausdruck durch $K_1\Lambda-\Lambda_1K$ theilbar ist, und dass nach Absonderung des Factors man die Gleichung erhält (vgl. Bd. 67 dieses Journals pag. 360):

$$(16.)\qquad Kp-\Lambda q = K(p_1\lambda+p_2\varkappa)-\Lambda(q_1\lambda+q_2\varkappa)=0.$$

Dieser Punkt ist also derselbe, für welches Tripel des Systems

$$K_1\varphi+\Lambda_1\psi = 0$$

er auch construirt wird, und seine Lage hängt nur von dem Tripel

$$K\varphi+\Lambda\psi = 0$$

ab, aus welchem die Punkte $\varkappa'$, $\lambda'$, $\varkappa''$, $\lambda''$ abgeleitet werden.

Die Gleichung (16.) zeigt nun, dass auf der Geraden $a$, $b$ zwei projectivische Punktreihen liegen, insofern mittelst der Gleichung (22.) jedem Punkte $K$, $\Lambda$ ein Punkt $\varkappa$, $\lambda$, dessen Construction oben angegeben worden, eindeutig und linear entspricht.

*Die besondere Gattung von windschiefen Flächen vierter Ordnung, für welche die Curven der Haupttangenten algebraisch sind, ist nun dadurch charakterisirt, dass diese Reihen sich reciprok entsprechen und also eine Involution bilden.* Denn hiezu ist nur erforderlich, dass die Gleichung (16.) durch Vertauschung von $K$, $\Lambda$ mit $\varkappa$, $\lambda$ ungeändert bleibt, dass also $p_1=-q_2$.

Schreiben wir der Kürze wegen in (14.) $Q$ für den Ausdruck zweiten Grades:

$$Q = \frac{1}{12K}\left\{\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda^2}p_2-\frac{\partial^2\Omega}{\partial\varkappa\partial\lambda}(p_1-q_2)-\frac{\partial^2\Omega}{\partial\varkappa^2}.q_1\right)-J(p\varkappa-q\lambda)^2\right\},$$

so ist in diesem Falle:

$$\mu = Q+C\sqrt{\Omega}.$$

Die Gleichungen der Curven der Haupttangenten sind also:

$$\begin{aligned}\varrho x_1 &= \varkappa^3 + (\varkappa a_1 + \lambda b_1)(Q + C\sqrt{\Omega})\\ \varrho x_2 &= \varkappa^2\lambda + (\varkappa a_2 + \lambda b_2)(Q + C\sqrt{\Omega})\\ \varrho x_3 &= \varkappa\lambda^2 + (\varkappa a_3 + \lambda b_3)(Q + C\sqrt{\Omega})\\ \varrho x_4 &= \lambda^3 + (\varkappa a_4 + \lambda b_4)(Q + C\sqrt{\Omega}).\end{aligned}$$

Verbindet man diese Gleichungen mit der Gleichung einer Ebene

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4 = 0,$$

so erhält man eine Gleichung $6^{\text{ten}}$ Grades für $\varkappa$, $\lambda$. Die Curven sind also von der $6^{\text{ten}}$ Ordnung und von dem Geschlecht $p = 1$. Sie schneiden jede Erzeugende in zwei Punkten, und berühren insbesondere die vier Erzeugenden. welche durch die Gleichung $\Omega = 0$ gegeben sind.

Es bleibt endlich nur noch der Fall zu behandeln, wo $K = 0$. In diesem Falle ist eine Combination von $\varphi$ und $\psi$ ein vollständiger Cubus, d. h. die Gerade enthält einen Punkt, für welchen die drei durch ihn gehenden Schmiegungsebenen der Raumcurve zusammenfallen, d. h. *die Gerade hat mit der Curve einen Punkt gemeinsam.* In diesem Falle muss man auf die Gleichung (10.) zurückgehen. Der gemeinsame Punkt sei der Punkt $b$ selbst, und für ihn $\lambda = 0$. Man hat also dann für $\psi$ einen vollständigen Cubus, und zwar

$$\psi = \lambda^3$$

zu setzen, und die Gleichung (10.) verwandelt sich in folgende:

$$\mu = \lambda\sqrt{-\tfrac{1}{3}\frac{\partial\varphi}{\partial\varkappa}}\left\{\text{Const.} + \int\frac{(\varkappa\varphi + \lambda^4)(\varkappa d\lambda - \lambda d\varkappa)}{\lambda^3\sqrt{-\tfrac{1}{3}\frac{\partial\varphi}{\partial\varkappa}}^{\,3}}\right\},$$

in welcher das Integral durch logarithmische und Kreisfunctionen ausführbar ist.

Giessen, den 24. Juni 1867.

---

# Ueber das simultane Formensystem einer quadratischen und einer cubischen binären Form.

(Von Herrn *A. Clebsch* zu Giessen.)

---

Für eine cubische und eine quadratische binäre Form hat Herr *Salmon* die hauptsächlichen Bildungen in seinen „Introductory Lessons" (2te Ausgabe p. 162) gegeben. Man kann, mit Vermeidung jeder speciellen Annahme über die Coefficienten der Formen, und zugleich im Anschluss an eine typische Darstellung, die Theorie dieser Formen folgendermassen ausführen.

Die gegebenen Formen seien:

$$(1.)\quad \begin{cases} u = ax^3+3bx^2y+3cxy^2+dy^3, \\ v = \alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2. \end{cases}$$

Die einfachsten linearen Covarianten sind, wenn

$$u_1 = \tfrac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial x},\quad u_2 = \tfrac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial y},\quad u_{11} = \tfrac{1}{6}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \text{etc. (vgl. l. c.)},$$

$$(2.)\quad \begin{cases} p = u_{11}\gamma-2u_{12}\beta+u_{22}\alpha = p_1x+p_2y, \\ q = v_1p_2-v_2p_1 \qquad\qquad = q_1x+q_2y. \end{cases}$$

Ist die Determinante von $p$ und $q$

$$(3.)\quad K = \alpha p_2^2-2\beta p_1p_2+\gamma p_1^2 = q_1p_2-p_1q_2$$

nicht gleich Null, so kann man $p$, $q$ als Variable einführen. Da, wenn $\Delta = \alpha\gamma-\beta^2$ gesetzt wird:

$$(4.)\quad \begin{vmatrix} \alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2 & (\alpha x+\beta y)p_2-(\beta x+\gamma y)p_1 \\ (\alpha x+\beta y)p_2-(\beta x+\gamma y)p_1 & \alpha p_2^2-2\beta p_1p_2+\gamma p_1^2 \end{vmatrix} = \Delta\begin{vmatrix} p_1 & y \\ p_2 & -x \end{vmatrix}^2,$$

so hat man für $v$ sofort die typische Darstellung:

$$(5.)\quad Kv = q^2+\Delta p^2.$$

Ferner wird, indem wir aus (2.) die Werthe

$$Kx = qp_2-pq_2,$$
$$Ky = -qp_1+pq_1$$

in $u$ substituiren, die typische Form von $u$:

$$(6.)\quad K^3u = Mq^3-3Npq^2+3Pp^2q-Qp^3,$$

wo mit Hülfe der symbolischen Substitutionen

$$a = a_1^3, \quad b = a_1^2 a_2, \quad c = a_1 a_2^2, \quad d = a_2^3,$$

die Coefficienten $M$, $N$, $P$, $Q$ die Ausdrücke annehmen:

$$M = (a_1 p_2 - a_2 p_1)^3, \quad N = (a_1 p_2 - a_2 p_1)^2 (a_1 q_2 - a_2 q_1),$$
$$P = (a_1 p_2 - a_2 p_1)(a_1 q_2 - a_2 q_1)^2, \quad Q = (a_1 q_2 - a_2 q_1)^3.$$

Setzt man nun in (5.) $x = a_2$, $y = -a_1$, so hat man

$$(a_1 q_2 - a_2 q_1)^2 + \Delta (a_1 p_2 - a_2 p_1)^2 = K(\alpha a_2^2 - 2\beta a_1 a_2 + \gamma a_1^2).$$

Multiplicirt man dies mit $a_1 p_2 - a_2 p_1$ oder mit $a_1 q_2 - a_2 q_1$, so erhält man für $M$, $N$, $P$, $Q$ die Relationen:

$$(7.) \quad \begin{cases} P + \Delta M = K(\alpha a_2^2 - 2\beta a_1 a_2 + \gamma a_2^2)(a_1 p_2 - a_2 p_1), \\ Q + \Delta N = K(\alpha a_2^2 - 2\beta a_1 a_2 + \gamma a_2^2)(a_1 q_2 - a_2 q_1). \end{cases}$$

Wendet man überhaupt die Buchstaben $a_i$, $b_i$, ... symbolisch für die Coefficienten von $u$, $\alpha_i$, $\beta_i$, ... für die von $v$ an und setzt $(mn)$ für $m_1 n_2 - m_2 n_1$, $a_x$ für $a_1 x_1 + a_2 x_2$, etc. so hat man die symbolischen Ausdrücke:

$$(8.) \quad \begin{cases} p = (a\alpha)^2 a_x, \quad q = (\beta p)\beta_x = (a\alpha)^2 (\beta a)\beta_x, \\ K = (\gamma p)^2 = (a\alpha)^2 (b\beta)^2 (a\gamma)(b\gamma). \end{cases}$$

Daher ist auch

$$(\alpha a_2^2 - 2\beta a_1 a_2 + \gamma a_1^2)(a_1 p_2 - a_2 p_1) = (a\alpha)^2 (b\beta)^2 (ab),$$

was sein Zeichen ändert durch die unwesentliche Vertauschung von $a$ mit $b$, $\alpha$ mit $\beta$, und also identisch verschwindet. Und ebenso

$$(\alpha a_2^2 - 2\beta a_1 a_2 + \gamma a_1^2)(a_1 q_2 - a_2 q_1) = (a\alpha)^2 (b\beta)^2 (\gamma b)(a\gamma),$$

was nach (8.) gleich $-K$ ist. Aus (7.) hat man also die Relationen

$$P = -\Delta M,$$
$$Q = -\Delta N - K^2.$$

Und mit Zugrundelegung der Invarianten $K$, $\Delta$, $M$, $N$ ist also die typische Form von $u$:

$$(9.) \quad K^3 u = Mq^3 - 3Npq^2 - 3\Delta M p^2 q + (\Delta N + K^2) p^3.$$

Die Ordnungen der hier auftretenden Invarianten in Bezug auf die Coefficienten sind folgende:

| | für $u$ | für $v$ |
|---|---|---|
| $\Delta$ | 0 | 2 |
| $K$ | 2 | 3 |
| $M$ | 4 | 3 |
| $N$ | 4 | 4 . |

Diese Invarianten sind von einander unabhängig, stehen aber zu niedern Invarianten in Beziehungen. Um dieselben zu finden, bilde ich zunächst aus (9.) die typische Form der zu $u$ gehörigen *Hesse*schen Determinante:

$$H = (u_{11}u_{22}-u_{12}^2).$$

Man erhält daraus in Bezug auf die Variabeln $p$, $q$ die Gleichung

$$H = \frac{K^2}{36}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial p\partial q}\right)^2\right),$$

oder mit Anwendung von (9.):

$$(10.)\qquad K^4H = -(N^2+\Delta M^2)(q^2+\Delta p^2)+K^2(Mpq-Np^2).$$

Diese Gleichung ist nothwendig durch $K^2$ theilbar; denn wenn man in $H$ die Ausdrücke für $x$, $y$ durch $q$, $p$ einsetzt, kann nur die zweite Potenz von $K$ im Nenner erscheinen. Der Coefficient von $q^2$ im Zähler wird dann

$$(11.)\qquad L = H_{11}p_2^2-2H_{12}p_1p_2+H_{22}p_1^2,$$

eine Form, welche von der vierten Ordnung für die Coefficienten von $u$, und von der zweiten für die von $v$ ist. Aus Vergleichung mit (10.) folgt also die Relation

$$(12.)\qquad K^2L = -(N^2+\Delta M^2),$$

und die Formel (10.) verwandelt sich nach Division mit $K^2$ in die Gleichung:

$$(13.)\qquad K^2H = L(q^2+\Delta p^2)+Mpq-Np^2.$$

Wir erhalten nun weiter die Discriminante $D$ von $u$, indem wir die Determinante von $H$ in Bezug auf $p$, $q$ bilden und mit $K^2$ multipliciren. Es ist also

$$(14.)\qquad K^2D = L^2\Delta-LN-\frac{M^2}{4}.$$

Bezeichnen wir ferner durch $J$ die aus den quadratischen Formen $H$ und $v$ entspringende Invariante

$$(15.)\qquad J = H_{11}\gamma-2H_{12}\beta+H_{22}\alpha,$$

und bilden wieder dieselbe Form aus den typischen Darstellungen, so finden wir:

$$(16.)\qquad KJ = 2L\Delta-N.$$

Diese Formel lehrt, dass $N$ überhaupt aus dem Kreise der fundamentalen Invarianten ausgeschieden werden kann, da es sich durch die niederen Invarianten $K$, $J$, $L$, $\Delta$ ausdrückt. Führt man für $N$ den Werth

$$(17.)\qquad N = 2L\Delta-KJ$$

ein, so verwandelt sich die Gleichung (14.) in die folgende:

$$(18.)\quad K^2D = KJL - L^2\Delta - \frac{M^2}{4};$$

und die Gleichung (12.) giebt zunächst

$$K^2L + \Delta(M^2 + 4L^2\Delta) + K^2J^2 - 4KJL\Delta = 0$$

und wird mit Anwendung von (18.) durch $K^2$ theilbar, so dass man die niedrigere Gleichung erhält:

$$(19.)\quad L = 4D\Delta - J^2.$$

Hieraus lässt sich also schliesslich alles durch $K$, $\Delta$, $D$, $J$ ausdrücken, nur $M$ nicht, wohl aber dessen Quadrat, so dass diese Invariante eine ähnliche Stellung einnimmt, wie die *Hermite*sche Invariante bei den Formen fünften Grades. Für $N$ hat man mit Benutzung von (19.) aus (17.) den Ausdruck

$$(20.)\quad N = 8D\Delta^2 - 2\Delta J^2 - KJ,$$

und $M^2$ ergiebt sich aus (14.) in der Form:

$$(21.)\quad \frac{M^2}{4} = -\Delta L^2 + JLK - DK^2 = -K^2D + 4KJD\Delta - KJ^3 - 16D^2\Delta^3 + 8D\Delta^2J^2 - \Delta J^4.$$

Die Resultante $R$ von $u$ und $v$:

$$R = \begin{vmatrix} a & 3b & 3c & d & 0 \\ 0 & a & 3b & 3c & d \\ \alpha & 2\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 2\beta & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 2\beta & \gamma \end{vmatrix}$$

muss mit $K^3$ multiplicirt werden, damit man rechts die Coefficienten der typischen Form einführen kann, und es wird daher:

$$K^3R = \begin{vmatrix} M & -3N & -3\Delta M & \Delta N + K^2 & 0 \\ 0 & M & -3N & -3\Delta M & \Delta N + K^2 \\ 1 & 0 & \Delta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \Delta \end{vmatrix}.$$

Zieht man hier die zweite Vertikalreihe mit $\Delta$ multiplicirt von der vierten, und die erste mit $-\Delta^2$ multiplicirt, so wie die dritte mit $\Delta$ multiplicirt von der letzten ab, so verwandelt sich die Determinante rechts in eine zweireihige, und man erhält:

$$K^3R = -\begin{vmatrix} 4\Delta N + K^2 & 4\Delta^2 M \\ -4\Delta M & 4\Delta N + K^2 \end{vmatrix} = -(4\Delta N + K^2)^2 - 16\Delta^3M^2,$$

und mit Hülfe von (12.), (16.) wird dies

$$K^3R = -K^4 - 8\Delta NK^2 - 16\Delta^2(N^2+\Delta M^2)$$
$$= -K^2(K^2+8\Delta N-16\Delta^2 L)$$
$$= -K^3(K-8\Delta J)$$

oder es ist endlich

$$(22.)\qquad R = 8\Delta J - K.$$

---

Die Functionaldeterminante

$$Q = u_1 H_2 - H_1 u_2$$

wird aus (9.), (13.):

$$K^4 Q = \left(\frac{M^2}{2}+LN\right)q^3 + (3L\Delta - \tfrac{3}{2}N)Mq^2p + \left(\frac{\Delta M^2}{2} - 3N\Delta L + 2N^2 - LK^2\right)p^2q$$
$$+\left(\frac{\Delta N}{2} - L\Delta^2 - \frac{K^2}{2}\right)Mp^3,$$

oder indem man mit Hülfe der Gleichungen (14.), (16.), (17.) die Division durch $K$ ausführt:

$$(23.)\quad K^3Q = J\left\{Lq^3+\frac{3M}{2}p^2q-\frac{3N}{2}qp^2-\frac{\Delta M}{2}p^3\right\} - K\left\{2Dq^3+\frac{3L}{2}qp^2+\frac{M}{2}p^3\right\}.$$

Ich werde jetzt die oben betrachteten Formen untersuchen, indem ich an Stelle von $u$ die zusammengesetzte Function $\varkappa u + \lambda Q$ setze. Nach der Theorie der binären cubischen Formen ist

$$(24.)\quad \begin{cases} H_{\varkappa u+\lambda Q} = H.\varphi(\varkappa,\lambda), \\ Q_{\varkappa u+\lambda Q} = (\varkappa Q - \lambda Du).\varphi(\varkappa,\lambda), \\ D_{\varkappa u+\lambda Q} = D.\varphi^2(\varkappa,\lambda), \end{cases}$$

wo

$$(25.)\quad \varphi(\varkappa,\lambda) = \varkappa^2 + D\lambda^2.$$

Ferner wird, indem man $p$, $q$ aus (2.), aber mit Zugrundelegung der typischen Form, und für $\varkappa u+\lambda Q$ statt für $u$ bildet:

$$(26.)\quad \begin{cases} Kp_{\varkappa u+\lambda Q} = \left(\varkappa K - \frac{\lambda M}{2}\right)p - \lambda Lq, \\ Kq_{\varkappa u+\lambda Q} = \lambda L\Delta p + \left(\varkappa K - \frac{\lambda M}{2}\right)q. \end{cases}$$

Die Determinante $K_{\varkappa u+\lambda Q}$ dieser Formen nach $x$ und $y$ zerfällt in das Product der Determinante derselben Formen nach $p$ und $q$ mit der Deter-

minante von $p$ und $q$ nach $x$ und $y$, welche $K$ ist. Daher hat man:

$$K.K_{\varkappa u+\lambda Q} = \left(\varkappa K - \frac{\lambda M}{2}\right)^2 + \varDelta L^2\lambda^2,$$

oder indem man mit Hülfe von (18.) durch $K$ dividirt:

$$(27.)\qquad K_{\varkappa u+\lambda Q} = \varkappa^2 K - M\varkappa\lambda + (JL - KD)\lambda^2 = \psi(\varkappa, \lambda).$$

Mit Hülfe der Functionen $\varphi$ und $\psi$ drücken sich nun die übrigen für $\varkappa u+\lambda Q$ gebildeten Invarianten sofort in folgender Weise aus:

$$(28.)\qquad \begin{cases} J_{\varkappa u+\lambda Q} = J.\varphi(\varkappa, \lambda), \\ L_{\varkappa u+\lambda Q} = L.\varphi^2(\varkappa, \lambda), \\ R_{\varkappa u+\lambda Q} = 8\varDelta J.\varphi(\varkappa, \lambda) - \psi(\varkappa, \lambda) \\ \qquad\quad = R.\varphi(\varkappa, \lambda) + \{K\varphi(\varkappa, \lambda) - \psi(\varkappa, \lambda)\}, \\ N_{\varkappa u+\lambda Q} = \varphi(\varkappa, \lambda)\{2\varDelta L\varphi(\varkappa, \lambda) - J\psi(\varkappa, \lambda)\} \\ \qquad\quad = N\varphi^2(\varkappa, \lambda) + J\varphi(\varkappa, \lambda)\{K\varphi(\varkappa, \lambda) - \psi(\varkappa, \lambda)\}. \end{cases}$$

Eine besondere Betrachtung erfordert die Form $M_{\varkappa u+\lambda Q}$. Aus (21.) erhält man:

$$(29.)\qquad \frac{M^2_{\varkappa u+\lambda Q}}{4} = -\{\varDelta L^2\varphi^2(\varkappa, \lambda) - JL\varphi(\varkappa, \lambda)\psi(\varkappa, \lambda) + D\psi^2(\varkappa, \lambda)\}.\varphi^2(\varkappa, \lambda).$$

Bemerken wir nun, dass die Determinante von $\varphi+\varrho\psi$ den Ausdruck hat:

$$D + JL\varrho + \varDelta L^2\varrho^2,$$

so sieht man, dass die links in (29.) vorkommenden Coefficienten die simultanen Invarianten von $\varphi$ und $\psi$ sind, und dass also nach bekannten Sätzen der negative eingeklammerte Ausdruck das Quadrat der Fundamentaldeterminante von $\varphi$ und $\psi$ nach $\varkappa$ und $\lambda$ ist, dividirt durch 16. Indem man also die Quadratwurzel zieht, erhält man

$$(30.)\qquad M_{\varkappa u+\lambda Q} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varkappa}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} - \frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial\varkappa}\right).\varphi(\varkappa, \lambda).$$

Das Vorzeichen der rechten Seite bestimmt sich sofort, indem man $\lambda = 0$ setzt.

---

Die Punkte für welche $H$ verschwindet, haben in der Geometrie der Geraden bekanntlich die Eigenschaft, mit den drei Punkten $u = 0$ ein System zu bilden, welches bei cyclischer Vertauschung der letztern sich selbst immer projectivisch bleibt. Ich will diese Punkte zu den ersten cyclisch-projectivisch nennen. Das Verschwinden der Invariante $J$ sagt aus, dass diese mit den Punkten $v = 0$ harmonisch liegen.

Setzt man an Stelle der Gleichungen $v=0$, $u=0$ die Gleichung eines Kegelschnitts und einer Curve dritter Ordnung, so entspricht der Invariante $J$ eine zugehörige Form vierten Grades, welche entsteht, wenn man $J$ als symbolisches Determinantenproduct darstellt, und jede Determinante durch eine Reihe von Liniencoordinaten erweitert. Man hat also den Satz:

*Die Geraden, welche eine Curve dritter Ordnung so schneiden, dass die zu den Schnittpunkten cyclisch-projectivischen Punkte der Geraden zu deren Schnittpunkten mit einem gegebenen Kegelschnitt harmonisch liegen, umhüllen eine Curve vierter Classe* $J_4$.

Legt man durch die drei Punkte $u=0$ auf der Geraden, welche zur Darstellung der Werthe $\frac{x}{y}$ dient, eine Curve dritter Ordnung, und sucht dann für einen der Punkte $v=0$ die Polare, so erhält man ein Punktenpaar; sucht man für dieses und den anderen Punkt $v=0$ den vierten harmonischen Punkt, so findet man den Punkt $p=0$, und wieder zu diesem und den beiden Punkten $v=0$ harmonisch liegt der Punkt $q=0$. Die Gleichung $K=0$ sagt nach (3.) aus, dass $p$, und also auch $q$ mit einem der Punkte $v$ zusammenfällt; und dieses kann nur geschehen, wenn eine der Polaren der Punkte $v=0$ durch den andern Punkt $v=0$ geht. Da nun wieder der Invariante $K=0$ für die oben angegebenen Betrachtungen in der Ebene eine Curve sechster Classe entspricht, so hat man den Satz:

*Die Geraden, bei welchen die in Bezug auf die Curve dritter Ordnung genommene Polare eines Schnittpunktes mit dem Kegelschnitt durch den andern geht, umhüllen eine Curve sechster Classe* $K_6$.

Der Gleichung $\Delta=0$ entspricht in gleicher Weise die Gleichung des Kegelschnitts in Liniencoordinaten, der Gleichung $D=0$ die der Curve dritter Ordnung in Liniencoordinaten. Die Gleichung $R=0$ aber giebt das Product der Gleichungen der Schnittpunkte beider Curven.

Wegen der Gleichung $R=\Delta J-K$ sind nun die 12 gemeinsamen Tangenten von $\Delta=0$ und $K=0$ auch Tangenten von $R=0$, d. h. sie gehen paarweise durch die Schnittpunkte des Kegelschnitts mit der Curve dritter Ordnung. Daher fallen solche zwei immer in die eine Tangente des Kegelschnitts in dem betreffenden Punkte zusammen, und man hat also den Satz:

*Die Curve $K_6$ berührt den Kegelschnitt in seinen Schnittpunkten mit der Curve dritter Ordnung. Die noch übrigen $6.4=24$ Tangenten, welche von den Schnittpunkten an $K_6$ gelegt werden können, sind zugleich die Tangenten, welche von jenen Punkten an die Curve $J_4$ gezogen werden, und die 24 ge-*

*meinschaftlichen Tangenten von $J_4$ und $K_6$ schneiden sich also zu* 4 *in jenen Schnittpunkten.*

Aus der Definition (11.) von $L$ folgt ferner:

*Jede Gerade, welche die in Bezug auf die Curve dritter Ordnung genommene zweite Polare der Schnittpunkte der Geraden mit dem Kegelschnitt, in einem der zu ihren Schnittpunkten mit der Curve dritter Ordnung cyclisch-projectivischen Punkte trifft, berührt eine Curve achter Classe $L_8$.*

Und aus (19.) folgt für diese Curve:

*Die Curve $L_8$ berührt den Kegelschnitt in* 8, *und die Curve dritter Ordnung in* 24 *Punkten, deren Tangenten zugleich die Curve $J_4$ berühren.*

Ferner, weil $M$ der Coefficient von $q^3$ in $u$ ist:

*Jede Gerade, für welche die zweite Polar eihrer Schnittpunkte mit dem Kegelschnitt, in Bezug auf die Curve dritter Ordnung genommen, durch einen Schnittpunkt der Geraden mit letzterer hindurch geht, umhüllt eine Curve neunter Classe $M_9$.*

Endlich aus (21.):

*Die* 48 *gemeinschaftlichen Tangenten von $K_6$ und $L_8$ berühren auch die Curve $M_9$. Ebenso wird $M_9$ von den Tangenten der* 24 *Punkte berührt, in denen $L_8$ und die Curve dritter Ordnung sich berühren, und von den Tangenten, welche in den Schnittpunkten an den Kegelschnitt gezogen werden, und welche zugleich $K$ berühren.*

Giessen, den 28. Juli 1867.

---

# Ueber *Abel*sche Integrale dritter Gattung.

(Von Herrn *G. Roch* *).)

In einem früheren Aufsatze Bd. 65 dieses Journals habe ich die Ausdrücke der Integrale dritter Gattung für $p=2$ entwickelt. Ich will jetzt die entsprechenden Entwicklungen für ganz allgemeine algebraische Integrale dritter Gattung geben. Hierbei setze ich, wie a. a. O., die *Riemann*schen Bezeichnungen als bekannt voraus und zugleich wende ich eine der dort gebrauchten Abkürzung ganz analoge abgekürzte Schreibweise an, indem

$$\vartheta(v_1, v_2, \dots v_p)$$

durch $\vartheta(v)$ bezeichnet werden soll. Dem entsprechend sei ein Punkt der Fläche $T$, in welchem die $p$ endlich bleibenden Integrale $u_1, \dots u_p$ die Werthe $\alpha_1, \dots \alpha_p$ haben, kurz als Punkt $\alpha$ bezeichnet.

Der Ausdruck

$$\lg Q = \lg \frac{\vartheta(u+u'+u''+\cdots+u^{(p-1)}-\alpha)}{\vartheta(u+u'+u''+\cdots+u^{(p-1)}-\beta)}$$

ist, wie Betrachtungen zeigen, die denen des angeführten Aufsatzes ganz analog sind, eine Summe von $p$ gleichgebauten Integralen dritter Gattung. Die oberen Grenzen dieser Integrale sind die Werthe $z, z_1, z_2, \dots z_{p-1}$, welche den Punkten $u, u', u'', \dots u^{(p-1)}$ zukommen. Jedes dieser Integrale wird logarithmisch unendlich, wenn die obere Grenze nach $\alpha$ oder $\beta$ kommt. Wir schreiben

$$(1.)\quad \lg Q = \int_{\zeta}^{z} \frac{f(z,a,b)}{\frac{\partial F}{\partial s}} dz + \int_{\zeta_1}^{z_1} \frac{f(z,a,b)}{\frac{\partial F}{\partial s}} dz + \cdots + \int_{\zeta_{p-1}}^{z_{p-1}} \frac{f(z,a,b)}{\frac{\partial F}{\partial s}} dz + C.$$

Durch Differentiation nach $z$ findet man:

$$\frac{d}{dz}\lg Q = \frac{\vartheta(\Sigma u-\beta)\frac{d}{dz}\vartheta(\Sigma u-\alpha)-\vartheta(\Sigma u-\alpha)\frac{d}{dz}\vartheta(\Sigma u-\beta)}{\vartheta(\Sigma u-\alpha)\vartheta(\Sigma u-\beta)},$$

und dies muss unabhängig von $z_1, \dots z_{p-1}$ sein. Legen wir die $p-1$ Punkte $u', \dots u^{(p-1)}$ so, dass sie mit dem Punkte $u$ die Nullpunkte einer Function $\varphi$

*) Der talentvolle Verfasser ist leider durch einen frühzeitigen Tod fortgerafft worden, er starb zu Venedig am 21. Novbr. 1866 im noch nicht vollendeten 27 Lebensjahre.

sind, bezeichnen wir mit $\gamma', \dots \gamma^{(p-2)}$ die $p-2$ übrigen Nullpunkte von $\varphi$, so ist

$$u+u'+\dots+u^{(p-1)}+\gamma'+\gamma''+\dots+\gamma^{(p-2)} \equiv 0,$$

oder $\overset{p}{\Sigma} u \equiv -\overset{p-2}{\Sigma}\gamma$.

Daraus erkennt man, dass für diese Wahl der Lage der Punkte $u', \dots u^{(p-1)}$ Zähler und Nenner von $\frac{d}{dz}\lg Q$ Null sind. Ganz wie a. a. O. muss man, um den Werth zu erhalten, Zähler und Nenner zweimal differentiiren und erhält dadurch

$$\frac{d}{dz}\lg Q = \frac{1}{2}\frac{\frac{d^2}{dz^2}\vartheta(\Sigma u-\alpha)}{\frac{d}{dz}\vartheta(\Sigma u-\alpha)} - \frac{1}{2}\frac{\frac{d^2}{dz^2}\vartheta(\Sigma u-\beta)}{\frac{d}{dz}\vartheta(\Sigma u-\beta)}.$$

Da $\frac{d}{dz}\lg Q$ eine algebraische Function von $z$ ist, so kann ihr Werth auch nicht geändert werden, wenn man nach Ausführung der Differentiationen auf der linken Seite für $\Sigma u$ die congruenten $-\Sigma\gamma$ setzt. Durch Ausrechnung findet sich

$$(2.)\quad \begin{cases} \dfrac{f(z,a,b)}{\frac{\partial F}{\partial s}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\frac{\partial F}{\partial s}}\left\{-\dfrac{\varphi_1^2(z)\vartheta''_{11}(\Sigma\gamma+\alpha)+\cdots}{\varphi_1(z)\vartheta_1(\Sigma\gamma+\alpha)+\cdots}+\dfrac{\varphi_1^2(z)\vartheta''_{11}(\Sigma\gamma+\beta)+\cdots}{\varphi_1(z)\vartheta_1(\Sigma\gamma+\beta)+\cdots}\right\} \\ \qquad +\dfrac{1}{2}\dfrac{\vartheta_1(\Sigma\gamma+\alpha)\frac{d}{dz}\varphi_1(z)+\cdots}{\vartheta_1(\Sigma\gamma+\alpha)\varphi_1(z)+\cdots}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\vartheta'_1(\Sigma\gamma+\beta)\frac{d}{dz}\varphi_1(z)+\cdots}{\vartheta_1(\Sigma\gamma+\beta)\varphi_1(z)+\cdots}. \end{cases}$$

Bezeichnen wir mit $\varphi_a(z)$ die Function $\varphi$, welche in den $p-2$ Punkten $\gamma$ und in $\alpha$ verschwindet, so ist

$$\text{Const.}\,\varphi_a(z) = \vartheta'_1(\Sigma\gamma+\alpha)\varphi_1(z)+\dots+\vartheta'_p(\Sigma\gamma+\alpha)\varphi_p(z),$$

denn wegen $\vartheta(\Sigma\gamma+\alpha)=0$ ist der Differentialquotient dieses $\vartheta$ nach jedem der $\gamma$ und nach $\alpha$ auch Null. Dies zeigt, dass der gegebene Ausdruck für $\varphi_a(z)$ in der That in den $\gamma$ und in $\alpha$ verschwindet. Ebenso sei $\varphi_b(z)$ Null in den $\gamma$ und in $\beta$, so ist

$$\text{Const.}\,\varphi_b(z) = \vartheta'_1(\Sigma\gamma+\beta)\varphi_1(z)+\dots+\vartheta'_p(\Sigma\gamma+\beta)\varphi_p(z).$$

Daraus ergeben sich die beiden letzen Glieder in $\frac{f}{\frac{\partial F}{\partial s}}$ auf der rechten Seite von (2.):

$$(3.)\quad \frac{1}{2}\frac{d\lg\varphi_a(z)}{dz}-\frac{1}{2}\frac{d\lg\varphi_b(z)}{dz}.$$

Bis jetzt haben wir die $p-2$ Punkte $\gamma$ ganz willkürlich angenommen. Wählen

wir sie jetzt so, dass sie mit $\alpha$ und $\beta$ die $p$ Nullpunkte einer Function $\varphi$ sind, so können wir $\varphi_a(z) = \varphi_b(z)$ annehmen, und es entsteht:

$$(4.)\qquad f(z,a,b) = \tfrac{1}{2}\left\{-\frac{\varphi_1^2(z)\vartheta''_{11}(\Sigma\gamma+\alpha)+\cdots}{\varphi_1(z)\vartheta'_1(\Sigma\gamma+\alpha)+\cdots} - \frac{\varphi_1^2(z)\vartheta''_{11}(\Sigma\gamma+\beta)+\cdots}{\varphi_1(z)\vartheta_1(\Sigma\gamma+\beta)+\cdots}\right\}.$$

Die Zähler sind die homogenen quadratischen Formen von $\varphi_1(z), \ldots \varphi_p(z)$, so dass $\varphi_\mu^2(z)$, den Factor $\vartheta''_{\mu\mu}(\Sigma\gamma+\alpha)$ oder $\vartheta''_{\mu\mu}(\Sigma\gamma+\beta)$ hat. $2\varphi_\mu(z)\varphi_\nu(z)$ $(\mu \gtrless \nu)$ hat den Factor

$$\vartheta''_{\mu\nu}(\Sigma\gamma+\alpha) \text{ oder } \vartheta''_{\mu\nu}(\Sigma\gamma+\beta).$$

Die additive Constante in (1.) kann leicht bestimmt werden. Legen wir die $\zeta, \zeta_1, \ldots \zeta_{p-1}$ so, dass sie mit den $p-2$ Punkten $\lambda$ die $2p-2$ Nullpunkte einer Function $\varphi$ ausmachen, so kann man schreiben:

$$\Sigma u + \Sigma\lambda \equiv 0,$$

oder genauer

$$(5.)\qquad \begin{cases} u_1+u'_1+\cdots+u_1^{(p-1)}+\lambda'_1+\cdots+\lambda_1^{(p-2)} = \eta'_1\pi i+\eta_1 a_{11}+\cdots+\eta_p a_{1p} \\ \qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ u_p+u'_p+\cdots+u_p^{(p-1)}+\lambda'_p+\cdots+\lambda_p^{(p-2)} = \eta'_p\pi i+\eta_p a_{p1}+\cdots+\eta_p a_{pp}. \end{cases}$$

Dann giebt $z=\zeta$, $z_1=\zeta_1, \ldots$

$$C = \lg\frac{\vartheta(\Sigma u-\alpha)}{\vartheta(\Sigma u-\beta)}.$$

Der Quotient wird wieder Null durch Null. Nimmt man die $\Sigma u_1, \ldots \Sigma u_p$ um $\delta_1, \ldots \delta_p$ von den durch (5.) gegebnen Ausdrücken verschieden an, so ergiebt sich

$$C = \lg\frac{\delta_1\vartheta'_1(\Sigma\lambda+\alpha)+\cdots+\delta_p\vartheta'_p(\Sigma\lambda+\alpha)}{\delta_1\vartheta'_1(\Sigma\lambda+\beta)+\cdots+\delta_p\vartheta'_p(\Sigma\lambda+\beta)} + 2(\eta_1(\alpha_1-\beta_1)+\cdots+\eta_p(\alpha_p-\beta_p)).$$

Dies wird wieder einfach, wenn die $\lambda$ mit $\alpha$ und $\beta$ Nullpunkte einer Function $\varphi$ sind. Für $p=3$ ist $\varphi$ durch die $p-1=2$ Punkte $\alpha$ und $\beta$ bestimmt; in diesem Falle muss also dann $\lambda$ auf $\gamma$ fallen. Es ist nämlich jetzt, analog wie vorhin $\varphi_a(z)=\varphi_b(z)$ wurde:

$$\vartheta'_1(\Sigma\lambda+\alpha)\varphi_1(z)+\cdots = \text{Const.}(\vartheta'_1(\Sigma\lambda+\beta)\varphi_1(z)+\cdots),$$

wenn in den $\lambda$ und $\alpha$ sowohl als auch in den $\lambda$ und $\beta$ nur je eine Function $\varphi$ verschwinden kann; diese müssen dann bis auf einen constanten Factor identisch sein. Aus dieser Eigenschaft, welche die letzte Gleichung ausdrückt, folgt:

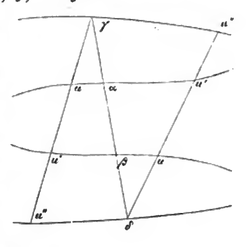
$$(6.)\qquad \frac{\vartheta'_1(\Sigma\lambda+\alpha)}{\vartheta'_1(\Sigma\lambda+\beta)} = \cdots = \frac{\vartheta'_p(\Sigma\lambda+\alpha)}{\vartheta'_p(\Sigma\lambda+\beta)},$$

so dass

$$(7.)\quad \begin{cases} C = \lg \dfrac{\vartheta_l'(\Sigma\lambda+\alpha)}{\vartheta_l'(\Sigma\lambda+\beta)} + 2(\eta_1(\alpha_1-\beta_1)+\cdots+\eta_p(\alpha_p-\beta_p)) \\ \qquad l = 1, 2 \ldots p. \end{cases}$$

Es ist also nöthig, die Summen der $p$ Integrale $u_1, \ldots u_p$, jede derselben über die $p$ Punkte $\zeta, \zeta', \ldots \zeta^{(p-1)}$ und über die $p-2$ Punkte $\lambda$ ausgedehnt, zu kennen. Die Art der Bestimmung der Anfangspunkte wird vielleicht deutlicher, wenn wir sie geometrisch fassen.

$F(s, z) = 0$ sei die Gleichung einer Curve. Dann sind $\varphi = 0$ die Gleichungen von Curven, welche durch alle Doppelpunkte der ersteren hindurchgehen und ausser in diesen Punkten noch in $2p-2$ Punkten, von denen $p-1$ beliebig sind, schneiden. Wir legen eine solche Curve $\varphi = 0$ durch $\alpha$ und $\beta$; $p-2$ beliebige der noch übrigen $p$ Schnittpunkte nehmen wir als Punkte $\lambda$ und legen durch diese eine neue Curve $\varphi = 0$; die $p$ Schnittpunkte, die diese ausser $\lambda$ noch besitzt, sind die $\zeta, \zeta', \ldots \zeta^{(p-1)}$.




Z. B. für $p = 3$ ist $\varphi$ durch $\alpha$ und $\beta$ bestimmt. $F = 0$ ist die Gleichung einer Curve vierter Ordnung, $\varphi = 0$ die Gleichung einer Geraden. In der Figur kann man $\gamma$ oder $\delta$ als $\lambda$ nehmen; dann erhält man, indem man durch $\gamma$ oder $\delta$ eine neue Gerade legt, zweierlei Bestimmung der Anfangswerthe.

Die $p-2$ Punkte, die ausser $\alpha$ und $\beta$ (in der Figur entweder $\gamma$ oder $\delta$) nicht als $\lambda$ genommen sind, sollen mit $\varkappa', \ldots \varkappa^{(p-2)}$ bezeichnet sein. Entweder ist also für $p = 3$:

$\gamma$ der Punkt $\lambda'$, $\delta$ der Punkt $\varkappa'$
oder $\delta$ - - $\lambda'$, $\gamma$ - - $\varkappa'$

Dann habe man

$$(8.)\quad \begin{cases} \alpha_1+\beta_1+\Sigma\lambda_1^{(\mu)}+\Sigma\varkappa_1^{(\mu)} = \varepsilon_1'\pi i+\varepsilon_1 a_{11}+\cdots+\varepsilon_p a_{1p}, \\ \alpha_p+\beta_p+\Sigma\lambda_p^{(\mu)}+\Sigma\varkappa_p^{(\mu)} = \varepsilon_p'\pi i+\varepsilon_1 a_{p1}+\cdots+\varepsilon_p a_{pp}, \end{cases}$$

und dies giebt:

$$\begin{aligned} u_1+u_1'+\cdots+u_1^{(p-1)} &= \alpha_1+\beta_1+\Sigma\varkappa_1^{(\mu)}+(\eta_1'-\varepsilon_1')\pi i+(\eta_1-\varepsilon_1)a_{11}+\cdots+(\eta_p-\varepsilon_p)a_{1p}, \\ &\vdots \\ u_p+u_p'+\cdots+u_p^{(p-1)} &= \alpha_p+\beta_p+\Sigma\varkappa_p^{(\mu)}+(\eta_p'-\varepsilon_p')\pi i+(\eta_1-\varepsilon_1)a_{p1}+\cdots+(\eta_p-\varepsilon_p)a_{pp}. \end{aligned}$$

Setzen wir dies in den Ausdruck für $C = \lg \frac{\vartheta(\Sigma u - \alpha)}{\vartheta(\Sigma u - \beta)}$ ein, so ergiebt sich, dass bei derselben Wahl der Anfangswerthe wie früher, auch

$$(9.)\qquad C = 2\big((\eta_1 - \varepsilon_1)(\alpha_1 - \beta_1) + \cdots + (\eta_p - \varepsilon_p)(\alpha_p - \beta_p)\big) + \lg \frac{\vartheta_k'(\Sigma x + \beta)}{\vartheta_k'(\Sigma x + \alpha)}$$

ist. Der Vergleich mit (7.) liefert:

$$(10.)\qquad \lg\Big(\frac{\vartheta_k'(\Sigma x + \beta)}{\vartheta_k'(\Sigma x + \alpha)}\,\frac{\vartheta_l'(\Sigma \lambda + \beta)}{\vartheta_l'(\Sigma \lambda + \alpha)}\Big) = 2\big(\varepsilon_1(\alpha_1 - \beta_1) + \cdots + \varepsilon_p(\alpha_p - \beta_p)\big).$$

Die Form der $\vartheta$-Ausdrücke, welche zu Integralen dritter Gattung führen für $p=2$, kann man in noch etwas anderer Weise, als bis jetzt geschehen ist, verallgemeinern.

Man kann nämlich von

$$\lg \frac{\vartheta(u - u' - \overset{p-1}{\Sigma}\alpha)}{\vartheta(u - u' - \overset{p-1}{\Sigma}\beta)} = \lg Q$$

ausgehen.

Es ist dies eine Summe zweier Integrale dritter Gattung; das erste, mit der oberen Grenze $z$, zu $u$ gehörig, wird in den $p-1$ Punkten $\alpha$ und den $p-1$ Punkten $\beta$ unendlich. Das zweite, mit der oberen Grenze $z_1$, zu $u'$ gehörig, wird in den Punkten unendlich, welche den $\alpha$ und $\beta$ respective durch eine Gleichung $\varphi = 0$ verknüpft sind. Wir schreiben

$$(11.)\qquad \lg Q = \int^{z} \frac{f(z)}{\frac{\partial F}{\partial s}}\,dz + \int^{z_1} \frac{f(z')}{\frac{\partial F}{\partial s}}\,dz.$$

Der Ausdruck $\frac{d \lg Q}{dz}$ wird gefunden, indem man $u = u'$ setzt. Dann ist in diesem Ausdruck Zähler und Nenner Null, und eine ganz ähnliche Rechnung wie früher ergiebt:

$$(12.)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{f(z)}{\frac{\partial F}{\partial s}} &= \frac{1}{2}\,\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial s}}\left\{\frac{\varphi_1^2(z)\vartheta_{11}''(-\Sigma\alpha) + \cdots}{\varphi_1(z)\vartheta_1'(-\Sigma\alpha) + \cdots} - \frac{\varphi_1^2(z)\vartheta_{11}''(-\Sigma\beta) + \cdots}{\varphi_1(z)\vartheta_1'(-\Sigma\beta) + \cdots}\right\} \\ &\quad + \frac{1}{2}\,\frac{d\lg\varphi_a(z)}{dz} - \frac{d\lg\varphi_b(z)}{dz}. \end{aligned}\right.$$

Hier ist $\varphi_a(z) = 0$ in den $p-1$ Punkten $\alpha$, $\varphi_b(z) = 0$ in den $\beta$.

Will man $f'(z)$ haben, so braucht in (12.) nur $+\Sigma\alpha$ für $-\Sigma\alpha$, $+\Sigma\beta$ für $-\Sigma\beta$ gesetzt zu werden. Bemerkenswerth ist der Fall, wenn die $\alpha$ und $\beta$ selbst durch eine Gleichung $\varphi = 0$ verknüpft sind. Dann ist

$$\varphi_a(z) = \varphi_b(z),$$

und es ist einfacher:

$$(13.)\qquad f(z) = -\frac{\varphi_1^2(z)\,\vartheta''_1(\overset{p-1}{\Sigma}\alpha)+\cdots}{\varphi_1(z)\,\vartheta'_1(\Sigma\alpha)},\quad f'(z) = -f(z)$$

$$(14.)\qquad \lg\frac{\vartheta(u-u'-\overset{p-1}{\Sigma}\alpha)}{\vartheta(u-u'+\Sigma\alpha)} = \int_\zeta^z \frac{f(z)}{\frac{\partial F}{\partial s}}dz - \int_\zeta^{z_1}\frac{f(z)}{\frac{\partial F}{\partial s}}dz + C.$$

Die Constante $C$ ist offenbar $\pi i$, wenn man $\lg(-1) = \pi i$ annimmt. Denn für $u$ nahe gleich $u'$ wird die linke Seite

$$\lg\frac{\delta_1\vartheta'_1(-\Sigma\alpha)+\cdots}{\delta_1\vartheta'_1(+\Sigma\alpha)+\cdots} = \lg(-1).$$

Im früheren Aufsatze habe ich für $p=2$ die Formel für die Vertauschung von Parameter und Argument angegeben. Man kann durch ein sehr einfaches Verfahren die allgemeinste Formel dieser Art erhalten. Nimmt man auf (1.) Rücksicht, so ist offenbar, wenn wir jetzt mit $x$ und $y$ die oberen Grenzen der Integrale für die Punkte $u$ und $v$ bezeichnen:

$$\lg\frac{\vartheta(u+u'+\cdots+u^{(p-1)}-\alpha)}{\vartheta(u+u'+\cdots+u^{(p-1)}-\beta)} - \lg\frac{\vartheta(v+u'+\cdots+u^{(p-1)}-\alpha)}{\vartheta(v+u'+\cdots+u^{(p-1)}-\beta)} = \int_y^x \frac{f(z,a,b)}{\frac{\partial F}{\partial s}}dz.$$

Sind nun die Punkte $v', \ldots v^{(p-1)}$ so bestimmt, dass

$$u'+\cdots+u^{(p-1)}+v'+\cdots+v^{(p-1)} \equiv 0,$$

so ist die linke Seite bei etwas anderer Anordnung identisch mit:

$$\lg\frac{\vartheta(\alpha+v'+\cdots+v^{(p-1)}-u)}{\vartheta(\alpha+v'+\cdots+v^{(p-1)}-v)} - \lg\frac{\vartheta(\beta+v'+\cdots+v^{(p-1)}-u)}{\vartheta(\beta+v'+\cdots+v^{(p-1)}-v)} = \int_b^a \frac{f(z,x,y)}{\frac{\partial F}{\partial s}}dz.$$

Man hat daher ganz allgemein:

$$(15.)\qquad \int_y^x \frac{f(z,a,b)}{\frac{\partial F}{\partial s}}dz = \int_b^a \frac{f(z,x,y)}{\frac{\partial F}{\partial s}}dz.$$

Halle, im Juni 1866.

# Note sur l'algorithme des tangentes doubles d'une courbe du quatrième ordre.

(Par M. *A. Cayley* à Cambridge.)

---

On n'a pas, je crois, assez fait attention à l'algorithme (tiré de la considération d'une figure dans l'espace) qu'a trouvé M. *Hesse* (dans le mémoire „Ueber die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung" t. XLIX de ce Journal, 1855) pour dénoter les tangentes doubles (ou bitangentes) d'une courbe du quatrième ordre. Voici en quoi cet algorithme consiste. En employant les huit symboles 1, 2, 3, ... 8, les 28 bitangentes sont représentées par les combinaisons binaires 12, 13, 14, ... 78. Cela posé, considérons une expression quelconque 12, 13, 14, ou 12, 34, ... ou disons un „terme" qui représente un système d'une seule ou de plusieurs des bitangentes. On peut opérer sur ce terme avec deux espèces de substitutions; la substitution ordinaire qui consiste à changer l'arrangement 12345678 des huit symboles en un autre arrangement quelconque; et la substitution „bifide" représentée par un symbole tel que 1234.5678, lequel dénote qu'il faut entrechanger les combinaisons 12 et 34, 13 et 24, 14 et 23, 56 et 78, 57 et 68, 58 et 67, en ne changeant pas les autres combinaisons. Par exemple en opérant avec 1234.5678 sur 34, 45, 56, 17 on obtient 12, 45, 78, 17. Le nombre de ces substitutions bifides est 35, ou en comptant la substitution, unité, qui ne change aucune des combinaisons, ce nombre est 36.

Appelons „homotypiques" deux termes qui se dérivent l'un de l'autre par une substitution ordinaire; „syntypiques" qui se dérivent l'un de l'autre par une substitution ordinaire ou bifide; „sous-groupe" le système entier des termes homotypiques à un terme donné: „groupe" le système entier des termes syntypiques à un terme donné. Un groupe peut contenir un seul sous-groupe, ou plusieurs sous-groupes; mais il importe de remarquer que la notion du sous-groupe n'a pas de signification géométrique, et ne sert que comme moyen de former les termes du groupe. Cela étant, le théorème géométrique est celui-ci; „les systèmes de bitangentes représentées par des termes syntypiques (ou autrement dit, par des termes qui appartiennent au même groupe) ont les mêmes propriétés géométriques."

Par exemple, en considérant les bitangentes deux à deux, on a deux sous-groupes, l'un composé de termes homotypiques à 12, 13; l'autre, de termes homotypiques à 12, 34 — ou disons, le sous-groupe 12, 13 de 168 termes et le sous-groupe 12, 34 de 210 termes; mais ces deux sous-groupes ne forment qu'un seul groupe: pour montrer cela il suffit d'opérer sur 12, 13, par exemple avec la substitution 1245.3678, ce qui donne 45, 13 terme homotypique à 12, 34. Cela veut dire qu'il n'y a pas de combinaison de deux-bitangentes qui se distingue d'une manière quelconque de toute autre combinaison de deux bitangentes.

Mais en combinant les bitangentes trois à trois, on a les deux sous-groupes 12, 34, 56 (420 termes) et 12, 23, 34 (840 termes) qui forment un groupe de 1260 termes; les trois bitangentes représentées par un quelconque des 1260 termes ont leurs six points de contact sur une même conique. Les trois autres sous-groupes 12, 23, 31 (56 termes), 12, 23, 45 (1680 termes) et 12, 13, 14 (280 termes) forment un groupe de 2016 termes — et pour trois bitangentes représentées par un terme quelconque de ce groupe, les six points de contact ne sont pas situés sur une même conique.

Comme un autre exemple j'explique la constitution des 63 „groupes" de *Steiner* (voir le mémoire de *Steiner*, „Eigenschaften der Curven vierten Grades rücksichtlich ihrer Doppeltangenten" t. XLIX de ce journal, 1855) ou (pour éviter l'emploi de ce mot *groupe* dans une nouvelle signification) disons les 63 termes $G$ de *Steiner*, chaque terme composé de 6 paires de bitangentes. On a ici un sous-groupe de 35 termes $G_1$ de la forme

12, 34; 13, 42; 14, 23; 56, 78; 57, 86; 58, 67

(pour abréger on peut dénoter ce terme par 1234.5678), et un sous-groupe de 28 termes $G_2$ de la forme

13, 32; 14, 42; 15, 52; 16, 62; 17, 72; 18, 82

(pour abréger on peut de même dénoter ce terme par 12.345678), les deux sous-groupes forment le groupe des 63 termes $G$.

*Steiner* a de plus considéré les „systèmes" ou disons les termes $S_1$, $S_2$, composés chacun de trois termes $G$; savoir 315 termes $S_1$ et 336 termes $S_2$. Les 315 termes $S_1$ sont ici un groupe composé d'un sous-groupe de 105 termes $3G_1$ de la forme

1234.5678; 1256.3478; 1278.3456

et un sous-groupe de 210 termes $2G_2+G_1$ de la forme

12.345678; 34.125678 et 1234.5678.

Et de même les 336 termes $S_2$ sont un groupe composé d'un sous-groupe de 280 termes $2G_1 + G_2$ de la forme

$$1234.5678; \quad 5234.1678 \quad \text{et} \quad 15.234678$$

et un sous-groupe de 56 termes $3G_2$ de la forme

$$12.345678; \quad 13.245678; \quad 31.245678.$$

Il va sans dire que je me suis servi de l'abréviation 1234.5678 pour dénoter le terme 12, 34; 13, 42; 14, 23; 56, 78; 57, 86; 58, 67; et de même pour les autres termes $G_1$ ou $G_2$.

M. *Aronhold* (dans le mémoire „Ueber den gegenseitigen Zusammenhang der 28 Doppeltangenten einer allgemeinen Curve vierten Grades" Berl. Monatsber. Juli 1864), partant de 7 bitangentes données, a trouvé une construction pour les autres 21 bitangentes. Les bitangentes données doivent être indépendantes; savoir pour trois quelconques de ces 7 bitangentes, les six points de contact ne sont pas situés sur une même conique. Les bitangentes représentées par les termes 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 sont un tel système de bitangentes indépendantes; et en dénotant de cette manière les 7 bitangentes données, la bitangente construite par le moyen de la conique qui touche cinq de ces droites, par exemple les droites 38, 48, 58, 68, 78, (ou conique 34567) peut être dénotée par 12, et de même pour les autres bitangentes cherchées; on a ainsi le système entier des bitangentes dénotées comme auparavant par 12, 13, 14, ... 78.

J'ajoute que le groupe qui contient 18, 28, 38, 48, 58, 68, 78 est composé d'un sous-groupe 18, 28, 38, 48, 58, 68, 78 de 8 termes, et d'un sous-groupe 12, 23, 31, 48, 58, 68, 78 de 280 termes; le groupe contient donc 288 termes; savoir il y a ce nombre 288 de systèmes de sept bitangentes indépendantes qui peuvent chacun servir à trouver par la construction d'*Aronhold* les autres 21 bitangentes.

P. S. J'ai trouvé à propos de la méthode de M. *Aronhold* une forme commode pour l'équation de la conique qui touche cinq droites données; en supposant que l'on ait identiquement $x+y+z+w=0$, et que les droites données soient $x=0$, $y=0$, $z=0$, $w=0$, et $ax+by+cz+dw=0$, l'équation de la conique est

$$(a-d)^2(b-c)^2(xw+yz)+(b-d)^2(c-a)^2(yw+zx)+(c-d)^2(a-b)^2(zw+xy)=0.$$

J'ajoute qu'en écrivant pour abréger,

$$\alpha:\beta:\gamma=(a-d)(b-c):(b-d)(c-a):(c-d)(a-b)$$

(d'où $\alpha+\beta+\gamma=0$) les coordonnées $(x, y, z, w)$ des points de contact avec les droites

$x=0$, $y=0$, $z=0$, $w=0$ sont $(0,\gamma,\beta,\alpha)$, $(\gamma,0,\alpha,\beta)$, $(\beta,\alpha,0,\gamma)$, $(\alpha,\beta,\gamma,0)$ respectivement: et que les coordonnées du point de contact avec la droite $ax+by+cz+dw=0$ sont

$$x:y:z:w \;=\; (bcd):-(cda):(dab):-(abc)$$

où, pour abréger, $(bcd)$ dénote $(b-c)(c-d)(d-b)$, et de même pour $(cda)$, $(dab)$, $(abc)$.

Cambridge, 23. septembre 1867.

# Notiz über zwei Systeme von partiellen Differentialgleichungen.

(Von Herrn *Paul du Bois-Reymond* in Heidelberg.)

---

Bei Untersuchungen im Gebiete der Theorie der partiellen Differentialgleichungen begegnet man nicht selten folgenden zwei Systemen linearer partieller Differentialgleichungen:

$$(\text{I.})\qquad u_1\frac{\partial z_p}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial z_p}{\partial x_2}+\cdots+u_n\frac{\partial z_p}{\partial x_n}=U_p,\quad p=1,2,\ldots m,$$

$$(\text{II.})\qquad u_1\frac{\partial z_1}{\partial x_p}+u_2\frac{\partial z_2}{\partial x_p}+\cdots+u_n\frac{\partial z_n}{\partial x_p}=U_p,\quad p=1,2,\ldots n.$$

Im zweiten System muss also die Anzahl der gesuchten Functionen $z$ gleich der Anzahl der Argumente $x$ sein.

Die Auflösung beider Systeme lässt sich mit der Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen in Zusammenhang bringen, wovon in dieser Notiz die Rede sein soll.

Was das System (I.) betrifft, so hat *Jacobi* durch einen Verificationscalcul nachgewiesen*), dass seine Integrale willkürliche Functionen der Integrale folgendes Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen sind:

$$(1^a.)\qquad \frac{dx_1}{u_1}=\frac{dx_2}{u_2}=\cdots=\frac{dx_n}{u_n}=\frac{dz_1}{U_1}=\frac{dz_2}{U_2}=\cdots=\frac{dz_m}{U_m}.$$

Für Lehrzwecke ist es vielleicht nicht ganz überflüssig zu zeigen, wie der *Jacobi*sche Satz sehr einfach und ohne Rechnung aus den bekannten Eigenschaften der Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen folgt.

Greifen wir irgend eine Gleichung des Systems (I.) heraus, z. B. die erste:

$$(1.)\qquad u_1\frac{\partial z_1}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial z_1}{\partial x_2}+\cdots+u_n\frac{\partial z_1}{\partial x_n}=U_1$$

und betrachten die Uebrigen als nicht vorhanden, so kann man diese Gleichung auffassen als eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung für $z_1$, in deren Coefficienten vollkommen willkürliche Functionen $z_2, z_3, \ldots z_m$ vor-

---

*) Bd. II., pag. 321 dieses Journals.

kommen. Sobald man über diese verfügt hat, ist bekanntlich das gesuchte Integral der vorstehenden Gleichung eine willkürliche Function der Integrale des Systems:

$$(2.)\qquad \frac{dx_1}{u_1} = \frac{dx_2}{u_2} = \cdots = \frac{dx_n}{u_n} = \frac{dz_1}{U_1}.$$

Statt jedoch von vorn herein die beliebigen Functionen $z_2, z_3, \ldots z_m$ der $x$ als gegeben anzunehmen, kann man zum vorstehenden System (2.) $m-1$ beliebige Differentialgleichungen hinzufügen, z. B. von dieser Form:

$$(3.)\qquad \frac{dz_1}{U_1} = \frac{dz_2}{V_2} = \frac{dz_3}{V_3} = \cdots = \frac{dz_m}{V_m},$$

wo die $V$ beliebige Functionen der $x$ und $z$ sind. Dies läuft in der That auf dasselbe hinaus, wie wenn man die $z_2, z_3, \ldots z_m$ als von vorn herein gegeben annimmt. Denn denkt man sich die zur Bestimmung der $z_2, \ldots z_m$ gegebenen Gleichungen differentiirt, und sowohl aus ihnen, als auch aus den Gleichungen (2.) die Differentiale $dx_1, dx_2, \ldots dx_n$ eliminirt, so kann man die sich ergebenden $m-1$ Gleichungen zwischen den Differentialen $dz$ auf die Form (3.) bringen, und da die $V$ in derselben Zahl vorhanden sind, wie die für die $z_2, z_3, \ldots z_m$ willkürlich gegebenen Gleichungen, so sind die $V$ vollständig willkürlich.

Denkt man sich jetzt die Integrale des Systems:

$$(4.)\qquad \frac{dx_1}{u_1} = \frac{dx_2}{u_2} = \cdots = \frac{dx_n}{u_n} = \frac{dz_1}{U_1} = \frac{dz_2}{V_2} = \frac{dz_3}{V_3} = \cdots = \frac{dz_m}{V_m}$$

vorgelegt, so sind $m$ willkürliche Functionen dieser Integrale gleich Null gesetzt, die Integrale von (1.), wenn (1.) als eine Differentialgleichung für $z_1$, $z_2, \ldots z_m$ angesehen wird, in der die Differentialquotienten von $z_2, z_3, \ldots z_m$ fehlen. Auch dies liegt auf der Hand, sobald man folgendes beachtet:

Hat man nämlich ein System von $m+n$ Differentialgleichungen:

$$dx_p = X_p\,dz,\qquad p = 1, 2, \ldots m, m+1, \ldots m+n$$

nebst ihren Integralen:

$$\alpha_p = \varphi_p(x_1, x_2, \ldots x_{m+n}, z),\qquad p = 1, 2, \ldots m, m+1, \ldots. m+n$$

und benutzt die Integrale $\alpha_{m+1} = \varphi_{m+1}, \ldots \alpha_{m+n} = \varphi_{m+n}$ dazu, um aus den übrigen Integralen einerseits und den Differentialgleichungen $dx_1 = X_1 dz, \ldots dx_m = X_m dz$ andererseits die Variabeln $x_{m+1}, \ldots x_{m+n}$ zu eliminiren, so sind die so veränderten Integrale $\alpha_1 = \varphi_1, \ldots \alpha_m = \varphi_m$ die Integrale der veränderten Differentialgleichungen $dx_1 = X_1 dz, \ldots dx_m = X_m dz$. Denn differentiiren wir z. B.

das erste Integral $\alpha_1 = \varphi_1$, in welchem nun $x_{m+1}, \dots x_{m+n}$ nicht mehr enthalten sind, so folgt:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} X_2 + \cdots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_m} X_m + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = 0.$$

Wäre $\varphi_1$ kein Integral, mithin diese Gleichung keine Identität, so müsste sie eine Relation zwischen den Grössen:

$$x_1, x_2, \dots x_m; \quad \alpha_{m+1}, \dots \alpha_{m+n}$$

sein. Eine solche Relation kann es aber nicht geben, da man aus den $n$ Integralen $\alpha_{m+1} = \varphi_{m+1}, \dots \alpha_{m+n} = \varphi_{m+n}$ nicht die $n$ Grössen $x_{m+1}, \dots x_n$ eliminiren kann.

Dies berücksichtigt, denke man sich die Grössen $z_2, z_3, \dots z_m$ aus $m-1$ der Integrale des Systems (4.) oder, was dasselbe ist, aus $m-1$ Combinationen dieser Integrale bestimmt. Diese Grössen $z_2, z_3, \dots z_m$ setzen wir ein in die übrigen Integrale des Systems (4.), in die Differentialgleichungen (2.) und in die Differentialgleichung (1.). Bestimmt man darauf $z_1$ aus einem der übrigen Integrale des Systems (4.) oder aus einer Combination dieser Integrale und setzt es in (1.) ein, so muss es nach der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung die Gleichung (1.) identisch erfüllen. Wir brauchen aber nicht, wie eben geschehen, die einzelnen Operationen algebraisch zu trennen, sondern es werden $z_1, z_2, \dots z_m$, aus beliebigen $m$ Integralen des Systems (4.) bestimmt, die partielle Differentialgleichung (1.) erfüllen.

Damit ist aber auch der *Jakobi*sche Satz bewiesen, denn wenn man z. B. $U_2$ statt $V_2$ schreibt, so werden die $z$, aus $m$ Integralen des Systems:

$$(5.) \qquad \frac{dx_1}{u_1} = \frac{dx_2}{u_2} = \cdots = \frac{dx_n}{u_n} = \frac{dz_1}{U_1} = \frac{dz_2}{U_2} = \frac{dz_3}{V_3} = \cdots = \frac{dz_m}{V_m}$$

bestimmt, jede einzelne der beiden Gleichungen:

$$u_1 \frac{\partial z_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial z_1}{\partial x_2} + \cdots + u_n \frac{\partial z_1}{\partial x_n} = U_1,$$

$$u_1 \frac{\partial z_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial z_2}{\partial x_2} + \cdots + u_n \frac{\partial z_2}{\partial x_n} = U_2$$

befriedigen, da nach dem Vorigen die erste erfüllt wird, und für die zweite genau dieselbe Betrachtung, wie für die erste, gilt, indem das System (5.) für beide symmetrisch ist. Ersetzt man nunmehr successive die $V$ durch die $U$, so findet man schliesslich, dass die $z$ aus $m$ beliebigen Combinationen der Integrale des Systems ($I^a$.) bestimmt, das System (I.) befriedigen, w. z. b. w.

Was ferner das System (II.) anbelangt, so lässt sich leicht zeigen, dass es nur eine Transformation der *Pfaff*schen Differentialgleichung ist. Multipliciren wir nämlich jede der Gleichungen:

$$u_1 \frac{\partial z_1}{\partial x_p} + u_2 \frac{\partial z_2}{\partial x_p} + \cdots + u_n \frac{\partial z_n}{\partial x_p} = U_p, \qquad p = 1,\ 2,\ \ldots\ n$$

mit $dx_p$ und addiren sie, so finden wir, wegen

$$dz_q = \frac{\partial z_q}{\partial x_1} dx + \frac{\partial z_q}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial z_q}{\partial x_n} dx_n:$$

$$(6.) \qquad u_1 dz_1 + u_2 dz_2 + \cdots + u_n dz_n \;=\; U_1 dx_1 + U_2 dx_2 + \cdots + U_n dx_n,$$

eine *Pfaff*sche Gleichung zwischen den $2n$ Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n, z_1, z_2, \ldots z_n$, deren $n$ Integrale, die auf bekannte Weise mit den Integralen gewisser gewöhnlicher Differentialgleichungen in Zusammenhang stehen, auch die Integrale des Systems (II.) sind. Die *Pfaff*sche Gleichung (6.) und das System (II.) sind vollständig äquivalent *).

Ist umgekehrt eine *Pfaff*sche Gleichung:

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n} \;=\; 0$$

mit ihren $n$ Integralen gegeben, so können diese $n$ Integrale dienen, um $n$ von den Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_{2n}$ durch die $n$ übrigen auszudrücken. Die letzteren spielen dann die Rolle von Argumenten, deren Incremente willkürlich sind.

Es seien $x_1, x_2, \ldots x_n$ die als abhängig, und $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots x_{2n}$ die als unabhängig gedachten Variabeln, so dass

$$dx_p = \frac{\partial x_p}{\partial x_{n+1}} dx_{n+1} + \frac{\partial x_p}{\partial x_{n+2}} dx_{n+2} + \cdots + \frac{\partial x_p}{\partial x_{2n}} dx_{2n}, \quad p = 1, 2, \ldots n.$$

Diese Ausdrücke in die *Pfaff*sche Gleichung eingeführt und die Coefficienten der willkürlichen Differentiale $dx_{n+1}, dx_{n+2}, \ldots dx_{2n}$ gleich Null gesetzt, erhält man folgendes System von partiellen Differentialgleichungen:

$$X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_{n+p}} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_{n+p}} + \cdots + X_n \frac{\partial x_n}{\partial x_{n+p}} \;=\; -X_{n+p}, \qquad p = 1, 2, \ldots n,$$

also ein System (II.). Solcher Systeme (II.) erhält man durch verschiedene Wahl

---

*) Ueber dieses System (II.) findet sich folgende Aeusserung bei *Jacobi* in seiner Abhandlung „Dilucidationes etc." (Bd. XXIII, pag. 86 dieses Journals): Quod et ipsum (systema) ad aequationes differentiales vulgares reduci potest, sed ea multo difficilior est reductio, et ad Calculi Integralis problemata maxime sublimia pertinet. Und in einer späteren Abhandlung (Theor. nov. Mult. etc., Bd. XXIX, pag. 248 dieses Journals) bewirkt er diese Zurückführung in einem sehr speciellen Fall.

der abhängigen Variabeln $\frac{(n+1)\ldots 2n}{1.2\ldots n}$, die alle unter sich und mit der *Pfaff*-schen Gleichung, aus der sie entstanden, völlig äquivalent sind, und die alle auf dieselbe *Pfaff*sche Gleichung zurückgeführt werden können.

Diese Ueberführung der *Pfaff*schen Gleichung in die *Lagrange*sche Form bietet öfters Vortheil, z. B. um die Bedingungen dafür zu erhalten, dass sie durch weniger als $n$ Integrale befriedigt werden könne, besonders aber bei Behandlung eines Systems von zwei *Pfaff*schen Gleichungen, von welchem die partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung abhängen, auf welche Punkte ich gelegentlich zurückkommen werde.

Heidelberg, im August 1867.

---

# Ueber die Anzahl der Kegelschnitte, welche acht Gerade im Raume schneiden.

(Von Herrn *J. Lüroth* in Heidelberg.)

Ein Complex $n^{\text{ter}}$ Ordnung von geraden Linien (im *Plücker*schen Sinne) kann in speciellen Fällen degeneriren in eine Raumcurve $n^{\text{ter}}$ Ordnung. Man kann die Bedingung, dass eine Gerade eine Curve schneidet, also die Gleichung der Curve in *Plücker*schen Coordinaten, wenn sie der vollständige Durchschnitt zweier Flächen von den Ordnungen $m$ und $n$ ist, leicht erhalten mit Hülfe eines Satzes, den Herr *Clebsch* (Bd. 59, pag. 1, ff. dieses Journals) gegeben hat. Man hat, nach der dort gegebenen Vorschrift, die Resultante zweier Gleichungen vom $m^{\text{ten}}$ und $n^{\text{ten}}$ Grade symbolisch aufzustellen und die vorkommenden Determinanten durch andere zu ersetzen, die in jeder Reihe zwei Buchstaben mehr und die Coordinaten zweier Ebenen

$$\begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix}$$

als neue Reihen enthalten.

So wird z. B. aus der Resultante

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

von zwei linearen Gleichungen, die Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{vmatrix} = 0$$

einer Geraden erhalten. Aus der Resultante einer quadratischen und linearen Form, die symbolisch ist

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 = 0,$$

entsteht die Gleichung des Kegelschnitts

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{vmatrix}^2 = 0,$$

wo jetzt die $b_i$ die Coordinaten einer Ebene sind und für die symbolischen Producte $a_i a_k$ die Coefficienten einer Fläche zweiter Ordnung gesetzt werden müssen.

Die Frage, wie viele Gerade nun nothwendig sind, um einen Kegelschnitt zu bestimmen, und wie viele Curven so bestimmt werden, dürfte sich aus der obigen Gleichung, wegen der complicirten Beziehung zwischen den Coefficienten, nicht leicht beantworten lassen. Ich habe es daher vorgezogen, auf geometrischem Wege eine Lösung zu versuchen, die ich mir hier vorzulegen erlaube.

1) Da ein Kegelschnitt durch fünf Punkte bestimmt ist, so kann, wenn nur fünf Linien gegeben sind, jede beliebige Ebene einen Kegelschnitt enthalten, der die fünf Linien schneidet.

Sind sechs Linien gegeben, so giebt es folglich eine zweifach unendliche Schaar von Ebenen, welche diese Linien in Punkten schneiden, die auf einem Kegelschnitte liegen. Diese Ebenen werden eine Fläche umhüllen, deren Klasse gleich ist der Anzahl von Ebenen eines Büschels mit der beliebigen Axe $x$, welche die sechs Linien in Punkten eines Kegelschnitts schneiden. Bezeichnen wir die sechs Linien in irgend einer Ordnung mit $a, b, c, d, e, f$ und ihre Schnittpunkte mit irgend einer Ebene des Büschels mit $a', b', c', d', e', f'$, so ist die Bedingung, dass die Scheitel der drei Linienpaare

$$\begin{matrix} a'b' & d'e' \\ b'c' & e'f' \\ c'd' & f'a' \end{matrix}$$

in einer Geraden liegen, nothwendig und hinreichend dafür, dass man durch jene Punkte einen Kegelschnitt legen kann. Dreht man nun die Ebene um $x$, so wird die Linie $a'b'$, da sie an $a$, $b$ und $x$ gleitet, ein Hyperboloid $(abx)$ beschreiben, ebenso die Linie $d'e'$ eines $(dex)$, und folglich wird sich der Scheitel des Linienpaares $a'b'$, $d'e'$ auf einer Curve dritter Ordnung bewegen, die $x$ zur Sehne hat und die wir mit $A$ bezeichnen wollen. Die Scheitel der Linienpaare $b'c'$, $e'f'$ und $c'd'$, $f'a'$ werden in gleicher Weise auf Curven dritter Ordnung $B$ und $C$ liegen, die auch beide $x$ zur Sehne haben. Die Ebenen,

welche der Aufgabe genügen, müssen nun $A$, $B$, $C$ in Punkten schneiden, die auf einer geraden Linie liegen. Um ihre Zahl zu finden, nehme man auf $x$ einen Punkt $\alpha$ an und lege von ihm als Spitze Kegel durch $A$ und $B$. Da diese in $x$ eine Doppelkante haben, schneiden sie sich in fünf Linien. Eine Ebene durch eine dieser Linien und $x$ gelegt, schneidet $C$ nur in einem Punkte, der nicht auf $x$ liegt. Dieser Punkt und der Schnittpunkt mit $B$ bestimmen eine Linie, welche $x$ in $\beta$ treffen möge. Jedem Punkte $\alpha$ entsprechen somit fünf Punkte $\beta$ und ebenso umgekehrt jedem $\beta$ fünf $\alpha$. Wenn ein Punkt $\alpha$ mit einem entsprechenden $\beta$ zusammenfällt, liegen die Schnittpunkte der zugehörigen Ebene mit $A$, $B$, $C$ auf einer Geraden. Zu den zehn Fällen, in welchen dies, dem gegenseitigen Entsprechen von $\alpha$ und $\beta$ zufolge, eintritt, gehören auch die beiden, dass $\alpha$ und $\beta$ in einen der beiden Punkte fallen, die $x$ mit $B$ gemein hat. Diese sind aber nicht zu rechnen, weil, einen dieser Punkte für $\alpha$ genommen, jede durch $x$ gehende Ebene die Eigenschaft hat, denselben Punkt für $\beta$ zu liefern. Es bleiben somit acht Lösungen übrig. Ich habe hier angenommen, dass die sechs Linien in irgend einer Anordnung mit $a, b, \ldots f$ bezeichnet seien. Da aber, wenn sechs Punkte in einem Kegelschnitte liegen, jedes aus ihnen gebildete Sechseck ein *Pascal*sches ist, so ist klar, dass keine anderen Lösungen existiren können als die acht eben gefundenen. Wir haben also den Satz:

> In einem Ebenenbüschel giebt es acht Ebenen, welche sechs beliebig gegebene Linien so schneiden, dass die Schnittpunkte auf einem Kegelschnitte liegen.

und folglich

> Umhüllen alle Ebenen, welche sechs Linien in Punkten eines Kegelschnitts schneiden, eine Fläche achter Klasse.

Nehmen wir an, es seien nur fünf Linien gegeben, so liegt in jeder Ebene des Büschels $x$ ein Kegelschnitt, der diese fünf Linien schneidet, und alle diese Kegelschnitte bilden eine Fläche. Aus dem obigen Satze folgt dann der andere:

> Wenn ein veränderlicher Kegelschnitt an fünf Linien gleitet, so dass seine Ebene stets durch eine Gerade $x$ geht, so beschreibt er eine Fläche achter Ordnung.

Die fünf Linien liegen ganz auf der Fläche und die Gerade $x$ ist sechsfache Curve derselben.

2) Jede durch eine der Linien $a, \ldots f$ z. B. $a$ gelegte Ebene schneidet nur noch $b, c, \ldots f$ in einzelnen Punkten und enthält folglich einen Kegelschnitt, der $a$ zweimal schneidet. Man kann desshalb vermuthen, dass jede durch $a$ gehende Ebene doppelt zu rechnen sei. Um hierüber zu entscheiden, nehmen wir an, die Linie $x$, welche früher beliebig lag, schneide die Linie $a$ in einem Punkte $\gamma$, und suchen jetzt wieder die Zahl der Ebenen, welche durch $x$ gehen und die sechs Linien in Punkten eines Kegelschnitts schneiden. Diese Kegelschnitte sind jetzt gezwungen durch den Punkt $\gamma$ zu gehen. An die Stelle des Hyperboloids $(abx)$ tritt also hier die Ebene $(\gamma b)$. Diese schneidet das Hyperboloid $(dex)$ in einem Kegelschnitte $A$, der den Punkt $\gamma$ enthält. Die Hyperboloide $(bcx)$ und $(efx)$ schneiden sich in einer Curve dritter Ordnung $B$, die mit $x$ zwei Punkte gemein hat, während die Flächen $(cdx)$ und $(fax)$ wieder einen Kegelschnitt $C$ erzeugen, der durch $\gamma$ geht. Einem Punkte $\alpha$ auf $x$ entsprechen dann vier Punkte $\beta$ und umgekehrt. Es fallen somit achtmal zwei entsprechende Punkte zusammen. Von diesen sind aber die beiden Schnittpunkte der Curve $B$ mit $x$ nicht zu rechnen, so dass nur sechs übrig bleiben. Da jedenfalls acht Ebenen durch diese Linie $x$ gehen müssen, so ist die durch $x$ und $a$ gelegte Ebene, welche gleichfalls einen Kegelschnitt enthält, doppelt zu rechnen. Durch diese Untersuchung ist zugleich der Satz bewiesen:

> Die Ebenen der Kegelschnitte, welche durch einen Punkt gehen und fünf Linien schneiden, umhüllen einen Kegel sechster Classe.

Durch jede der Linien $a, \ldots f$ gehen somit unendlich viele doppelt zu rechnende Ebenen unserer Fläche. Diese Linien sind daher als Doppelcurven zu betrachten.

Wenn ferner die Linie $x$ vier von den sechs Linien schneidet, so hat jede durch sie gehende Ebene nur mit zweien der Linien veränderliche Schnittpunkte gemein, die stets auf einer Linie liegen. Jede Ebene eines Büschels, dessen Axe vier der sechs Linien schneidet, enthält also einen zerfallenden Kegelschnitt. Diese $2 . 15 = 30$ Linien sind einfache Linien der Fläche. Ausser diesen sechs Doppel- und dreissig einfachen Geraden enthält die Fläche keine geraden Linien mehr.

3) Wenn nun sieben Linien gegeben sind $a, \ldots f, g$, so kann man die Flächen achter Klasse construiren, welche gehören zu den Linien *abcdef* und *abcdeg*. Jede Ebene, die beiden Flächen angehört, enthält zwei Kegelschnitte, welche fünf Punkte gemein haben, also einen Kegelschnitt, der die sieben Linien

*a, ... g* schneidet. Alle diese Ebenen bilden eine abwickelbare Fläche vierundsechzigster Klasse. In dieser Fläche kommen aber Ebenen vor, welche zwei verschiedene Kegelschnitte enthalten und folglich nicht zu rechnen sind. Damit dies möglich ist, dürfen, wenn beide Kegelschnitte nicht zerfallen, nur vier der Linien *a, ... e* in einzelnen Punkten geschnitten werden. Diese Ebenen bilden also die Büschel, deren Axen *a, b, c, d, e* sind. Jede dieser Ebenen ist vierfach zu rechnen, und die Klasse der abwickelbaren Fläche erniedrigt sich dadurch um 20. Wenn einer der beiden Kegelschnitte zerfällt, so muss, wie man leicht sieht, auch der andere zerfallen, und damit dann beide nicht identisch sind, reicht es hin, wenn ihre Ebene vier der Linien in Punkten einer Geraden schneidet. Dieser Bedingung genügen die Ebenen der zehn Büschel, deren Axen je vier der fünf Linien *a, ... e* treffen. Hiedurch wird die Klasse der abwickelbaren Fläche um weitere 10 erniedrigt, so dass

> Alle Ebenen, welche sieben Linien in Punkten eines Kegelschnittes schneiden, eine abwickelbare Fläche vierunddreissigster Klasse bilden.

4) Untersuchen wir noch, wie viele Kegelschnitte durch einen gegebenen Punkt gehen und sechs Linien z. B. *bcdefg* schneiden. Die Ebenen dieser Kegelschnitte sind nach 2) gemeinsame Tangentenebenen der beiden Kegel sechster Klasse, die zu den Linien *bcdef* und *bcdeg* gehören. Nicht zu rechnen sind aber die Ebenen durch den gegebenen Punkt und die Linien *b, c, d, e* welche Doppeltangentenebenen jedes Kegels sind und die Ebenen durch jenen Punkt und die beiden Linien, welche *bcde* schneiden. Daher der Satz:

> Durch einen beliebigen Punkt gehen achtzehn Kegelschnitte, welche sechs gegebene Linien schneiden.

5) Wenn nun zu den sieben Linien noch eine achte *h* hinzukömmt, so bilden wir noch die Fläche achter Klasse, die zu den Linien *abcdeh* gehört. Die Ebenen, welche sie mit der abwickelbaren Fläche vierunddreissigster Klasse gemein hat, sind die Ebenen, welche die acht Linien in Punkten eines Kegelschnitts schneiden. Auf dieser Fläche liegen aber auch die fünf Doppellinien *abcde* und die zehn einfachen, welche je vier jener schneiden, und die durch diese gehenden Ebenen sind zu verwerfen. Die Ebenen, welche die abwickelbare Fläche mit einer dieser z. B. *a* gemein hat, enthalten einen Kegelschnitt, der die Linien *f* und *g* und somit ausser *a* sechs Linien schneidet. Nach 1) giebt es acht solcher Ebenen. Jede derselben ist doppelt zu rechnen. Um dies

zu erkennen, bemerken wir, dass durch einen Punkt der Linie $a$ z. B. 34 Ebenen der abwickelbaren Fläche gehen müssen. In 4) fanden wir achtzehn solcher Ebenen, die fehlenden sechszehn werden gerade durch die hier gefundenen acht ersetzt, wenn wir sie doppelt zählen. Eine Ebene dagegen, welche $abcd$ in Punkten einer geraden Linie schneidet, kann in zwei Lagen auch noch $efg$ in Punkten einer Geraden treffen. Daher hat jede dieser Linien zwei Ebenen mit der abwickelbaren Fläche gemein. Wir haben also schliesslich das Resultat:

Es giebt $8.34-2.2.5.8-2.10=92$ Kegelschnitte, welche acht beliebig im Raume liegende gerade Linien schneiden.

Heidelberg, 12. November 1867.

# Construction der Fläche zweiten Grades durch neun Punkte.

(Nach den hinterlassenen Manuscripten *Jacob Steiners* dargestellt von Herrn *C. F. Geiser* in *Zürich*.)

---

Die Aufgabe eine Fläche zweiten Grades durch neun im Raume beliebig gegebene Punkte zu legen, ist bekanntlich durch die Herren *Hesse* (Bd. 24 dieses Journals), *Seydewitz* (Bd. 9 des *Grunert*schen Archivs) und *Schröter* (Bd. 62 dieses Journals) gelöst worden. In den hinterlassenen Manuscripten *Steiners* ist nun ein mit kurzen Notizen versehenes Quartblatt vorhanden, welches zeigt, dass *Steiner* bereits im Jahre 1836 zwei verschiedene Constructionen dieser Fläche gefunden hatte, die er aber nicht veröffentlichte, weil die zugehörigen Beweise nicht vollständig und einfach genug und die Constructionen nicht linear waren. Während, wie es scheint, die von *Steiner* als zweite dieser Lösungen bezeichnete Construction nicht auf die nöthige Einfachheit gebracht werden kann, und sich desshalb zur Veröffentlichung nicht eignet, ist es gelungen, mit einigen Abänderungen und Vervollständigungen die erste derselben in eine Form zu bringen, welche, trotzdem die gesuchte Fläche *nicht linear* hergestellt wird, doch mit so geringen Mitteln zum Ziele führt, als man überhaupt bei der complicirten Aufgabe erwarten darf. Ihrer Darstellung ist die nachfolgende kurze Mittheilung gewidmet.

Wenn den neun gegebenen Punkten in einer beliebigen Reihenfolge die Zahlen (1) bis (9) zugefügt werden, so lege man zuerst die Ebenen (123), (456), (789), die man resp. mit I, II, III bezeichne; ihr gemeinschaftlicher Durchschnittspunkt heisse $S$. Die Schnittgeraden von II und III, III und I, I und II, welche $A$, $B$, $C$ heissen sollen, stehen nun zu der gesuchten Fläche $f_2$ in der nachstehenden Beziehung: Jede der Ebenen I, II, III hat mit $f_2$ einen Kegelschnitt gemein, und für diese Kegelschnitte zu je zweien genommen, sind die Geraden $A$, $B$, $C$ gemeinschaftliche (reelle oder ideelle) Sehnen; kann man umgekehrt durch die Punkte 123, 456, 789 drei Kegelschnitte legen, für welche $A$, $B$, $C$ gemeinschaftliche Sehnen sind, so liegen diese drei Kegelschnitte auf $f_2$.

Man betrachte zunächst nur die Punkte (1) bis (8). Die Gerade (23) trifft $B$ und $C$ resp. in Punkten $b$ und $c$, von denen $c$ mit (4), (5) und (6)

eine Kegelschnittschaar bestimmt. Ein willkürlicher Kegelschnitt der Schaar schneidet auf $C$ ausser $c$ einen Punkt $c'$ aus, ferner ergiebt dieser Kegelschnitt $(456cc')$ auf $A$ zwei Punkte $a$ und $a'$, welche mit (7), (8) und $b$ einen neuen Kegelschnitt in der Ebene III bestimmen, der die Gerade $B$ ausser in $b$ noch in einem Punkte $b'$ schneidet. Der Punkt $b'$ ist durch den Punkt $c'$ bestimmt; wenn $c'$ auf der Geraden $C$ sich bewegt, so durchläuft $b'$ die Gerade $B$, und da zu jedem $c'$ stets ein, aber nur ein $b'$ gehört, und umgekehrt, so sind $B$ und $C$ hinsichtlich der Punkte $b'$ und $c'$ projectivisch. Aber $b'$ und $c'$ gehen gleichzeitig durch $S$, d. h. $B$ und $C$ sind zugleich perspectivisch, und alle Verbindungsgeraden entsprechender $b'$ und $c'$ laufen durch einen und denselben in der Ebene I gelegenen Punkt $M$. Fassen wir jetzt die Geraden (23) und $(M1)$ als Kegelschnitt $K_1$ auf, der ganz in der Ebene I liegt, und welcher einen bestimmten Punkt $c'$ auf $C$ ergiebt, so erhält man in der angegebenen Weise zu diesem einen Kegelschnitt $K_2$ in der Ebene II und einen Kegelschnitt $K_3$ in der Ebene III. Diese drei Kegelschnitte haben die Geraden $A$, $B$, $C$ zu gemeinschaftlichen Sehnen, und gehören demzufolge einer Fläche zweiten Grades $F_2$ an, welche durch die Punkte (1) bis (8) geht.

Wiederholt man dieses ganze Verfahren, indem man statt von der Geraden (23) nun von der Geraden (31) ausgeht, so erhält man in den Ebenen I, II, III drei neue Kegelschnitte $K_1'$, $K_2'$, $K_3'$, die wieder auf einer Fläche $F_2$ liegen, welche die Punkte (1) bis (8) enthält. Die Flächen $F_2$ und $F_2'$ schneiden sich in einer durch die Punkte (1) bis (8) gehende Raumcurve, durch welche unendlich viele Flächen zweiten Grades gehen, unter denen sich auch $f_2$ befindet, welche die Punkte (1) bis (9) enthält. Diese Schnittcurve hat mit jeder der Ebenen I, II, III vier Punkte gemein, welche resp. die Durchschnitte von $K_1$ und $K_1'$, $K_2$ und $K_2'$, $K_3$ und $K_3'$ sind. Schneiden sich nun $K_3$ und $K_3'$ ausser in (7) und (8) noch in $\gamma$ und $\gamma'$, so gehört der Kegelschnitt $(78\gamma\gamma'9)$ der gesuchten Fläche $f_2$ an, von welcher natürlich sofort noch zwei andere Kegelschnitte zu finden sind. Damit darf die gestellte Aufgabe als gelöst betrachtet werden, und es ist nur noch hinzuzufügen, dass diese Lösung zugleich die Construction derjenigen Raumcurve vierten Grades ergiebt, welche der Durchschnitt zweier Flächen zweiten Grades ist, und durch acht gegebene Punkte im Raume geht.

Zürich, im Januar 1867.

## Inhaltsverzeichniss des acht und sechzigsten Bandes zweiten Hefts.

# Journal

für die

# reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

---

Als Fortsetzung des von

A. L. Crelle

gegründeten Journals

herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Schellbach, Kummer, Kronecker, Weierstrass

von

C. W. Borchardt.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preussischer Behörden.

---

## Acht und sechzigster Band.

Drittes Heft.

---

Berlin, 1868.
Druck und Verlag von Georg Reimer.

# Ueber die Reciprocität der *Pascal-Steiner*schen und der *Kirkman-Cayley-Salmon*schen Sätze von dem Hexagrammum mysticum.

(Von Herrn *O. Hesse* in Heidelberg.)

---

Die Noten in *Salmons* vierter Auflage seiner berühmten „Conic sections", welche von den Erweiterungen des *Pascal*schen Theoremes handeln, bekunden eine in die Augen fallende Reciprocität deutscher und englischer Entdeckungen. Es stehen sich gegenüber:

| | |
|---|---|
| *60. P . . . Pascalsche Linien.* | *60. K . . . Kirkmansche Punkte. In jedem derselben schneiden sich 3. P.* |
| *20. R . . . Steinersche Punkte. In jedem derselben schneiden sich 3. P.* | *20. $C_s$ . . . Cayley-Salmonsche Linien. Auf jeder derselben liegen 3. K.* |
| *15. $S_r$ . . . Steinersche Linien. Auf jeder derselben liegen 4. R.* | *15. $S_n$ . . . Salmonsche Punkte. In jedem derselben schneiden sich 4. $C_s$.* |

Im Angesichte dieser Thatsachen möchte man glauben, dass die Elemente, *P* und *K* der Figuren, welche auf der einen Seite die *Steiner*schen Punkte und Linien, auf der anderen Seite die *Cayley*schen Linien und *Salmon*schen Punkte bilden, sich als Polaren und Pole der Art auffassen lassen, dass in Rücksicht auf irgend einen Kegelschnitt jeder *Pascal*schen Linie *P* als Polare ein *Kirkman*scher Punkt *K* als Pol entspricht. Denn träfe dieses zu, so wären die neueren Erweiterungen des *Pascal*schen Theoremes sämmtlich reciprok zu den älteren in dem Sinne von Polaren und Polen. Es würden sich daraus aber noch weitere Consequenzen ziehen lassen.

Nach *Kirkman* schneiden sich nämlich 60 Mal drei *Pascal*sche Linien *P* in einem *Kirkman*schen Punkte *K*. Das fragliche Reciprocitäts-Gesetz würde daraus ergeben, dass 60 Mal drei *Kirkman*sche Punkte auf einer geraden Linie liegen. Da nun schon anderweit nach dem *Cayley-Salmon*schen Satze 20 Mal drei *Kirkman*sche Punkte auf einer geraden Linie liegen, so hätte man die reciproken Sätze:

Von den 60 *Kirkman*schen Punkten $K$ liegen 20 Mal drei Punkte $K$ auf einer geraden Linie $C_k$, und überdies liegen 60 Mal drei *Kirkman*sche Punkte $K$ auf einer geraden Linie $H$.

Von den 60 *Pascal*schen Linien $P$ schneiden sich 20 Mal drei *Pascal*sche Linien $P$ in einem *Steiner*schen Punkte $R$, und überdies schneiden sich 60 Mal drei *Pascal*sche Linien $P$ in einem *Kirkman*schen Punkte $K$.

Unzweifelhaft sind nach dem Vorhergehenden die ersten Theile der beiden reciproken Sätze gleich wie der zweite Theil des letzten Satzes. Zweifelhaft, obwohl wahr, bleibt der zweite Theil des ersten Satzes, denn er ist an dieser Stelle nichts weiter als die Consequenz der fraglichen Annahme, dass sich die *Pascal*schen Linien $P$ als Polaren der *Kirkman*schen Punkte $K$ auffassen lassen.

Es ist mir nicht gelungen das vermuthete Reciprocitätsgesetz zu entdecken. Im Gegentheil weiss ich, dass diejenige Reciprocität der *Pascal*schen Linien $P$ und der *Kirkman*schen Punkte $K$, welche ich im Folgenden entwickeln werde, sich *nicht* in dem Sinne von Polaren und Polen auffassen lässt, wenigstens nicht in Rücksicht auf *den* Kegelschnitt, dem die 60 *Pascal*schen Sechsecke einbeschrieben sind. Dennoch wird man das erwähnte Reciprocitätsgesetz als ein ideales gelten lassen, wenn auch nur in der Absicht, entsprechende Thatsachen aus einander abzuleiten.

## §. 1.

Durch 6 auf einem Kegelschnitte $C$ gegebene Punkte $abcdef$ lassen sich 15 gerade Linien $L$ legen, welche jene Punkte paarweise verbinden. Diese 15 geraden Linien $L$ bilden 60 dem Kegelschnitte $C$ einbeschriebene Sechsecke, die mit den Buchstaben $P$ oder $H$ bezeichnet werden. Dieselben Buchstaben sollen zugleich dazu dienen, die den *Pascal*schen Sechsecken entsprechenden *Pascal*schen Linien auszudrücken.

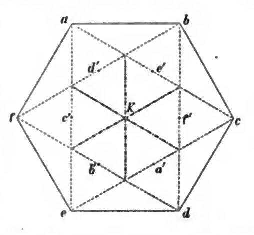
Unterdrückt man von den 15 geraden Linien $L$ 6, welche eines von den 60 *Pascal*schen Sechsecken bilden, zum Beispiel die Seiten des Sechseckes:

$$P = abcdef,$$

so bilden die 9 übrig bleibenden Linien $L$ nur drei von den 60 *Pascal*schen Sechsecken:

$$P^0 = acebfd, \qquad P' = ceadbf, \qquad P'' = eacfdb.$$

Unterdrückt man ausserdem noch die drei Hauptdiagonalen des *Pascal*schen Sechseckes $P$, welche die gegenüberliegenden Ecken paarweise verbinden, so bleiben von den 15 Linien $L$, wie die Figur zeigt, die 6 punktirten geraden Linien zurück, welche zwei dem Kegelschnitte $C$ einbeschriebene Dreiecke bilden. Die Seiten dieser Dreiecke sind bezeichnet mit denselben Buchstaben, als die ihnen gegenüberliegenden Ecken.




Diese beiden dem Kegelschnitte $C$ einbeschriebenen Dreiecke sind nach einem bekannten Satze einem anderen Kegelschnitt $C'$ umbeschrieben. Es ist darum das Sechseck mit den auf einander folgenden Seiten $a'b'\ldots$ ein *Brianchon*sches Sechseck:

$$B = (a'b'c'd'e'f'),$$

dessen Hauptdiagonalen sich in einem *Brianchon*schen Punkte $K$ schneiden.

*Dieser Punkt $K$ ist ein Kirkmanscher Punkt.*

Denn die Hauptdiagonalen des *Brianchon*schen Sechseckes $B$ sind nichts anderes als die *Pascal*schen Linien $P'$, $P'$, $P''$ der eben so bezeichneten Sechsecke.

Der *Kirkman*sche Punkt $K$ heisse *der ideale Pol* der *Pascal*schen Linie $P$, und umgekehrt soll die *Pascal*sche Linie $P$ *die ideale Polare* des *Kirkman*schen Punktes $K$ genannt werden, den wir bezeichnen mit:

$$K = P'P'P''.$$

In dieser Weise ist jeder *Kirkman*sche Punkt $K$ definirt als der ideale Pol einer durch ihn bestimmten *Pascal*schen Linie $P$, wie umgekehrt jede *Pascal*sche Linie als die ideale Polare eines bestimmten *Kirkman*schen Punktes. *Man hat daher 60 Kirkmansche Punkte gleich wie 60 Pascalsche Linien.*

Um den idealen Pol einer, einem gegebenen *Pascal*schen Sechseck entsprechenden, *Pascal*schen Linie zu construiren, lässt man nach dem Vorhergehenden von den 15 Linien $L$ die Seiten des gegebenen Sechseckes fort. Die aus den 9 übrig bleibenden Linien $L$ gebildeten drei *Pascal*schen Sechsecke haben *Pascal*sche Linien, welche sich in dem gesuchten idealen Pole schneiden. Ist umgekehrt ein *Kirkman*scher Punkt $K$ gegeben durch die drei Sechsecke, $P'P'P''$, deren *Pascal*sche Linien sich in ihm schneiden, so braucht man nur von den 15 Linien $L$ die 9 Linien $L$ fortzulassen, welche die Seiten

der drei Sechsecke bilden. Die übrig bleibenden 6 Linien $L$ bilden das Sechseck, dessen *Pascal*sche Linie $P$ die gesuchte ideale Polare des *Kirkman*schen Punktes $K$ ist.

Aber auch die angenommene symbolische Beziehung der *Pascal*schen Linien zu handhaben, macht keine Schwierigkeit. Denn läge an Stelle von $P$ irgend eine andere von den 60 *Pascal*schen Linien $\Pi$ vor:

$$\Pi = \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta,$$

so hätte man nur die lateinischen Buchstaben in die entsprechenden griechischen zu verwandeln, um die drei *Pascal*schen Linien:

$$\Pi^0 = \alpha\gamma\varepsilon\beta\zeta\delta, \qquad \Pi' = \gamma\varepsilon\alpha\delta\beta\zeta, \qquad \Pi'' = \varepsilon\alpha\gamma\zeta\delta\beta$$

zu erhalten, welche sich in dem idealen Pole der *Pascal*schen Linie $\Pi$ schneiden. Von dieser Regel wollen wir gleich eine Anwendung machen.

## §. 2.

Nach dem Vorhergehenden entsprechen einer gegebenen *Pascal*schen Linie drei andere *Pascal*sche Linien, welche sich in dem idealen Pole der gegebenen *Pascal*schen Linie schneiden. Jedem der letzteren entsprechen wieder 3, also in gewisser Weise entsprechen der gegebenen *Pascal*schen Linie 9 *Pascal*sche Linien, sodann 27 und so weiter. Da aber die Zahl der *Pascal*schen Linien auf 60 beschränkt ist, so muss man nothwendiger Weise endlich ein Mal wieder auf einzelne der früheren zurückkommen. Untersuchen wir daher, wie bald dieses geschieht.

Wir gehen von der *Pascal*schen Linie $P$ aus und ihrem idealen Pole $K$:

$$P, \qquad K = P^0 P' P''.$$

Die idealen Pole der *Pascal*schen Linien $P^0$, $P'$, $P''$ seien respective:

$$K^0 = P^0_0 P^0_1 P^0_{11}, \qquad K' = P'_0 P'_1 P'_{11}, \qquad K'' = P''_0 P''_1 P''_{11},$$

indem man nach der in dem vorhergehenden Abschnitte angegebenen Regel hat:

$$P^0_0 = aefcdb, \qquad P^0_1 = efabcd, \qquad P^0_{11} = faedbc,$$
$$P'_0 = acbefd, \qquad P'_1 = abcdef, \qquad P'_{11} = bcafde,$$
$$P''_0 = ecdabf, \qquad P''_1 = cdefab, \qquad P''_{11} = decbfa.$$

Da die Ausdrücke von $P^0_1$, $P'_1$, $P''_1$ nur durch cyclische Vertauschungen der Elemente von dem Ausdrucke $P$ verschieden sind, so haben wir:

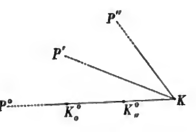
$$P^0_1 = P'_1 = P''_1 = P.$$

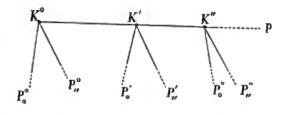
Das will sagen, dass die imaginären Pole $K^0$, $K'$, $K''$ auf der *Pascal*schen Linie $P$ liegen, oder ausführlicher ausgedrückt:

1) *Die idealen Pole der drei Pascalschen Linien, welche durch einen Kirkmanschen Punkt gehen, liegen auf der idealen Polare des Kirkmanschen Punktes.*

Mit Rücksicht auf die eingeführten Definitionen lässt sich dieser Satz kürzer auch so aussprechen:

2) *Es liegen 60 Mal 3 Kirkmansche Punkte K auf einer Pascalschen Linie P.*




Dieser Satz ist gerade der in der Einleitung imaginär abgeleitete Satz. Es zeigt sich aber hier, dass die gerade Linie $H$ dort nichts anderes ist als die *Pascal*sche Linie $P$. Die nebenstehende Figur giebt ein Bild von der Lage der besprochenen Punkte und Linien zu einander und dient zugleich für die folgende Untersuchung.

Bezeichnet man die idealen Pole der drei *Pascal*schen Linien $P$, $P^0_0$, $P^0_{11}$, welche sich in dem *Kirkman*schen Punkte $K^0$ schneiden, respective mit $K$, $K^0_0$, $K^0_{11}$, so ist jeder derselben der Schnittpunkt von drei *Pascal*schen Linien, deren Symbole nach der angegebenen Regel folgende sind:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $K^0$ ist Schnittpunkt von | $\underline{P^0}$ | $P'$ | $P''$ |
| $K^0_0$ – – – | *afdebc* | $\underline{\textit{fdaceb}}$ | *dafbce* |
| $K^0_{11}$ – – – | *febacd* | $\underline{\textit{ebfdac}}$ | *bfecda.* |

Da die unterstrichenen Symbole der *Pascal*schen Linien gleichbedeutend sind mit dem Symbole $P^0$, so folgt hieraus, wie vorher, dass die genannten drei Pole $K$, $K^0_0$, $K^0_{11}$ auf der *Pascal*schen Linie $P^0$ liegen, dass letztere also die ideale Polare des *Kirkman*schen Punktes $K^0$ ist. Ebenso ist $P'$ die ideale Polare des *Kirkman*schen Punktes $K'$, und $P''$ ist die ideale Polare des *Kirkman*schen Punktes $K''$. Dieses beweiset der Satz:

3) *Die idealen Polaren der drei Kirkmanschen Punkte, welche auf einer Pascalschen Linie liegen, schneiden sich in dem idealen Pole der Pascalschen Linie.*

Kürzer ausgedrückt ist dieses der *Kirkman*sche Satz:

4) *Es schneiden sich 60 Mal 3 Pascalsche Linien in einem Kirkmanschen Punkte.*

Die Sätze 1) und 3) durften allgemeiner nicht etwa so ausgesprochen werden:

Die idealen Pole von drei *Pascal*schen Linien, welche durch einen und denselben Punkt gehen, liegen auf einer und derselben geraden Linie.

Die idealen Polaren von drei *Kirkman*schen Punkten, welche auf einer geraden Linie liegen, schneiden sich in einem und demselben Punkte.

Denn man weiss aus der Einleitung, dass drei *Pascal*sche Linien sich auch in einem *Steiner*schen Punkte $R$ schneiden können. Die Lage ihrer idealen Pole ist jedoch noch unbekannt. Ebenso weiss man, dass drei *Kirkman*sche Punkte auch auf einer *Cayley*schen Linie $C_s$ liegen können. Die Lage ihrer idealen Polaren ist ebenfalls unbekannt.

Es wird sich nun darum handeln, die Lage der idealen Pole von drei *Pascal*schen Linien zu erforschen, welche sich in einem *Steiner*schen Punkte $R$ schneiden, um den ersten Parallelsatz möglicher Weise zur Geltung zu bringen. Man wird die Lage der idealen Polaren von drei *Kirkman*schen Punkten, welche auf einer *Cayley*schen Linie liegen, zu untersuchen haben, um den zweiten Parallelsatz zu prüfen. Diesen Zwecken werden die folgenden Abschnitte dienen.

Schliesslich wollen wir noch bemerken, dass die eben aufgeführten Parallelsätze nur den leitenden Gedanken für die nachfolgenden Untersuchungen herzugeben bestimmt sind. Auf Realität machen sie keinen Anspruch. Denn wenn auch die zu untersuchende Lage der hervorgehobenen Punkte und Linien eine solche ist, dass sie die Sätze bestätiget, so wird man doch Anstand nehmen müssen, die Sätze in so grosser Allgemeinheit auszusprechen, weil man nicht weiss, ob nicht drei *Pascal*sche Linien sich auch anders als in einem *Kirkman*schen oder *Steiner*schen Punkte schneiden können, und weil man ferner nicht weiss, ob nicht drei *Kirkman*sche Punkte anders auf einer geraden Linie liegen können als auf einer *Pascal*schen oder *Cayley*schen.

## §. 3.

Von den 15 geraden Linien $L$, welche die auf dem Kegelschnitt $C$ gegebenen 6 Punkte paarweise verbinden, unterdrückten wir in §. 1 6 Linien,

welche eines von den 60 *Pascal*schen Sechsecken bildeten. Die übrigbleibenden 9 bildeten nur 3 von den 60 *Pascal*schen Sechsecken. Unterdrücken wir jetzt von den 15 geraden Linien $L$ wieder 6 Linien, welche aber zwei dem Kegelschnitte $C$ einbeschriebene Dreiecke mit verschiedenen Ecken bilden, so lassen sich aus den 9 übrigbleibenden geraden Linien $L$ 6 von den 60 *Pascal*schen Sechsecken bilden. Unterdrücken wir zum Beispiel die punktirten Seiten der beiden Dreiecke $ace$ und $bdf$, so lassen sich aus den übrigbleibenden 9 geraden Linien $L$ die 6 *Pascal*schen Sechsecke bilden:

$$P = abcdef, \quad P_{\rm I} = afcbed, \quad P_{\rm II} = adcfeb,$$
$$\Pi = abcfed, \quad \Pi_{\rm I} = afcdeb, \quad \Pi_{\rm II} = adcbef.$$

Sämmtliche 6 Sechsecke sind gebildet aus den Seiten und den Hauptdiagonalen eines von ihnen. Sie bilden, wie in der Bezeichnung angedeutet worden, zwei Gruppen von 3 Sechsecken. Das Sechseck $P_{\rm I}$ ist gebildet aus den geraden Seiten und den Hauptdiagonalen des Sechsecks $P$, und das Sechseck $P_{\rm II}$ aus den ungeraden Seiten und den Hauptdiagonalen desselben Sechsecks $P$. Gleiches gilt von der zweiten Gruppe. Kurz, man erhält aus einem dieser Sechsecke die beiden anderen derselben Gruppe, wenn man in demselben entweder die geraden oder die ungeraden Seiten unterdrückt und dafür die Hauptdiagonalen substituirt.

Von jeder dieser Gruppen Sechsecke gilt der Satz *):

5) *Wenn man in einem gegebenen Pascalschen Sechsecke die drei Diagonalen zieht, welche die gegenüberliegenden Ecken verbinden, so bilden die geraden Seiten und die Diagonalen ein zweites Pascalsches Sechseck mit denselben Ecken als das gegebene, ebenso die ungeraden Seiten und die Diagonalen ein drittes Pascalsches Sechseck. Die diesen drei Sechsecken zugehörigen Pascalschen Linien schneiden sich in einem und demselben Punkte.*

Demnach schneiden sich die drei *Pascal*schen Linien $P, P_{\rm I}, P_{\rm II}$, in einem Punkte $R$ und die drei *Pascal*schen Linien $\Pi, \Pi_{\rm I}, \Pi_{\rm II}$, in einem Punkte $\mathrm{P}$. Dieses sind *Steinersche Punkte*, welche wir kürzer bezeichnen können mit:

$$R = PP_{\rm I}P_{\rm II}, \quad \mathrm{P} = \Pi\Pi_{\rm I}\Pi_{\rm II}.$$

Von ihnen gilt der Satz **):

6) *Die Steinerschen Punkte* $R$ *und* $\mathrm{P}$, *welche abhängen von den*

---

*) *Hesse*, Vorlesungen aus der analytischen Geometrie in der Ebene p. 119.

**) „Ueber das geradlinige Sechseck auf dem Hyperboloid", Bd. 24 dieses Journals p. 40 und *Schroeter*: „*Steiner*sche Vorlesungen" p. 164.

*hervorgehobenen 6 Pascalschen Sechsecken, sind harmonische Pole des Kegelschnittes, dem die Sechsecke einbeschrieben sind.*

Da hiernach die 20 *Steiner*schen Punkte $R$ und P sich zu harmonischen Polen des Kegelschnittes $C$ paaren, so wird man, um sich präciser auszudrücken, von den 10 *Steinerschen Punktepaaren* $R$ und P sprechen können.

Doch sehen wir ab von dem Satze 6), der hier nur im Zusammenhange aufgeführt worden ist, um später auf ihn Bezug zu nehmen, so handelt es sich zunächst um die Feststellung der idealen Pole der drei *Pascal*schen Linien $P$, $P_1$, $P_{11}$, welche sich in dem *Steiner*schen Punkte $R$ schneiden.

Den idealen Pol $K$ der *Pascal*schen Linie $P = abcdef$ haben wir in §. 1 unabhängig von der Figur mit dem Zeichen $K = PP'P''$ eingeführt. Da diese Bezeichnung in dem vorliegenden Falle von keinem Nutzen ist, so verlassen wir dieselbe, indem wir auf die Construction des idealen Poles $K$ der *Pascal*schen Linie $P$ in §. 1 zurückgehen. Dieser ideale Pol ergab sich dort als der *Brianchon*sche Punkt des Sechseckes $B = (a'b'c'd'e'f')$, welches dem Kegelschnitt $C'$ umschrieben ist. Wir werden ihn mit Rücksicht auf die Figur bezeichnen mit:

$$K = a'b'c'd'e'f' \text{ als id. Pol d. } \textit{Pasc.} \text{ Linie } P = abcdef.$$

Diese Bezeichnung ist für den vorliegenden Fall darum so einfach, weil man, ohne die Figur zu erweitern, aus der am Anfange des Paragraphen gebrauchten Bezeichnung der *Pascal*schen Linien $P$, $P_1$, $P_{11}$ und $\Pi$, $\Pi_1$, $\Pi_{11}$, die Bezeichnung ihrer idealen Pole $K$, $K_1$, $K_{11}$, $Q$, $Q_1$, $Q_{11}$, als *Brianchon*sche Punkte, einfach dadurch erhält, dass man jedem Buchstaben $ab\ldots$ einen Index anhängt wie folgt:

$$K = a'b'c'd'e'f', \quad K_1 = a'f'c'b'e'd', \quad K_{11} = a'd'c'f'e'b',$$
$$Q = a'b'c'f'e'd', \quad Q_1 = a'f'c'd'e'b', \quad Q_{11} = a'd'c'b'e'f'.$$

Diese Regel verdankt man dem Umstande, dass für sämmtliche 6 Sechsecke $P$ und $\Pi$ die Dreiecke $ace$ und $bdf$, welche zur Construction ihrer idealen Pole erforderlich sind, unverändert dieselben bleiben.

Man braucht nach dem Vorhergehenden von den 6 *Pascal*schen Sechsecken $P$ und $\Pi$ nur ein Sechseck zu kennen. Denn alle 6 setzen sich zusammen aus den Seiten des einen und seinen Hauptdiagonalen. Die übrigen von den 60 *Pascal*schen Sechsecken sind dabei ausgeschlossen. Es bilden darum die 60 *Pascal*schen Sechsecke 10 Gruppen von 6 *Pascal*schen Sechsecken, von welchen wir nur die eine Gruppe hervorgehoben haben. Der hervorgehobenen

Gruppe entspricht ein einziger Kegelschnitt, den wir mit $C'$ bezeichnet haben. Man hat daher den Satz:

7) *Wenn man sämmtliche 15 Verbindungslinien der Ecken eines Pascalschen Sechseckes construirt, so werden 10 Mal 6 von diesen Verbindungslinien von einem Kegelschnitte berührt.*

Man hat daher 10 solcher Kegelschnitte $C'$ in erster Linie entsprechend den 10 hervorgehobenen Gruppen von 6 *Pascal*schen Sechsecken und in zweiter Linie entsprechend den 10 *Steiner*schen Punktepaaren $R$ und P.

## §. 4.

Der reciproke Satz von dem in 5) angegebenen lehrt, dass die *Brianchon*schen Punkte $K$, $K_1$, $K_{11}$ auf einer geraden Linie liegen. Es bedarf aber nicht jenes reciproken Satzes; die Figur weiset dasselbe auch nach.

Bezeichnet man nämlich die Berührungspunkte der Seiten des *Brianchon*schen Sechseckes $B$ und des Kegelschnittes $C'$ mit gleichen Buchstaben als die Seiten, so hat man, den 6 hervorgehobenen *Brianchon*schen Sechsecken entsprechend, 6 dem Kegelschnitte $C'$ einbeschriebene *Pascal*sche Sechsecke:

$$p = a'b'c'd'e'f', \quad p_1 = a'f'c'b'e'd', \quad p_{11} = a'd'c'f'e'b',$$
$$\pi = a'b'c'f'e'd', \quad \pi_1 = a'f'c'd'e'b', \quad \pi_{11} = a'd'c'b'e'f',$$

deren *Pascal*sche Linien $p, p_1, p_{11}, \dots$ einfach Polaren sind der *Brianchon*schen Punkte $K$, $K_1$, $K_{11}$, ... rücksichtlich des Kegelschnittes $C'$. Da nach dem Satze 5) die genannten Polaren sich in einem Punkte schneiden, so liegen ihre Pole, also jene *Brianchon*schen Punkte, auf einer geraden Linie.

Da nun jedem der *Pascal*schen Sechsecke $p$ des Kegelschnittes $C'$ auf der einen Seite ein *Pascal*sches Sechseck $P$ des Kegelschnittes $C$, auf der anderen Seite ein *Brianchon*sches Sechseck $K$ entspricht, so entspricht auch jedem *Pascal*schen Sechsecke $P$ ein *Brianchon*sches $K$ und den drei *Pascal*schen Sechsecken $P$, deren *Pascal*sche Linien $P$ sich in einem *Steiner*schen Punkte $R$ schneiden, entsprechen drei *Brianchon*sche Sechsecke $K$, deren *Brianchon*sche Punkte, das sind die idealen Pole der drei *Pascal*schen Linien $P$, auf einer geraden Linie liegen. Diese gerade Linie ist eine *Cayley*sche Linie $C_{,}$, denn die drei idealen Pole, welche auf ihr liegen, sind *Kirkman*sche Punkte. Wir drücken dieses kurz so aus:

8) *Die idealen Pole der 3 Pascalschen Linien, welche sich in einem Steinerschen Punkte schneiden, liegen auf einer Cayleyschen Linie.*

Den 20 *Steiner*schen Punkten entsprechen in dieser Weise 20 *Cayley*sche Linien. Es ist daher der angegebene Satz ein anderer Ausdruck für den *Cayley*schen Satz:

9) *Es liegen 20 Mal 3 Kirkmansche Punkte auf einer Cayleyschen Linie.*

Die drei *Pascal*schen Linien, welche sich in einem *Steiner*schen Punkte schneiden, sind die idealen Polaren der drei Punkte, welche auf der *Cayley*schen Linie liegen. Deshalb kann man den Satz 6) auch umkehren wie folgt:

10) *Die idealen Polaren der drei Kirkmanschen Punkte, welche auf einer Cayleyschen Linie liegen, schneiden sich in einem Steinerschen Punkte.*

Da nach den Sätzen 8) und 10) jedem *Steiner*schen Punkte eine ganz bestimmte *Cayley*sche Linie entspricht, so wie umgekehrt jeder *Cayley*schen Linie ein ganz bestimmter *Steiner*scher Punkt, so müssen sich die 20 *Cayley*schen Linien paaren in der Weise der 20 *Steiner*schen Punkte. Präciser wird man daher von den 10 *Cayleyschen Linienpaaren* sprechen können.

Das *Cayley*sche Linienpaar, auf welchem die *Kirkman*schen Punkte $K$, $K_1$, $K_{11}$ und $\Pi$, $\Pi_1$, $\Pi_{11}$ liegen, ist zweifellos ein Paar harmonischer Polaren des Kegelschnittes $C'$. Dasselbe Linienpaar würde natürlich auch ein Paar harmonischer Polaren sein des in der Einleitung angenommenen idealen Kegelschnittes. Ob dasselbe Linienpaar auch ein Paar harmonischer Polaren sei des Kegelschnittes $C$, soll eine offene Frage sein.

Die bis dahin als zweifellos aufgeführten Sätze 1) bis 10) bekunden eine vollständige Reciprocität der 60 *Pascal*schen Linien und der 60 *Kirkman*schen Punkte. Diese Reciprocität bleibt in dem gewöhnlichen Sinne eine ideale, so lange nicht ein Kegelschnitt gefunden werden kann, in Rücksicht auf welchen jede *Pascal*sche Linie als die gewöhnliche Polare eines *Kirkman*schen Punktes erscheint. Existirt ein solcher Kegelschnitt, so erstreckt sich die Reciprocität weiter auf *Steiner*sche Punkte und *Cayley*sche Linien, sowie auf *Steiner*sche Linien und *Salmon*sche Punkte. Existirt aber ein solcher Kegelschnitt nur in der Idee, so wird die Prüfung des in der Einleitung nur unter einer gewissen Voraussetzung ausgesprochenen Reciprocitätsgesetzes schon bei den *Steiner*schen Punkten $R$ und den ihnen unzweideutig entsprechenden *Cayley*schen Linien $C_s$ zu beginnen haben, wie folgt:

Da nach 8) die idealen Pole der drei *Pascal*schen Linien, welche sich in einem *Steiner*schen Punkte schneiden, auf einer *Cayley*schen Linie liegen, so wird man diese gerade Linie für die *ideale Polare des Steinerschen Punktes* zu nehmen haben. Da nach 10) die idealen Polaren der drei *Kirkman*schen

Punkte, welche auf einer *Cayley*schen Linie liegen, sich in einem *Steiner*schen Punkte schneiden, so wird letzterer als der *ideale Pol der Cayleyschen Linie* zu definiren sein.

Auf Grund dieser Definitionen entspricht jedem *Steiner*schen Punkte als idealem Pole eine ganz bestimmte *Cayley*sche Linie als ideale Polare und umgekehrt.

Es hat aber *Salmon* an der bezeichneten Stelle bewiesen, dass auf einer *Cayley*schen Linie nicht allein drei *Kirkman*sche Punkte liegen, (deren ideale Polaren sich in dem Pole der *Cayley*schen Linie schneiden) sondern dass auf derselben *Cayley*schen Linie auch ein *Steiner*scher Punkt liegt. Da nun der ideale Pol der *Cayley*schen Linie auch ein *Steiner*scher Punkt ist, so entsprechen zwei *Steiner*sche Punkte einander, als Pol einer *Cayley*schen Linie und als Punkt auf ihr, und es entsteht die Frage, ob hiernach die 20 *Steiner*schen Punkte sich in dem Sinne paaren, wie in §. 3.

Die drei *Kirkman*schen Punkte und der *Steiner*sche Punkt, welche auf derselben *Cayley*schen Linie liegen, haben ideale Polaren, von welchen man weiss, dass die drei ersteren sich in dem idealen Pole der *Cayley*schen Linie schneiden. Soll nun der ideale Pol im weiteren Sinne seinen Namen verdienen, so wird nachzuweisen sein, dass auch die ideale Polare des genannten *Steiner*schen Punktes durch ihn geht.

Die zuletzt angeregte Untersuchung lässt sich auch auf einem anderen Wege durchführen. Da nämlich nach *Salmon* durch einen gegebenen *Steiner*schen Punkt nicht allein drei *Pascal*sche Linien gehen, deren ideale Pole auf der idealen Polare des gegebenen *Steiner*schen Punktes liegen, sondern auch eine *Cayley*sche Linie, so entsteht die Frage, ob auch der ideale Pol der *Cayley*schen Linie auf der idealen Polare des gegebenen *Steiner*schen Punktes liegt.

Diese Fragen sollen in dem folgenden Paragraphen beantwortet werden.

## §. 5.

Wir gehen von dem *Steiner*schen Punkte P des §. 3. aus:

$$P = \Pi \Pi_{,} \Pi_{,,},$$

in welchem sich die *Pascal*schen Linien schneiden, die dort bezeichnet wurden mit:

$$\Pi = abcfed, \qquad \Pi_{,} = afcdeb, \qquad \Pi_{,,} = adcbef.$$

Ihre idealen Pole bezeichnen wir mit:

$$Q = \Pi^{0} \Pi' \Pi'', \qquad Q_{,} = \Pi_{,}^{0} \Pi_{,}' \Pi_{,}'', \qquad Q_{,,} = \Pi_{,,}^{0} \Pi_{,,}' \Pi_{,,}'',$$

indem wir nach der in §. 1. angegebenen Regel haben:

$$\Pi^{\prime\prime} = acebdf, \quad \Pi^{\prime} = ceafbd, \quad \Pi^{\prime\prime} = eacdfb,$$
$$\Pi_{\prime}^{\prime\prime} = acefbd, \quad \Pi_{\prime}^{\prime} = ceadfb, \quad \Pi_{\prime}^{\prime\prime} = eacbdf,$$
$$\Pi_{\prime\prime}^{\prime\prime} = acedfb, \quad \Pi_{\prime\prime}^{\prime} = ceabdf, \quad \Pi_{\prime\prime}^{\prime\prime} = eacfbd.$$

Die drei idealen Pole $Q$, $Q_{\prime}$, $Q_{\prime\prime}$ stellen wir zusammen mit dem *Steiner*schen Punkte:

$$R = PP_{\prime}P_{\prime\prime},$$

der mit dem *Steiner*schen Punkte P, von dem wir ausgingen, ein Paar von den 10 *Steiner*schen Punktepaaren bildet, und wiederholen die Bedeutung der *Pascal*schen Linien:

$$P = abcdef, \quad P_{\prime} = afcbed, \quad P_{\prime\prime} = adcfeb.$$

Von diesen vier Punkten, den drei *Kirkman*schen Punkten $Q$, $Q_{\prime}$, $Q_{\prime\prime}$ und dem *Steiner*schen Punkte $R$, hat *Salmon* in den oben angegebenen Noten nachgewiesen, dass sie auf einer und derselben *Cayley*schen Linie liegen. Es wird dieses sogleich ersichtlich, wenn man die hier eingeführte Bezeichnung in die *Salmon*sche überträgt. Auf den Beweis gehen wir nicht weiter ein. Denselben Satz drücken wir aber so aus:

11) *Die ideale Polare eines jeden Steinerschen Punktes geht durch seinen Gegenpunkt, der mit ihm ein Steinersches Punktepaar bildet.*

Dieser Satz lässt sich auch umkehren wie folgt:

12) *Der ideale Pol einer jeden Cayleyschen Linie liegt auf ihrer Gegenlinie, welche mit ihr ein Cayleysches Linienpaar bildet.*

Hiermit ist die erste am Ende des vorhergehenden Paragraphen aufgeworfene Frage entschieden, dass der Pol einer *Cayley*schen Linie und der *Steiner*sche Punkt auf ihr sich paaren in dem Sinne wie §. 3. Aber auch die anderen erhobenen Fragen werden durch die angegebenen Sätze beantwortet.

Wir begnügen uns eine gewisse Art der Reciprocität der *Pascal*schen Linien und der *Steiner*schen Punkte mit den *Kirkman*schen Punkten und den *Cayley*schen Linien in dem Vorhergehenden nachgewiesen zu haben. In der Voraussicht eines Kegelschnittes, für welchen jenes ideale Reciprocitätsverhältniss ein reelles wird, unternehmen wir es nicht weiter das ideale Reciprocitätsverhältniss auch auf *Steiner*sche Linien und *Salmon*sche Punkte auszudehnen.

Aber selbst in dem Falle, dass der ersehnte Kegelschnitt existirt, umschwebt die von den genannten Linien und Punkten gebildete Figur eine gewisse Unklarheit. Sie besteht darin, dass man zwar a posteriori erkennt, dass eine

Figur mit den beschriebenen Eigenschaften besteht, dass man aber a priori nicht einsieht, warum eine solche Figur, abgesehen von den *Pascal*schen Sechsecken, bestehen muss. Die Lage der 10 *Steiner*schen Punktepaare und der 15 *Steiner*schen Linien zu einander ist bekannt.*) Der reciproke Satz von dem, welcher ihre Lage verdeutlicht, zeigt an, wie die 10 *Cayley*schen Linienpaare und die 15 *Salmon*schen Punkte zu einander liegen.

Es fehlt zur Zeit jedoch ein Bild für die *Pascal*schen Linien und die *Kirkman*schen Punkte. Ein zu erfindender Satz, der die Endeigenschaften der Figur im Auge hat, wird dieses Bild deutlich machen können.

Zum Schlusse wollen wir noch eine Idee entwickeln, wie ältere französische Forschungen von *Lagrange* und *Vandermonde* über die Auflösung der Gleichungen des sechsten Gerades sich wohl in Zusammenhang bringen lassen werden mit den in der Einleitung hervorgehobenen Sätzen.

---

Wenn man sich die 6 Ecken des *Pascal*schen Sechsecks bestimmt denkt durch den Schnitt einer Curve zweiter Ordnung und einer Curve dritter Ordnung, welche durch ihre Gleichungen $f=0$ und $\varphi=0$ gegeben seien, so drücken die in dem Vorhergehenden besprochenen Sätze, algebraisch aufgefasst, Eigenschaften der Wurzeln der gegebenen beiden Gleichungen aus. Der *Pascal*sche Satz ist zwar unsymmetrisch in Rücksicht auf die Wurzeln der gegebenen Gleichungen; er wird aber symmetrisch, wenn man das ganze System der 60 *Pascal*schen Linien in das Auge fasst. Die Gleichung dieses Systemes wird vom sechzigsten Grade und lässt sich wegen der Symmetrie der Wurzeln rational durch die Coefficienten in den gegebenen Gleichungen ausdrücken.

Da das System der 10 *Steiner*schen Punktepaare symmetrisch liegt gegen die 6 Ecken des *Pascal*schen Sechsecks **), so wird sich dasselbe durch eine Gleichung des zwanzigsten Grades rational in den Coefficienten der gegebenen Gleichungen ausdrücken lassen. Nimmt man jedoch an Stelle der 10 *Steiner*schen Punktepaare 10 neue *Steiner*sche Linien P, von welchen jede ein Punktepaar verbindet, so lässt sich das System der 10 *Steiner*schen Linien P durch eine in den Coefficienten der gegebenen Gleichung rationale Gleichung $P=0$ des zehnten Grades darstellen. Ebenso stellt sich das System

*) Bd. 41 dieses Journals pag. 269.
**) Ebendaselbst.

der 15 *Steiner*schen Linien $S_r$ als eine rationale Gleichung $S_r = 0$ des funfzehnten Grades dar. Es sind dieses allerdings Gleichungen mit zwei Unbekannten, die aber das Gemeinsame mit den Gleichungen von einer Unbekannten haben, dass sie sich in lineare Factoren der Unbekannten zerlegen lassen.

Diese Gleichungen des zehnten und funfzehnten Grades scheinen mir für die Auflösung der gegebenen Gleichungen $f = 0$ und $\varphi = 0$, welche sich ja auf eine Gleichung des sechsten Grades zurückführen lässt, das Analogon von dem zu sein, was die Resolventen von *Lagrange* *) und *Vandermonde* des zehnten und funfzehnten Grades für die Gleichung des sechsten Grades sind. Die Grade der Gleichungen wenigstens stimmen überein, und die Coefficienten in ihnen sind in beiden Fällen rationale Ausdrücke gegebener Grössen. Die folgende Behandlung einer biquadratischen Gleichung wird diese Ansicht weiter unterstützen.

Die Aufgabe zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten aufzulösen führt auf die Factorenzerfällung einer einzigen Gleichung mit zwei Unbekannten zurück. Denn wenn man die gegebenen, homogen gemachten, Gleichungen vom $p^{\text{ten}}$ und $q^{\text{ten}}$ Grade:

$$f(x, y, z) = 0, \qquad \varphi(x, y, z) = 0,$$

mit der Gleichung eines Punktes in Liniencoordinaten $u$, $v$, $w$,

$$A \equiv ux + vy + wz = 0,$$

zusammenstellt und die Unbekannten $x$, $y$, $z$ eliminirt, so erhält man eine Resultante:

$$R = 0,$$

die sich in $pq$ Factoren zerlegen lässt und die Coefficienten von $u$, $v$, $w$ in jedem Factor werden die homogenen Wurzeln der gegebenen Gleichungen sein. Die Resultante ist frei von jedem überflüssigen Factor, wenn sie in Rücksicht auf die Coefficienten in der einen gegebenen Gleichung von dem Grade der anderen ist.

Es ist zu bedauern, dass man noch kein Gesetz kennt, nach welchem die von überflüssigen Factoren freie Determinante gebildet werden kann. Diesem Mangel an Eliminationsmitteln ist es vornehmlich zuzuschreiben, dass die bekannten Sätze aus der Theorie der Gleichungen mit einer Unbekannten, welche sich als Sätze aus der Geometrie auf der geraden Linie auffassen lassen, nicht auf die Ebene und den Raum, das ist, auf Gleichungen mit zwei

---

*) *Lagrange,* Traité de la résolution des équations numériques, pag. 260.

und mehreren Unbekannten ausgedehnt worden sind — eine Ausdehnung zu welcher „das Uebertragungsprincip aus der Ebene in die gerade Linie und umgekehrt *)“ ein geeignetes Mittel zu sein scheint. —

In dem Falle, dass die gegebenen Gleichungen beide vom zweiten Grade sind, verschwindet die Determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} f'(x), & f'(y), & f'(z) \\ \varphi'(x), & \varphi'(y), & \varphi'(z) \\ u, & v, & w \end{vmatrix}$$

zugleich mit $f$, $\varphi$ und $A$. Eliminirt man deshalb aus den Gleichungen:

$$f=0, \qquad \varphi=0, \qquad \Delta=0,$$
$$xA=0, \qquad yA=0, \qquad zA=0,$$

die Potenzen und Producte der Variabeln $x$, $y$, $z$, wie aus linearen Gleichungen, so erhält man die gesuchte Resultante vom vierten Grade:

$$R = 0,$$

die vier Punkte in der Ebene darstellt.

Durch diese vier Punkte lassen sich drei Linienpaare legen. Für den Schnittpunkt eines jeden der drei Linienpaare existiren die Gleichungen:

$$f'(y)\varphi'(z)-f'(z)\varphi'(y)=0,\ f'(z)\varphi'(x)-f'(x)\varphi'(z)=0,\ f'(x)\varphi'(y)-f'(y)\varphi'(x)=0.$$

Eliminirt man nun aus diesen Gleichungen und aus den Gleichungen:

$$xA=0, \qquad yA=0, \qquad zA=0$$

die Potenzen und Producte der Unbekannten $x$, $y$, $z$ wie aus linearen Gleichungen, so erhält man eine Gleichung des dritten Grades:

$$S = 0,$$

welche die genannten drei Schnittpunkte ausdrückt.

Diese Gleichung $S=0$ des dritten Grades ist zweifellos die Resolvente der Resultante $R=0$ vom vierten Grade. Die vier Factoren der letzten Gleichung setzen sich aus den drei Factoren der ersten Gleichung linear zusammen, wie die Wurzeln einer biquadratischen aus den Wurzeln ihrer Resolvente.

Heidelberg, im December 1867.

---

*) Bd. 66 dieses Journals pag. 15 und Zeitschrift für Mathematik und Physik XI. 5. pag. 417.

# Erweiterung einiger bekannten Eigenschaften des ebenen Dreiecks.

(Von Herrn *Schröter* zu Breslau.)

---

Die bekannten Eigenschaften der sogenannten „merkwürdigen Punkte des ebenen Dreiecks“ (Schwerpunkt, Höhenpunkt, Mittelpunkte des umschriebenen Kreises und der Berührungs-Kreise u. s. w.) sind besondere Fälle allgemeinerer Beziehungen, zu denen man gelangt, wenn man an Stelle der unendlich-entfernten Geraden mit ihren beiden imaginären Kreispunkten, von welcher jene elementaren Eigenschaften eigentlich abhängen, in der Ebene des Dreiecks eine beliebige Gerade als Träger eines gegebenen Punktsystems annimmt, welches entweder elliptisch, oder hyperbolisch sein kann. Die Untersuchung dieser Figur führt ebenso leicht zu den allgemeineren Eigenschaften, wie die Betrachtungen der Elementar-Geometrie zu den besonderen. Unter letzteren scheint der häufiger angeführte, als bewiesene, von *Feuerbach* *) gefundene Satz, dass *der durch die Mitten der Seiten eines Dreiecks gehende Kreis, die vier dem Dreiecke einbeschriebenen Kreise gleichzeitig berührt,* keinen der angedeuteten Erweiterung fähigen, also auch nicht recht befriedigenden Beweis gefunden zu haben. Es sei daher gestattet, diesen Satz und die damit zusammenhängenden Eigenschaften des Dreiecks in der gedachten allgemeineren Auffassung auf synthetischem Wege abzuleiten **). Zwar können die Resultate dieser Erweiterung durch die Methode der Central-Projection und das Princip der Continuität unmittelbar aus dem besonderen Fall der elementaren Eigenschaften des Dreiecks geschlossen werden, doch dürfte es nicht ohne Interesse sein, dieselben unabhängig und in grössester Allgemeinheit aus den projectivischen Eigenschaften der Kegelschnitte abzuleiten, weil dabei der wahre Charakter jener particulären Beziehungen und zugleich manche neue Eigenschaften hervortreten.

---

*) *K. W. Feuerbach,* Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des ebenen Dreiecks, Nürnberg 1822 Seite 38.

**) Auf analytischem Wege ist jener Satz von Herrn *Beltrami* in der Abhandlung: Intorno alle coniche di novi punti, nota letta nella sessione 12 Marzo 1863 dell' Academia di Bologna bewiesen worden.

Die Untersuchung stützt sich auf die Auseinandersetzungen in dem von mir herausgegebenen Buche: *Jacob Steiners Vorlesungen über synthetische Geometrie*, zweiter Theil: *Die Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projectivische Eigenschaften*, Leipzig, 1867, und es soll im Folgenden die Bezugnahme auf dies Buch durch „Theorie d. Kegelsch." bezeichnet werden.

---

1. Ist in der Ebene eines Dreiecks $abc$ eine Gerade $G$ als Träger eines beliebigen (elliptischen oder hyperbolischen) Punktsystems gegeben, treffen die Dreiecksseiten $bc$, $ca$, $ab$ die Gerade $G$ in den Punkten $s_1\ s_2\ s_3$, deren conjugirte im Punktsystem $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ seien, *so schneiden sich die drei Verbindungslinien $a\sigma_1$, $b\sigma_2$, $c\sigma_3$ in einem Punkte $H$* *), weil umgekehrt die vier Punkte $abcH$ ein vollständiges Viereck bilden, dessen drei Seitenpaare von der Transversale $G$ in drei Punktepaaren eines Punktsystems getroffen werden (Theorie d. Kegelsch. S. 67).

Construiren wir auf jeder Dreiecksseite zu den beiden Eckpunkten und dem Schnittpunkt mit der Geraden $G$, den dem letzteren zugeordneten vierten harmonischen Punkt, und nennen wir diese drei Punkte $a_1\ b_1\ c_1$, so dass also $(bcs_1a_1) = -1$, $(cas_2b_1) = -1$, $(abs_3c_1) = -1$ wird, so *schneiden sich die drei Verbindungslinien $aa_1$, $bb_1$, $cc_1$ in einem Punkte $S$.* (Theorie d. Kegelschnitte, S. 72).

Denken wir uns um das Dreieck $abc$ einen Kegelschnitt $M^{(2)}$ beschrieben, welcher das auf $G$ gegebene Punktsystem zu seinem zugehörigen hat (Theorie d. Kegelsch. S. 143) [d. h. je zwei conjugirte Punkte des Punktsystems sind zugleich conjugirt in Bezug auf den Kegelschnitt], so wird die Polare von $s_1$ durch $\sigma_1$ gehen und offenbar auch durch $a_1$, also $a_1\sigma_1$ sein; da nun die drei Punkte $s_1\ s_2\ s_3$ auf der Geraden $G$ liegen, so *schneiden sich die drei Verbindungslinien $a_1\sigma_1$, $b_1\sigma_2$, $c_1\sigma_3$ in einem Punkte $M$,* dem Pol der Geraden $G$ in Bezug auf den Kegelschnitt $M^{(2)}$, welcher durch die angegebenen Bestimmungsstücke vollständig und eindeutig bestimmt ist.

Die harmonischen Beziehungen:

$$(bcs_1a_1) = -1, \qquad (cas_2b_1) = -1$$

ergeben die Gleichheit der Doppelverhältnisse:

$$(cbs_1a_1) = (cas_2b_1)$$

---

*) Der Leser wird gebeten, die Figur der Beschreibung nach sich selbst zu entwerfen.

und hieraus folgt, dass $ab$, $a_1b_1$ und $s_1s_2$ sich in einem Punkte $s_3$ treffen; *es liegen also:*

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & s_3 \\ b_1 & c_1 & s_1 \\ c_1 & a_1 & s_2 \end{matrix}$$

*in je einer Geraden*, oder $a_1s_1$, $b_1s_2$, $c_1s_3$ sind die drei Paar Gegenecken eines vollständigen Vierseits, welches zu Diagonalen die Seiten des ursprünglichen Dreiecks hat.

Da die Verbindungslinie $s_1s_2$ mit $\sigma_1\sigma_2$ identisch ist, also auch $ab$, $a_1b_1$. $\sigma_1\sigma_2$ sich in einem Punkte $s_3$ treffen, so liegen die beiden Dreiecke $aa_1\sigma_1$ und $bb_1\sigma_2$ in Bezug auf diesen Punkt perspectivisch; die Schnittpunkte correspondirender Seiten liegen mithin auf einer Geraden (Theorie d. Kegelsch. S. 26), d. h. die Punkte:

$$(aa_1, bb_1) = S, \quad (a\sigma_1, b\sigma_2) = H, \quad (a_1\sigma_1, b_1\sigma_2) = M.$$

*Die drei Punkte S H M liegen auf einer Geraden.* Da $b\ c\ a_1\ s_1$ vier harmonische Punkte sind, so sind auch $a[cba_1s_1]$ vier harmonische Strahlen, die $b_1c_1$ wieder in vier harmonischen Punkten treffen; bezeichnen wir also die Schnittpunkte:

$$(aa_1, b_1c_1) = a_{11}, \quad (bb_1, c_1a_1) = b_{11}, \quad (cc_1, a_1b_1) = c_{11},$$

so sind:

$$\begin{matrix} b_1 & c_1 & a_{11} & s_1 \\ c_1 & a_1 & b_{11} & s_2 \\ a_1 & b_1 & c_{11} & s_3 \end{matrix}$$

je vier harmonische Punkte, und zwar die beiden ersten und die beiden letzten je zwei zugeordnete; die Seiten des Dreiecks $a_1b_1c_1$ werden nun von der Geraden $G$ in den Punkten $s_1\ s_2\ s_3$ geschnitten, deren zugeordnete vierte harmonische Punkte auf jeder Dreiecksseite $a_{11}b_{11}c_{11}$ sind; folglich *schneiden sich nach dem oben Bewiesenen auch* $a_{11}\sigma_1$, $b_{11}\sigma_2$, $c_{11}\sigma_3$ *in einem Punkte O*, der für das Dreieck $a_1b_1c_1$ dieselbe Beziehung zur Geraden $G$ hat, wie der Punkt $M$ für das Dreieck $abc$, d. h. der Punkt $O$ ist der Pol der Geraden $G$ in Bezug auf einen Kegelschnitt $O^{(2)}$, welcher dem Dreieck $a_1b_1c_1$ umschrieben ist und das auf $G$ gegebene Punktsystem $(s, \sigma)$ zu seinem zugehörigen hat; der hierdurch eindeutig bestimmte Kegelschnitt $O^{(2)}$ hat also mit $M^{(2)}$ eine (reelle oder ideelle) gemeinschaftliche Secante $G$, weil beiden dasselbe Punktsystem auf $G$ zugehört.

Wir sehen nun leicht, dass der Punkt $H$ für das Dreieck $abc$ dieselbe Bedeutung hat (d. h. auf dieselbe Weise construirt ist) wie der Punkt

$M$ für das Dreieck $a_1 b_1 c_1$, dass ferner $S$ für beide Dreiecke gleiche Bedeutung hat, und endlich $M$ für das Dreieck $abc$ dasjenige ist, was $O$ für das Dreieck $a_1 b_1 c_1$; da nach dem Obigen $H\ S\ M$ in einer Geraden liegen, so müssen auch $M\ S\ O$ in einer Geraden liegen und zwar in derselben, weil zwei Punkte gemeinschaftlich sind, also *die vier Punkte $HSMO$ liegen auf einer und derselben Geraden.* Die Lage dieser vier Punkte zu einander erkennen wir aus der Betrachtung des vollständigen Vierecks $bcb_1c_1$, dessen Diagonalpunkte $a\ S\ s_1$ sind; aus der harmonischen Eigenschaft desselben folgt nämlich, dass $a\ S\ a_1\ a_{11}$ vier harmonische Punkte sind und zwar $a$ und $S$ zugeordnete, $a_1$ und $a_{11}$ zugeordnete; die von $\sigma_1$ durch diese Punkte gehenden Strahlen sind mithin auch harmonisch und treffen die Gerade $HS$ wieder in vier harmonischen Punkten, folglich ist:

$$(SHMO) = -1,$$

d. h. *die vier Punkte $S\ H\ M\ O$ liegen harmonisch und zwar sind $S$ und $H$ zugeordnete, $M$ und $O$ zugeordnete harmonische Punkte.*

Die Operation, welche uns von dem Dreiecke $abc$ zum Dreicke $a_1b_1c_1$ und von diesem zum Dreiecke $a_{11}b_{11}c_{11}$ führte, kann nun fortgesetzt werden, und wir gelangen dadurch vom Punkte $H$ zu $M$, von $M$ zu $O$, von $O$ zu einem neuen Punkte $O'$ u. s. f. zu $O''O'''$ ... einer bis in's Unendliche verlaufenden Reihe von Punkten, die sämmtlich auf derselben Geraden $HS$ liegen und in ihrer Aufeinanderfolge einem gewissen Gesetze unterworfen sind; es entsteht die Frage, ob der Punkt $O^{(n)}$, wenn wir die Operation bis in's Unendliche fortgesetzt denken, einer bestimmten Grenzlage sich nähert; die Construction der Punkte $O\ O'\ O''$ ... liefert die harmonischen Beziehungen:

$$\begin{aligned}(SHMO) &= -1,\\ (SMOO') &= -1,\\ (SOO'O'') &= -1,\\ (SO'O''O''') &= -1,\\ &\dots\dots\end{aligned}$$

und es lässt sich aus diesen Gleichungen der Werth des Doppelverhältnisses $(SHMO^{(n)}) = v_n$ ganz allgemein ermitteln und daraus die Grenzlage von $O^{(n)}$ finden. Bezeichnen wir nämlich $(SHMO^{(n-1)})$ mit $v_{n-1}$, so haben wir, wenn wir die erste der vorigen Gleichungen fortlassen, aus denselben Beziehungen:

$$(SMOO^n) = v_{n-1}.$$

Da nun $(SHMO) = -1$, also $(SMHO) = 2$ und ferner allgemein:

$$(abcd).(abde).(abec) = 1\,^{*)},$$

so folgt

$$(SMO^nH) = \frac{1}{2v_{n-1}},$$

und

$$(SHMO^n) = v_n = 1 - 2v_{n-1}.$$

Diese Relation zwischen zwei einander folgenden Werthen:

$$v_n = 1 - 2v_{n-1}$$

giebt, da $v_0 = -1$ ist, sämmtlich Werthe der Reihe $v_0 v_1 v_2 \ldots$ und den allgemeinen Werth:

$$v_n = \frac{1-(-2)^{n+2}}{3},$$

dessen Grenzwerth für ein unendlich gross werdendes $n$ der Werth $\pm\infty$ ist; wenn aber das Doppelverhältniss:

$$(SHMO^{\infty}) = \pm\infty$$

ist, so muss $O^{\infty}$ mit $S$ zusammenfallen; *der Punkt S ist also die Grenzlage, welcher sich die Reihe der Punkte O O′ O″ . . . immer mehr nähert.*

Anmerkung. Wenn die gegebene Gerade $G$ die unendlich-entfernte Gerade $G_{\infty}$ ist und das auf ihr befindliche Punktsystem $(s, \sigma)$ durch sämmtliche Paare zu einander rechtwinkliger Richtungen fixirt wird, also zu Asymptotenpunkten die beiden unendlich-entfernten imaginären Kreispunkte hat (Theorie d. Kegelsch. S. 203), so wird $H$ der Höhenpunkt, $S$ der Schwerpunkt, $M$ der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises für das Dreieck $abc$, $O$ der Mittelpunkt desjenigen Kreises, welcher durch die Mitten der Seiten des Dreiecks $abc$ geht; die Kegelschnitte $M^{(2)}$ und $O^{(2)}$ werden diese Kreise selbst, und die oben ausgesprochenen Beziehungen gehen in die bekannten elementaren Eigenschaften jener sogenannten merkwürdigen Punkte des Dreiecks über. Es ist leicht ersichtlich, wie die Ergebnisse der weiter folgenden Untersuchung sich in dem besonderen Fall modificiren.

2. Der Kegelschnitt $O^{(2)}$ hat den Punkt $O$ und die Gerade $G$ zum Pol und zur Polare, sowie das auf $G$ gegebene Punktsystem $(s, \sigma)$ zum zugehörigen, folglich ist $O\sigma_1$ oder $a_{11}\sigma_1$ die Polare von $s_1$ in Bezug auf den Kegelschnitt $O^{(2)}$; die Gerade $bc$ trifft den Kegelschnitt $O^{(2)}$ ausser in $a_1$ noch in einem zweiten Punkte, welcher der vierte harmonische dem $a_1$ zugeordnete

*) *Möbius*, der barycentrische Calcul, S. 250.

ist, während $s_1$ und $(a_{11}\sigma_1, bc)$ das andere Paar zugeordneter Punkte sind. Dieser vierte harmonische Punkt ist leicht zu ermitteln; da nämlich $s_1[abc_1s_3]$ vier harmonische Strahlen sind, so treffen sie $aa_1$ in vier harmonischen Punkten, von denen $a$ und $a_1$ zugeordnete, $a_{11}$ und der Schnittpunkt $(aa_1, s_1s_3)$ zugeordnete sind; werden diese von $\sigma_1$ auf $bc$ projicirt, so erhalten wir vier neue harmonische Punkte $(a\sigma_1, bc)$ und $a_1$, $(a_{11}\sigma_1, bc)$ und $s_1$; folglich ist der Schnittpunkt $(a\sigma_1, bc)$ jener gesuchte vierte harmonische Punkt, durch welchen der Kegelschnitt $O^{(2)}$ gehen muss; bezeichnen wir daher:

$$(a\sigma_1, bc) = \alpha, \quad (b\sigma_2, ca) = \beta, \quad (c\sigma_3, ab) = \gamma,$$

so folgt: *Die sechs Punkte $a_1$ $b_1$ $c_1$ $\alpha$ $\beta$ $\gamma$ liegen auf demselben Kegelschnitt $O^{(2)}$, welcher das auf $G$ gegebene Punktsystem $(s, \sigma)$ zu seinem zugehörigen hat.*

Dieser Satz lässt sich auch so umkehren: Ein Kegelschnitt, welcher durch die drei Punkte $a_1$ $\beta$ $\gamma$ geht und das Punktsystem $(s, \sigma)$ auf $G$ zu seinem zugehörigen hat, muss auch durch $b_1$ und $c_1$ gehen. Fassen wir nun das Dreieck $bcH$ auf an Stelle des ursprünglichen $bca$, so ist zunächst $a_1$ der vierte harmonische, dem $s_1$ zugeordnete Punkt auf $bc$; ferner trifft $bH$ die Gerade $G$ in $\sigma_2$, dessen conjugirter im Punktsystem $(s, \sigma)$ der Punkt $s_2$ ist, also der Schnittpunkt $(bH, cs_2)$ oder $(b\sigma_2, ca)$ oder $\beta$ hat für das Dreieck $bcH$ gleiche Bedeutung, wie für das Dreieck $bca$; dasselbe gilt vom Punkte $\alpha = (cH, bs_3) = (c\sigma_3, ba)$. Hieraus folgt, dass der alte Kegelschnitt $O^{(2)}$ nunmehr auch durch zwei neue Punkte gehen muss, deren einer der vierte harmonische auf $bH$, dem $\sigma_2$ zugeordnete, der andere auf $cH$, dem $\sigma_3$ zugeordnete ist; bezeichnen wir diese neuen Punkte, für welche die Beziehungen gelten:

$$(Ha\sigma_1\alpha_1) = -1, \quad (Hb\sigma_2\beta_1) = -1, \quad (Hc\sigma_3\gamma_1) = -1,$$

durch $\alpha_1$ $\beta_1$ $\gamma_1$, so wissen wir, dass *der Kegelschnitt $O^{(2)}$ auch durch die Punkte $\alpha_1$ $\beta_1$ $\gamma_1$ gehen muss.* Dies Resultat lässt sich auch etwas anders aussprechen:

*Die vier Punkte $a$ $b$ $s$ $H$ bilden ein vollständiges Viereck, dessen drei Seitenpaare von der Transversale $G$ in drei Punktepaaren eines Punktsystems $(s, \sigma)$ getroffen werden; construirt man zu jedem dieser sechs Schnittpunkte den zugeordneten vierten harmonischen Punkt auf je einer Seite, deren Eckenpaar ebenfalls zugeordnet ist, so erhält man sechs Punkte $a_1$ $b_1$ $c_1$ $\alpha_1$ $\beta_1$ $\gamma_1$, die auf einem Kegelschnitte $O^{(2)}$ liegen, der das auf $G$ befindliche Punktsystem $(s, \sigma)$ zu seinem zugehörigen hat und auch durch die drei Diagonalpunkte $\alpha$ $\beta$ $\gamma$ des vollständigen Vierecks $abcH$ hindurchgeht. Dieser Kegelschnitt ist der Polar-Kegelschnitt der Geraden $G$ in Bezug auf ein Kegelschnittbüschel mit den vier Grundpunkten $a$ $b$ $c$ $H$.* (Theorie d. Kegelsch. S. 314.)

Die beiden Kegelschnitte $M^{(2)}$ und $O^{(2)}$ haben der Construction zufolge die Gerade $G$ zur (reellen oder ideellen) gemeinschaftlichen Sekante, mithin nothwendig noch eine zweite gemeinschaftliche Sekante, die aus dem übrigen Theil des Linienpaares besteht, welches mit den beiden Kegelschnitten $M^{(2)}$ und $O^{(2)}$ demselben Kegelschnittbüschel angehört. Die characteristische Eigenschaft des Kegelschnittbüschels, jede Transversale in einem Punktsystem zu treffen (Theorie d. Kegelsch. S. 236), gewährt ein leichtes Mittel, jene zweite gemeinschaftliche Sekante zu construiren. Nehmen wir die Punkte $b\ c$ und $a_1\ a$ als zwei Paare conjugirter Punkte eines Punktsystems an, welches dadurch bestimmt wird, und suchen zu $s_1$ den conjugirten Punkt $r_1$, so dass also:

$$(bca_1s_1) = (cbar_1)$$

wird, so muss die gesuchte Gerade durch $r_1$ gehen; nun ist aber $(bca_1s_1) = -1$, also auch $(cbar_1) = -1$, d. h. $r_1$ der vierte harmonische dem Punkte $a$ zugeordnete Punkt, während $bc$ das andere Paar zugeordneter Punkte ist. Aus der harmonischen Eigenschaft des vollständigen Vierecks $bc\beta\gamma$ ergiebt sich ferner, dass der Schnittpunkt $(bc, \beta\gamma)$ jener vierte harmonische Punkt $r_1$ sein muss; bezeichnen wir daher die Schnittpunkte:

$$(bc, \beta\gamma) = r_1, \quad (ca, \gamma\alpha) = r_2, \quad (ab, \alpha\beta) = r_3,$$

so folgt: *Die drei Punkte $r_1\ r_2\ r_3$ liegen auf einer Geraden $\Gamma$, welche für die beiden Kegelschnitte $M^{(2)}$ und $O^{(2)}$ eine (zweite) gemeinschaftliche Sekante ist.*

Der Schnittpunkt $(G, \Gamma)$ des eben betrachteten Linienpaars ist ein Eckpunkt des gemeinschaftlichen Tripels der beiden Kegelschnitte $M^{(2)}$ und $O^{(2)}$; seine Polare ist also für beide Kegelschnitte dieselbe Gerade und geht sowohl durch den Pol der Geraden $G$ in Bezug auf den einen, als auch in Bezug auf den andern Kegelschnitt, d. h. durch die Punkte $M$ und $O$; *der Schnittpunkt $(G, \Gamma)$ und die Gerade, auf welcher die Punkte $H\ S\ M\ O$ liegen, sind Pol und Polare in Bezug auf beide Kegelschnitte $M^{(2)}$ und $O^{(2)}$ gleichzeitig: sie gehören also dem gemeinschaftlichen Tripel beider Kegelschnitte an.*

3. Der Punkt $H$ steht in einer eigenthümlichen Beziehung zu den beiden Kegelschnitten $M^{(2)}$ und $O^{(2)}$. Von dem auf $O^{(2)}$ befindlichen Punkte $a$ gehen nämlich zwei Strahlen nach zwei conjugirten Punkten $s_1$ und $\sigma_1$ in Bezug auf den Kegelschnitt $O^{(2)}$ und $as_1$, $a\sigma_1$ treffen $O^{(2)}$ zum andern Male in $a_1$ und $\alpha_1$; *die Sehne $a_1\alpha_1$ muss daher durch den Pol $O$ der Verbindungslinie $s_1\sigma_1$ (oder $G$) hindurchgehen* (Theorie d. Kegelsch. S. 153), oder *die drei Punkte $a_1\ \alpha_1\ O$ liegen in einer Geraden,* welche $G$ im vierten harmonischen zu $O$ zugeordneten Punkte trifft. Diese vier harmonischen Punkte von $\sigma_1$ auf die Gerade $MHO$

projicirt geben wieder vier harmonische Punkte, nämlich $M\,H\,O$ und den Schnittpunkt mit $G$; da auch $a\;H\;\alpha_1\;\sigma_1$ vier harmonische Punkte sind, so folgt aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse und dem Zusammenfallen entsprechender Punkte in $H$, die perspectivische Lage, d. h. *$Ma$, $O\alpha_1$ und $G$ schneiden sich in einem Punkte.* Ferner treffen die von $a_1$ nach den vier harmonischen Punkten $S\,H\,M\,O$ gehenden Strahlen die Gerade $Ma$ in vier neuen harmonischen Punkten, nämlich: $a$ $(a_1H, aM)$ $M$ und $(G, aM)$; die beiden letzteren sind conjugirte Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt $M^{(2)}$, auf welchem $a$ liegt, folglich liegt auch der Schnittpunkt $(Ha_1, Ma)$ auf dem Kegelschnitt $M^{(2)}$; bezeichnen wir diesen für den Augenblick mit

$$\mathfrak{a} = (Ha_1, Ma),$$

so wissen wir nach dem Vorigen, dass $Ma$ (oder $a\mathfrak{a}$), $O\alpha_1$ (oder $a_1\alpha_1$) und $G$ (oder $x\xi$, irgend ein Paar conjugirter Punkte des auf $G$ gegebenen Punktsystems) sich in einem Punkte treffen; die beiden Dreiecke:

$$a\,\alpha_1\,x \quad \text{und} \quad \mathfrak{a}\,a_1\,\xi$$

liegen also perspectivisch, folglich die Schnittpunkte:

$$(ax, \mathfrak{a}\xi) \quad (\alpha_1 x, a_1\xi) \quad H$$

auf einer Geraden; der erste Punkt gehört dem Kegelschnitt $M^{(2)}$ an, weil $a\mathfrak{a}$ durch den Pol $x\xi$ geht, der zweite dem Kegelschnitt $O^{(2)}$, weil $a_1\alpha_1$ durch den Pol von $x\xi$ geht; da nun nach dem Früheren die Punkte $H\;a\;\alpha_1\;\sigma_1$ harmonisch liegen, so müssen sie von $x$ auf die zuletzt erhaltene Gerade projicirt wiederum vier harmonische Punkte liefern, also sind $H$ $(ax, \mathfrak{a}\xi)$ $(\alpha_1 x, a_1\xi)$ und der Schnittpunkt mit $G$ vier harmonische Punkte; dies lässt sich folgendermaassen als Satz aussprechen:

*Jeder Verbindungsstrahl von $H$ mit irgend einem Punkte des Kegelschnitts $M^{(2)}$ trifft die Gerade $G$ in einem solchen Punkte, dass der ihm zugeordnete vierte harmonische Punkt, während die ersteren beiden ebenfalls zugeordnet sind, allemal auf dem Kegelschnitte $O^{(2)}$ liegt.*

Hieraus ergiebt sich eine weitere Eigenschaft des Punktes $H$. Wir verbinden $H$ mit irgend einem Punkte $m$ des Kegelschnitts $M^{(2)}$, nennen den Schnittpunkt von $Hm$ und $G$ den Punkt $\mathfrak{m}$ und den vierten harmonischen $\mu$, so dass: $(Hm\mu\mathfrak{m}) = -1$ ist; der Strahl $Hm$ trifft nun den Kegelschnitt $M^{(2)}$ noch in einem zweiten Punkte $m'$, und der durch die Bedingung:

$$(Hm'\mu'\mathfrak{m}) = -1$$

bestimmte Punkt $\mu'$ liegt ebenso wie $\mu$ auf dem Kegelschnitt $O^{(2)}$. Denken

wir uns einen zweiten Strahl durch $H$ gezogen, $Hn$ und bestimmen die analogen Punkte $\mathfrak{n}$ $\nu$ $n'$ $\nu'$, d. h.

$$(Hn\nu\mathfrak{n}) = -1, \quad (Hn'\nu'\mathfrak{n}) = -1,$$

so haben wir die zwei Vierecke: $mm'nn'$, dem Kegelschnitt $M^{(2)}$ und $\mu\mu'\nu\nu'$, dem Kegelschnitt $O^{(2)}$ einbeschrieben; diese beiden Vierecke haben einen Diagonalpunkt $H$ gemeinschaftlich und das durch $H$ gehende Seitenpaar. Aus der harmonischen Lage folgt, dass

| | | | |
|---|---|---|---|
| $mn$ | $\mu\nu$ | $\mathfrak{mn}$ | sich in einem Punkte schneiden |
| $nm'$ | $\nu\mu'$ | $\mathfrak{mn}$ | – – – – – |
| $m'n'$ | $\mu'\nu'$ | $\mathfrak{mn}$ | – – – – – |
| $n'm$ | $\nu'\mu$ | $\mathfrak{mn}$ | – – – – – |

und hieraus wieder, dass die beiden Dreiecke, deren correspondirende Ecken sind

$$m \quad n \quad (mn', nm')$$

und

$$\mu \quad \nu \quad (\mu\nu', \nu\mu'),$$

die Schnittpunkte entsprechender Seiten auf der Geraden $G$ haben, also perspectivisch liegen müssen, d. h. da der Schnittpunkt $(m\mu, n\nu) = H$ ist, die Punkte:

$$H \quad (mn', nm') \quad (\mu\nu', \nu\mu')$$

müssen auf einer Geraden liegen und aus demselben Grunde auch die Punkte:

$$H \quad (mn, m'n') \quad (\mu\nu, \mu'\nu').$$

Dies zeigt aber, dass die beiden Vierecke $mnm'n'$ und $\mu\nu\mu'\nu'$ nicht blos das in $H$ sich kreuzende Seitenpaar, sondern auch das in $H$ sich kreuzende Diagonalenpaar gemeinschaftlich haben, und da bei einem dem Kegelschnitt einbeschriebenen Viereck das Diagonaldreieck allemal ein Tripel conjugirter Punkte ist (Theorie d. Kegelsch. S. 152), so sind die beiden in $H$ sich kreuzenden Diagonalen ein Paar conjugirte Strahlen in Bezug auf beide Kegelschnitte $M^{(2)}$ und $O^{(2)}$ zugleich; dieselbe Betrachtung für zwei beliebige andere durch $H$ gehende Strahlen angestellt zeigt, dass überhaupt *dem Punkte $H$ in Bezug auf beide Kegelschnitte $M^{(2)}$ und $O^{(2)}$ ein und dasselbe Strahlsystem zugehört,* oder falls dieses hyperbolisch ist, dass *der Punkt $H$ der Schnittpunkt zweier gemeinschaftlichen Tangenten der Kegelschnitte $M^{(2)}$ und $O^{(2)}$ ist.*

4. Der Punkt $S$ hat eine ähnliche Beziehung zu den beiden Kegelschnitten $M^{(2)}$ und $O^{(2)}$, wie der Punkt $H$. Fassen wir nämlich das in (2.) gefundene Resultat etwas anders auf, so können wir es folgendermaassen ausdrücken: Ist einem Dreiecke $abc$ ein Kegelschnitt $M^{(2)}$ umschrieben und trifft eine beliebige Grade $G$ in der Ebene die Dreiecksseiten in den Punkten $s_1$ $s_2$ $s_3$,

deren zugeordnete vierte harmonische Punkte auf den Dreiecksseiten $a_1$ $b_1$ $c_1$ sind; legt man endlich durch $a_1$ $b_1$ $c_1$ einen Kegelschnitt $O^{(2)}$, der das auf $G$ befindliche, dem Kegelschnitt $M^{(2)}$ zugehörige Punktsystem auch zu seinem zugehörigen hat, so trifft dieser hiedurch völlig bestimmte Kegelschnitt $O^{(2)}$ die Seiten des Dreiecks $abc$ in drei neuen Punkten $\alpha$ $\beta$ $\gamma$ der Art, dass $a\alpha$ $b\beta$ $c\gamma$ sich in einem Punkte $H$ schneiden und der Geraden $G$ in drei Punkten $\sigma_1$ $\sigma_2$ $\sigma_3$ begegnen, die conjugirt sind den Punkten $s_1$ $s_2$ $s_3$ in demjenigen Punktsystem, welches beiden Kegelschnitten $M^{(2)}$ und $O^{(2)}$ gemeinschaftlich auf der Geraden $G$ zugehört. Setzen wir nunmehr die in (2.) ermittelte andere gemeinschaftliche Sekante $\Gamma$ der beiden Kegelschnitte $M^{(2)}$ und $O^{(2)}$ an Stelle der vorigen $G$, so haben wir wiederum den dem Dreiecke $abc$ umschriebenen Kegelschnitt $M^{(2)}$, die Gerade $\Gamma$, welche den Dreiecksseiten in den Punkten $r_1$ $r_2$ $r_3$ begegnet und die vierten harmonischen Punkte $\alpha$ $\beta$ $\gamma$ auf diesen Dreiecksseiten; der durch $\alpha$ $\beta$ $\gamma$ gelegte Kegelschnitt, welcher das auf $\Gamma$ dem Kegelschnitt $M^{(2)}$ zugehörige Punktsystem zugleich zu seinem zugehörigen hat, ist identisch mit dem früheren Kegelschnitte $O^{(2)}$; er trifft die Dreiecksseiten zum andern Male in den Punkten $a_1$ $b_1$ $c_1$ der Art, dass $aa_1$ $bb_1$ $cc_1$ sich in einem Punkte $S$ schneiden und der Geraden $\Gamma$ in drei neuen Punkten $\varrho_1$ $\varrho_2$ $\varrho_3$ begegnen, die conjugirt sind den Punkten $r_1$ $r_2$ $r_3$ in demjenigen Punktsystem, welches beiden Kegelschnitten $M^{(2)}$ und $O^{(2)}$ gemeinschaftlich auf der Geraden $\Gamma$ zugehört. Hiernach haben wir folgenden Satz:

*Die vier Punkte $a$ $b$ $c$ $S$ bilden ein vollständiges Viereck, dessen drei Seitenpaare der Geraden $\Gamma$ in drei Punktepaaren desjenigen Punktsystems begegnen, welches beiden Kegelschnitten $M^{(2)}$ und $O^{(2)}$ gleichzeitig zugehört.*

Die Gerade $\Gamma$ und der Punkt $S$ stehen also in derselben Beziehung zu einander, wie die Gerade $G$ und der Punkt $H$. Hieraus können wir sofort folgende weiteren Schlüsse ziehen:

Construiren wir auf den Strahlen $Sa$, $Sb$, $Sc$ die zu den Punkten $\varrho_1$ $\varrho_2$ $\varrho_3$ zugeordneten vierten harmonischen Punkte $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{b}$ $\mathfrak{c}$, so dass:

$$(Sa\varrho_1\mathfrak{a}) = -1, \quad (Sb\varrho_2\mathfrak{b}) = -1, \quad (Sc\varrho_3\mathfrak{c}) = -1$$

ist, so *liegen die drei neuen Punkte* $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{b}$ $\mathfrak{c}$ *ebenfalls auf dem Kegelschnitte* $O^{(2)}$.

Wir können sodann ohne Beweis die oben gefundenen Eigenschaften, welche sich auf die Gerade $G$ mit ihrem Punktsystem $(s, \sigma)$ und den Punkt $H$ beziehen, übertragen in neue Eigenschaften, welche sich auf die Gerade $\Gamma$ mit ihrem Punktsystem $(r, \varrho)$ und den Punkt $S$ beziehen; nämlich:

*Es liegen folgende je drei Punkte in einer Geraden:*

$$\mathfrak{b}\mathfrak{c}r_1;\quad \mathfrak{c}\mathfrak{a}r_2;\quad \mathfrak{a}\mathfrak{b}r_3;$$
$$\beta\gamma r_1;\quad \gamma\alpha r_2;\quad \alpha\beta r_3;$$
$$\beta\mathfrak{c}\varrho_1;\quad \gamma\mathfrak{a}\varrho_2;\quad \alpha\mathfrak{b}\varrho_3;$$
$$\gamma\mathfrak{b}\varrho_1;\quad \alpha\mathfrak{c}\varrho_2;\quad \beta\mathfrak{a}\varrho_3.$$

*Die drei Verbindungsstrahlen* $\alpha\varrho_1$ $\beta\varrho_2$ $\gamma\varrho_3$ *schneiden sich in einem Punkte* $\mathfrak{M}$, *dem Pol der Geraden* $\Gamma$ *in Bezug auf den Kegelschnitt* $M^{(2)}$.

*Die drei Verbindungsstrahlen* $\alpha\mathfrak{a}$, $\beta\mathfrak{b}$, $\gamma\mathfrak{c}$ *schneiden sich in einem Punkte* $\Omega$, *dem Pol der Geraden* $\Gamma$ *in Bezug auf den Kegelschnitt* $O^{(2)}$.

*Die Punkte* $\mathfrak{M}$ *und* $\Omega$ *liegen auf der Geraden* $HS$ *und bilden mit zu-diesen vier harmonische Punkte, indem die beiden ersten und die beiden letzten geordnet sind:*

$$(SH\mathfrak{M}\Omega) = -1.$$

*Der Kegelschnitt* $O^{(2)}$ *ist der Polarkegelschnitt der Geraden* $\Gamma$ *in Bezug auf ein Kegelschnittbüschel mit den vier Grundpunkten* $a$ $b$ $c$ $S$.

*Jeder Verbindungsstrahl von* $S$ *mit irgend einem Punkte des Kegelschnitts* $M^{(2)}$ *trifft die Gerade* $\Gamma$ *in einem solchen Punkte, dass der ihm zugeordnete vierte harmonische Punkt, während die beiden ersteren ebenfalls zugeordnet sind, allemal auf dem Kegelschnitte* $O^{(2)}$ *liegt.*

*Dem Punkte* $S$ *gehört in Bezug auf beide Kegelschnitte* $M^{(2)}$ *und* $O^{(2)}$ *ein und dasselbe Strahlsystem zu; ist dies hyperbolisch, so ist* $S$ *der Schnittpunkt zweier gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Kegelschnitte.*

5. Die beiden Dreiecke $a_1b_1c_1$ und $\alpha\beta\gamma$, welche dem gegebenen $abc$ einbeschrieben sind (und auch dem Kegelschnitte $O^{(2)}$), bieten noch einige besondere Eigenschaften dar, die hinzugefügt werden mögen.

Aus den harmonischen Beziehungen:

$$(bcs_1a_1) = -1 \quad \text{und} \quad (bcr_1\alpha) = -1$$

folgt, dass sowohl die drei Punktepaare:

$$b, c \quad a_1, \alpha \quad r_1, s_1$$

einem Punktsysteme angehören, als auch die vier Punktepaare:

$$b, b \quad c, c \quad a_1, s_1 \quad \alpha, r_1$$

einem zweiten Punktsysteme, dessen Doppelpunkte $b$ und $c$ sind; aus der in sich projectivischen Eigenschaft jedes Punktsystems folgt nun die Gleichheit der Doppelverhältnisse:

$$(\alpha b r_1 s_1) = (a_1 c s_1 r_1) = (s_1 c a_1 \alpha) = (\alpha a_1 c s_1).$$

Wir haben also folgende Gleichheit:

$$(a b r_1 s_1) = (\alpha a_1 c s_1).$$

Denken wir uns die letzten vier Punkte von $s_2$ auf $\alpha\gamma$ projicirt, so erhalten wir vier neue Punkte:

$$\alpha \quad (a_1 c_1, \alpha\gamma) \quad (ac, \alpha\gamma) \quad (s_2 s_1, \alpha\gamma),$$

die mit

$$\alpha \qquad b \qquad r_1 \qquad s_1$$

projectivisch sind und perspectivisch liegen; hieraus folgt, dass die drei Punkte

$$b \quad (a_1 c_1, \alpha\gamma) \quad \text{und} \quad (r_1 r_2, s_1 s_2)$$

in gerader Linie liegen. Bezeichnen wir den Schnittpunkt:

$$(G, \Gamma) = o$$

und die drei Punkte:

$$(b_1 c_1, \beta\gamma) = u_1 \quad (c_1 a_1, \gamma\alpha) = u_2 \quad (a_1 b_1, \alpha\beta) = u_3,$$

so *liegen nach dem Vorigen:*

$$\begin{matrix} a & u_1 & o \\ b & u_2 & o \\ c & u_3 & o \end{matrix}$$

*in je einer Geraden.* Bezeichnen wir noch die Schnittpunkte:

$$(b_1\gamma, c_1\beta) = v_1 \quad (c_1\alpha, a_1\gamma) = v_2 \quad (a_1\beta, b_1\alpha) = v_3,$$

so bilden immer drei Punkte:

$$\begin{matrix} a & u_1 & v_1 \\ b & u_2 & v_2 \\ c & u_3 & v_3 \end{matrix}$$

je ein Tripel conjugirter Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt $O^{(2)}$, weil sie die Diagonalpunkte eines demselben einbeschriebenen vollständigen Vierecks sind, und da $au_1$ durch $o$ geht, so muss $v_1$ auf der Polare von $o$ liegen, d. h. auf der Geraden $SH$, also:

*Die drei Punkte $v_1$ $v_2$ $v_3$ liegen auf der Geraden $SH$.*

Sodann folgt aus dem *Pascal*schen Satze, weil die sechs Punkte $a_1$ $b_1$ $c_1$ $\alpha$ $\beta$ $\gamma$ auf dem Kegelschnitte $O^{(2)}$ liegen, dass

$$\begin{matrix} u_1 & u_2 & v_3 \\ u_2 & u_3 & v_1 \\ u_3 & u_1 & v_2 \end{matrix}$$

in je einer Geraden liegen. *Die drei Punktepaare $u_1 v_1$ $u_2 v_2$ $u_3 v_3$ bilden also die drei Paar Gegenecken eines vollständigen Vierseits.*

Aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse:

$$(bcs_1a_1) = (bcr_1\alpha)$$

folgt die Projectivität der Strahlbüschel:

$$c_1[bcs_1a_1] = \gamma[bcr_1\alpha],$$

und da $c_1\gamma b$ in derselben Geraden liegen, die perspectivische Lage der beiden Strahlbüschel, also liegen

$$c \quad (c_1b_1, \gamma\beta) \quad (c_1a_1, \gamma\alpha)$$

oder

$$c \qquad u_1 \qquad u_2$$

in einer Geraden, woraus denn folgt, dass *je vier Punkte:*

$$\begin{matrix} a & u_2 & u_3 & v_1 \\ b & u_3 & u_1 & v_2 \\ c & u_1 & u_2 & v_3 \end{matrix}$$

*in einer Geraden liegen.*

Da nun $cv_3$ identisch ist mit $u_1u_2$ und die Polare von $u_3$, ebenso $u_2u_3$ die Polare von $u_1$ und $u_1u_3$ die Polare von $u_2$, so *bilden die Punkte $u_1$ $u_2$ $u_3$ ein Tripel conjugirter Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt $O^{(2)}$.*

Aus dem Umstande, dass $u_2$ $u_3$ zwei conjugirte Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt $O^{(2)}$ sind und $a_1u_2$, $a_1u_3$ denselben resp. in $c_1$ und $b_1$ treffen, folgt, dass auch $b_1u_2$ und $c_1u_3$ sich in einem Punkte dieses Kegelschnitts begegnen (Theorie d. Kegelsch. S. 154); durch denselben geht gleicherweise $a_1u_1$, also:

*Die drei Verbindungslinien $a_1u_1$, $b_1u_2$, $c_1u_3$ treffen sich in einem Punkte* P *des Kegelschnitts $O^{(2)}$.*

Auf ganz dieselbe Weise geht hervor, dass *die drei Verbindungslinien $\alpha u_1$, $\beta u_2$, $\gamma u_3$ sich in einem Punkte* Q *des Kegelschnitts $O^{(2)}$ treffen.*

Fassen wir das dem Kegelschnitt $O^{(2)}$ einbeschriebene Viereck $a_1\alpha$PQ in's Auge, so ist ein Diagonalpunkt desselben $u_1$; seine Polare $u_2u_3$ geht also durch (PQ, $bc$), oder der Punkt $(u_2u_3, bc)$ liegt mit P und Q auf derselben Geraden; gleicherweise auch $(u_3u_1, ca)$ und $(u_1u_2, ab)$, d. h. *die drei Schnittpunkte:*

$$(u_2u_3, bc) \quad (u_3u_1, ca) \quad (u_1u_2, ab)$$

*liegen auf einer Geraden mit den Punkten* P *und* Q.

Aehnliche Betrachtungen, wie sie hier an die beiden Dreiecke $a_1b_1c_1$ und $\alpha\beta\gamma$ angeknüpft sind, lassen sich auch für andere Dreieckspaare anstellen, die ebenso aus einem der Dreiecke *bcH, caH, abH* oder *bcS, caS, abS* her-

vorgehen, wie die betrachteten aus dem ursprünglichen Dreiecke $abc$. Wir gehen nicht weiter hierauf ein.

6. Ist das Dreieck $abc$ und auf der Geraden $G$ das Punktsystem $(s, \sigma)$ gegeben, so kann nach Kegelschnitten gefragt werden, welche die Seiten des Dreiecks berühren und das Punktsystem $(s, \sigma)$ zu ihrem zugehörigen haben. Sei $m$ der Pol der Geraden $G$ in Bezug auf einen solchen Kegelschnitt und treffe $am$ die Gerade $G$ in $x$, dessen conjugirter Punkt $\xi$ im gegebenen Punktsystem $(s, \sigma)$ sei, dann müsste $\xi$ der Pol von $amx$ sein, also $ax$ und $a\xi$ conjugirte Strahlen in Bezug auf den gesuchten Kegelschnitt; da nun $ab$ und $ac$ Tangenten desselben sein sollen, so kennen wir das (hyperbolische) Strahlsystem, welches dem Punkte $a$ in Bezug auf den gesuchten Kegelschnitt zugehört, und haben in diesem ein Paar conjugirte Strahlen zu ermitteln, die zugleich durch ein Paar conjugirte Punkte des gegebenen Punktsystems $(s, \sigma)$ hindurchgehen. Wir haben also das gemeinschaftliche Paar conjugirter Strahlen zweier in $a$ concentrischer Strahlsysteme aufzusuchen, deren erstes $ab$ und $ac$ zu Asymptoten hat und deren zweites mit dem gegebenen Punktsystem $(s, \sigma)$ perspectivisch liegt, eine Aufgabe, deren Lösung bekannt ist. (Theorie d. Kegelsch. S. 59 und S. 163.) Ist dieses Strahlenpaar gefunden, so muss $m$ auf einer der beiden Geraden liegen. Ermitteln wir zweitens das gemeinschaftliche Paar conjugirter Strahlen, welches zwei concentrischen Strahlsystemen angehört, deren eines die Asymptoten $bc$ und $ba$ hat, während das andere in $b$ perspectivisch liegt mit dem gegebenen Punktsystem $(s, \sigma)$, so gilt von diesem Strahlenpaare dasselbe, wie von dem vorigen. Die beiden gefundenen Strahlenpaare schneiden sich nun im Allgemeinen in vier Punkten $m\ m'\ m''\ m'''$, deren jeder als Pol der Geraden $G$ in Bezug auf einen Kegelschnitt angesehen werden darf, welcher die Dreiecksseiten berührt und das Punktsystem $(s, \sigma)$ zu seinem zugehörigen hat; denn umgekehrt muss ein Kegelschnitt, welcher $m$ und $G$ zu Pol und Polare hat mit den auf ihnen befindlichen perspectivischen Punkt- und Strahl-Systemen, und der ausserdem eine Dreiecksseite berührt, wodurch er eindeutig bestimmt ist, auch die beiden andern Dreiecksseiten berühren. Hieraus folgt, dass auch die beiden Strahlen, welche durch die dritte Ecke $c$ des Dreiecks gehen und das gemeinschaftliche Paar conjugirter Strahlen zweier Strahlsysteme sind, deren eines die Geraden $ca$ und $cb$ zu Asymptoten hat, während das andere in $c$ perspectivisch liegt mit dem gegebenen Punktsystem $(s, \sigma)$, durch dieselben vier Punkte $m\ m'\ m''\ m'''$ gehen müssen. Es giebt also im Allgemeinen *vier Kegelschnitte,* welche die Seiten

des Dreiecks *abc* berühren und das gegebene Punktsystem $(s, \sigma)$ zum zugehörigen haben. Ihre Construction oder vielmehr die der vier Punkte $m\, m'\, m''\, m'''$ lässt sich mit Hülfe des umschriebenen Kegelschnitts $M^{(2)}$ nach der bekannten Construction des gemeinschaftlichen Paars conjugirter Strahlen bei zwei concentrischen Strahlsystemen (Theorie d. Kegelsch. S. 163) folgendermaassen ausführen: Für den Kegelschnitt $M^{(2)}$, welcher dem Dreieck *abc* umschrieben ist und das gegebene Punktsystem $(s, \sigma)$ zu seinem zugehörigen hat, construire man den Pol $M$ der Geraden $G$ (des Trägers vom Punktsystem $(s, \sigma)$) und die Pole $p_1\, p_2\, p_3$ der Dreiecksseiten *bc*, *ca*, *ab*, ziehe die Linien $Mp_1$, $Mp_2$, $Mp_3$, welche den Kegelschnitt $M^{(2)}$ in drei Punktepaaren $\pi_1'\pi_1''$, $\pi_2'\pi_2''$, $\pi_3'\pi_3''$ treffen, dann bilden die drei Strahlenpaare:

$$a\pi_1'\ a\pi_1'' \quad b\pi_2'\ b\pi_2'' \quad c\pi_3'\ c\pi_3''$$

die sechs Seiten eines vollständigen Vierecks oder schneiden sich zu je drei in vier Punkten $m\, m'\, m''\, m'''$, welches die gesuchten sind.

Von den letzten drei Strahlenpaaren, welche die gesuchten gemeinschaftlichen Paare conjugirter Strahlen der oben angegebenen concentrischen Strahlsysteme sind, muss eines immer reell sein; es können aber auch alle drei reell sein; von den vier Punkten $m\, m'\, m''\, m'''$ sind also entweder alle vier oder keiner reell; das Letztere kann nur der Fall sein, wenn das gegebene Punktsystem $(s, \sigma)$ hyperbolisch ist, braucht dann aber nicht immer einzutreten.

Aus der angegebenen Construction der Berührungskegelschnitte, welche einem gegebenen Dreieck einbeschrieben werden können und ein gegebenes Punktsystem zum zugehörigen haben, folgt beiläufig, dass für das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ und das Punktsystem $(s, \sigma)$ auf $G$, jene vier Punkte $m\, m'\, m''\, m'''$ nichts anderes sind, als die bekannten Punkte $a\ b\ c\ H$ und anderseits, dass für das Dreieck $a_1 b_1 c_1$ und das Punktsystem $(r, \varrho)$ auf $\Gamma$ jene vier Punkte $m\, m'\, m''\, m'''$ die Punkte $a\ b\ c\ S$ werden.

7. Setzen wir den reellen Fall voraus, dass es einen Kegelschnitt $T^{(2)}$ giebt (mithin nach dem Vorigen vier Kegelschnitte), welcher die Dreiecksseiten *bc*, *ca*, *ab* in den Punkten $t_1\ t_2\ t_3$ berührt und das Punktsystem $(s, \sigma)$ zum zugehörigen hat; dann schneiden sich die drei Verbindungsstrahlen $at_1$, $bt_2$, $ct_3$ in einem Punkte, (Theorie d. Kegelsch. S. 93) und die drei Schnittpunkte:

$$(bc, t_2 t_3) \quad (ca, t_3 t_1) \quad (ab, t_1 t_2)$$

liegen auf einer Geraden, welche die Polare des vorigen Punktes in Bezug auf den Kegelschnitt $T^{(2)}$ ist. Diese drei Punkte sind die vierten harmonischen den Berührungspunkten zugeordneten Punkte auf jeder Dreiecksseite, auf der

die beiden Ecken das andere Paar zugeordneter Punkte sind. Da die Gerade $G$ die Dreiecksseiten $bc$, $ca$, $ab$ in den Punkten $s_1\ s_2\ s_3$ trifft, deren zugeordnete vierte harmonische $a_1\ b_1\ c_1$ sind, so werden auch $a[bca_1s_1]$ vier harmonische Strahlen, also $aa_1$ und $as_1$ zwei conjugirte Strahlen in Bezug auf den Kegelschnitt $T^{(2)}$ sein, weil $ab$ und $ac$ Tangenten desselben sind. Die Polare von $a$ ist $t_2t_3$, folglich bilden die drei Punkte:

$$a \qquad (aa_1,\ t_2t_3) \qquad (as_1,\ t_2t_3)$$

ein Tripel conjugirter Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt $T^{(2)}$; mithin ist $(aa_1, t_2t_3)$ der Pol von $as_1$, liegt also auf der Polare von $s_1$, welche ausserdem offenbar durch den Berührungspunkt $t_1$ geht und durch den Punkt $\sigma_1$, der in dem gegebenen Punktsystem zu $s_1$ conjugirt ist; bezeichnen wir nunmehr die Schnittpunkte:

$$(aa_1, t_2t_3) = w_1, \quad (bb_1, t_3t_1) = w_2, \quad (cc_1, t_1t_2) = w_3,$$
$$(as_1, t_2t_3) = \varpi_1, \quad (bs_2, t_3t_1) = \varpi_2, \quad (cs_2, t_1t_2) = \varpi_3,$$

so liegen

$t_1 \quad w_1 \quad \sigma_1$ auf der Polare von $s_1$
$t_2 \quad w_2 \quad \sigma_2$ – – – – $s_2$
$t_3 \quad w_3 \quad \sigma_3$ – – – – $s_3$

und

$a \quad w_1 \quad \varpi_1$ bilden ein Tripel conj. Punkte
$b \quad w_2 \quad \varpi_2$ – – – – –
$c \quad w_3 \quad \varpi_3$ – – – – – .

Da nun die drei Punkte $s_1\ s_2\ s_3$ auf der Geraden $G$ liegen, so *schneiden sich die drei Verbindungslinien $t_1w_1$, $t_2w_2$, $t_3w_3$ in einem Punkte,* dem Pol der Geraden $G$ in Bezug auf den Kegelschnitt $T^{(2)}$, und weil auch $aw_1$, $bw_2$, $cw_3$, sich in einem Punkte $S$ treffen, so müssen *die Punkte $\varpi_1\ \varpi_2\ \varpi_3$ in einer Geraden* liegen, der Polare des Punktes $S$ in Bezug auf den Kegelschnitt $T^{(2)}$. Hieraus ergiebt sich weiter, indem auf den Seiten des Dreiecks $t_1t_2t_3$ zu den in einer Geraden liegenden Punkten $\varpi_1\ \varpi_2\ \varpi_3$ die zugeordneten vierten harmonischen $w_1\ w_2\ w_3$ sind, dass auch

$$w_1 \quad w_2 \quad \varpi_3$$
$$w_2 \quad w_3 \quad \varpi_1$$
$$w_3 \quad w_1 \quad \varpi_2$$

*in je einer Geraden* liegen. Endlich müssen, weil die drei Geraden $t_2t_3$, $aa_1$ und $t_1\sigma_1$ sich in einem Punkte $w_1$ treffen, ihre Pole auf einer Geraden liegen,

also es finden sich je drei Punkte:

$$\begin{array}{ccc} a & \varpi_1 & s_1 \\ b & \varpi_2 & s_2 \\ c & \varpi_3 & s_3 \end{array}$$

*in einer Geraden.* Bezeichnen wir die Schnittpunkte der drei Berührungssehnen $t_2t_3$, $t_3t_1$, $t_1t_2$ mit der Geraden $G$ durch $\tau_1$ $\tau_2$ $\tau_3$, so sind offenbar $a$ und $\tau_1$, $b$ und $\tau_2$, $c$ und $\tau_3$ je zwei conjugirte Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt $T^{(2)}$, und wir können nach dem *Hesse*schen Satze (Theorie d. Kegelsch. S. 157) aus zwei Paaren conjugirter Punkte allemal ein drittes Paar ableiten: da nämlich $b$ und $\tau_2$, $c$ und $\tau_3$ conjugirte Punkte sind, so müssen auch:

$$(b\tau_3, c\tau_2) \quad \text{und} \quad (bc, \tau_2\tau_3)$$

conjugirte Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt $T^{(2)}$ sein; der letzte Punkt ist aber nichts anderes, als $s_1$, folglich liegt der erstere auf der Polare von $s_1$, d. h. auf der Geraden $t_1w_1$; bezeichnen wir nunmehr die drei neuen Schnittpunkte:

$$(b\tau_3, c\tau_2) = x, \qquad (c\tau_1, a\tau_3) = y, \qquad (a\tau_2, b\tau_1) = z,$$

so haben wir:

$$\begin{array}{ccc} t_1 & w_1 & x \\ t_2 & w_2 & y \\ t_3 & w_3 & z \end{array}$$

*in je einer Geraden,* und diese drei Geraden schneiden sich in dem Pol von $G$ in Bezug auf den Kegelschnitt $T^{(2)}$.

Die Lage der drei neuen Punkte $x\ y\ z$ zu den früheren tritt noch deutlicher hervor, wenn wir bemerken, dass die vier Strahlen $t_1[t_2t_3\tau_1a]$ mit den vier Strahlen $a[t_2t_3\tau_1t_1]$ perspectivisch liegen, und dass die ersteren identisch sind mit $t_1[\tau_3\tau_2\tau_1a]$, die letzteren mit $a[cb\tau_1t_1]$; die ersteren bestimmen nun auf $G$ vier Punkte und die letzteren auf $bc$, die projectivisch zu einander sein müssen, folglich sind auch die Strahlbüschel projectivisch:

$$a[\tau_3\tau_2\tau_1t_1] = \tau_1[cbat_1],$$

und da sie in der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte $a\tau_1$ zwei zusammenfallende entsprechende Strahlen haben, so liegen sie perspectivisch, d. h.

$$(a\tau_3, c\tau_1) = y, \quad (a\tau_2, b\tau_1) = z \quad \text{und} \quad t_1$$

liegen in einer Geraden; wir sehen also, dass

$$\begin{array}{ccc} y & z & t_1 \\ z & x & t_2 \\ x & y & t_3 \end{array}$$

*in je einer Geraden liegen.* Es sind ferner $t_1[abt_3t_2]$ vier harmonische Strahlen, die $G$ in vier harmonischen Punkten treffen; verbinden wir dieselben mit $a$, so erhalten wir also wieder vier harmonische Strahlen $a[t_1s_1\tau_2\tau_3]$; anderseits sind auch $\tau_1[t_1t_2bc]$ harmonisch, also folgende beide Strahlbüschel projectivisch:

$$a[t_1s_1\tau_2\tau_3] = \tau_1[t_1t_2bc]$$

und zugleich je vier harmonische Strahlen. Da nun in diesen beiden Strahlbüscheln die Schnittpunkte von drei entsprechenden Strahlenpaaren, nämlich $y\ z\ t_1$ auf einer Geraden liegen, wie wir vorhin gesehen haben, so muss auch der vierte Schnittpunkt entsprechender Strahlen, nämlich:

$$(as_1, \tau_1t_2) \quad \text{oder} \quad (as_1, t_2t_3),$$

d. h. $\varpi_1$ auf derselben Geraden sich befinden und es sind:

$$t_1 \quad \varpi_1 \quad y \quad z$$

vier harmonische Punkte; wir können also dem früheren Resultat dies neue hinzufügen:

*Die Punkte:*

$$\begin{matrix} y & z & t_1 & \varpi_1 \\ z & x & t_2 & \varpi_2 \\ x & y & t_3 & \varpi_3 \end{matrix}$$

*liegen zu je vieren auf einer Geraden und sind harmonisch, indem allemal die beiden ersten und die beiden letzten einander zugeordnet sind.*

Wir haben einmal vier harmonische Punkte

$$y \quad z \quad t_1 \quad \varpi_1$$

und anderseits auf der Geraden $bc$ ebenfalls vier harmonische Punkte $b\ c\ t_1$ $(bc, t_2t_3)$; die beiden Punktreihen sind daher projectivisch und haben in ihrem Schnittpunkte $t_1$ entsprechende Punkte vereinigt, folglich gehen die Verbindungsstrahlen $by$, $cz$, $t_2t_3$ durch einen Punkt, also:

*Die Strahlen*

$$\begin{matrix} by & cz & t_2t_3 \\ cz & ax & t_3t_1 \\ ax & by & t_1t_2 \end{matrix}$$

*treffen sich zu je drei in einem Punkte.*

Dies Resultat lässt sich auch anders ausdrücken; die Punkte $a\,b\,t_3$ liegen nämlich auf einer Geraden und auch die Punkte $a\ c\ t_2$ auf einer Geraden; bezeichnen wir daher die Schnittpunkte:

$$(cz, ab) = k_3, \qquad (by, ac) = k_2,$$

so müssen die beiden Punktreihen:

$$a \quad t_2 \quad k_2 \quad c$$

und

$$a \quad t_3 \quad b \quad k_3$$

perspectivisch liegen, also folgende beiden projectivisch:

$$(a t_2 k_2 c) = (t_3 a k_3 b);$$

die in diesen beiden projectivischen Punktreihen dem gemeinschaftlichen Punkte $a$ entsprechenden Punkte sind $t_2$ und $t_3$, also die Berührungspunkte eines Kegelschnitts, welcher $ab$ und $ac$ berührt und auch $bc$ und $k_2 k_3$, zwei andere Projectionsstrahlen, zu Tangenten hat; dieser Kegelschnitt ist nichts anderes, als der frühere $T^{(2)}$; folglich ist die Verbindungslinie $k_2 k_3$ eine Tangente desselben; bezeichnen wir noch den dritten Punkt:

$$(ax, bc) = k_1,$$

so folgt: *Die drei Punkte $k_1\ k_2\ k_3$ liegen in einer Geraden, welche den Kegelschnitt $T^{(2)}$ berührt.* Diese besondere Tangente des Kegelschnitts $T^{(2)}$ hat nun noch eine zweite geometrische Bedeutung, zu der wir durch die nähere Untersuchung der Punkte $k_1\ k_2\ k_3$ gelangen.

8. Auf der Geraden $bc$ haben wir zwei Mal je vier harmonische Punkte, nämlich

$$b \quad c \quad s_1 \qquad a_1$$

und

$$b \quad c \quad t_1 \quad (t_2 t_3, bc),$$

woraus hervorgeht, dass $b$ und $c$, $s_1$ und $t_1$, $a_1$ und $(t_2 t_3, bc)$ als drei Paare conjugirter Punkte eines Punktsystems aufgefasst werden können und daher mit $w_1$ verbunden drei Paare conjugirter Strahlen eines Strahlsystems liefern:

$$w_1 b \text{ und } w_1 c, \quad w_1 s_1 \text{ und } w_1 t_1, \quad w_1 a \text{ und } w_1 \varpi_1;$$

da nun $s_1$ der Pol von $w_1 t_1$ und $a$ der Pol von $w_1 \varpi_1$ ist, so ist dies Strahlsystem identisch mit demjenigen, welches dem Punkte $w_1$ in Bezug auf den Kegelschnitt $T^{(2)}$ zugehört, also sind

$w_1 b$ und $w_1 c$ zwei conjugirte Strahlen in Bezug auf den Kegelschnitt $T^{(2)}$
$w_2 c$ - $w_2 a$ - - - - - - - - - -
$w_3 a$ - $w_3 b$ - - - - - - - - - -;

der Pol der Geraden $w_1 b$ muss demnach auf der Geraden $w_1 c$ liegen; da nun die Polare von $b$ die Berührungssehne $t_1 t_3$ und die Polare von $w_1$ die Gerade $a\varpi_1$ ist, so folgt, dass

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $w_1 c$ | $a\varpi_1$ | $t_1 t_3$ | *sich in einem Punkte schneiden* |
| und ebenso | $w_1 b$ | $a\varpi_1$ | $t_2 t_1$ | – – – – – |
| | $w_2 a$ | $b\varpi_2$ | $t_1 t_2$ | – – – – – |
| | $w_2 c$ | $b\varpi_2$ | $t_2 t_3$ | – – – – – |
| | $w_3 b$ | $c\varpi_3$ | $t_2 t_3$ | – – – – – |
| | $w_3 a$ | $c\varpi_3$ | $t_3 t_1$ | – – – – – . |

Betrachten wir nun drei solche in einem Punkte zusammenlaufende Strahlen z. B. $b\varpi_2$ oder $bs_2$, $t_2 t_3$ und $w_2 c$ und verbinden ihren Schnittpunkt noch mit $\sigma_2 = (G, t_2 w_2)$, so haben wir auf den Geraden $G$ und $t_2 w_2$ vier Paare entsprechender Punkte zweier perspectivisch liegenden Punktreihen, nämlich:

$$\sigma_2 \quad w_2 \quad t_2 \quad (bs_2, t_2 w_2)$$

und

$$\sigma_2 \quad (cw_2, G) \quad \tau_1 \quad s_2;$$

die letzten vier Punkte von $c$ aus auf $t_2 w_2$ projicirt geben

$$\sigma_2 \quad w_2 \quad y \quad t_2$$

und diese sind daher projectivisch mit:

$$\sigma_2 \quad w_2 \quad t_2 \quad (bs_2, t_2 w_2);$$

projiciren wir beide Punktreihen von $b$ aus auf $ac$, so erhalten wir folgende projectivische Punktreihen:

$$\beta \quad b_1 \quad k_2 \quad t_2$$
$$\beta \quad b_1 \quad t_2 \quad s_2,$$

also findet auch die Gleichheit der Doppelverhältnisse statt:

$$(b_1 \beta t_2 k_2) = (\beta b_1 t_2 s_2)$$

welche folgendes aussagt: *In einem Punktsystem, für welches $t_2$ ein Doppelpunkt und $b_1$ $\beta$ ein Paar conjugirter Punkte ist, müssen auch $s_2$ und $k_2$ ein drittes Paar conjugirter Punkte sein.*

Dasselbe gilt für jede der beiden andern Dreiecksseiten und die früheren Punkte $k_1$ $k_2$ $k_3$ erhalten dadurch eine neue Bedeutung. Der Punkt $t_2$ ist nämlich der Berührungspunkt des Kegelschnitts $T^{(2)}$ mit der Geraden $ac$, und die Punkte $b_1$ und $\beta$ sind die Schnittpunkte des Kegelschnitts $O^{(2)}$ mit der Geraden $ac$; endlich ist $s_2$ der Schnittpunkt einer gemeinschaftlichen Sekante $G$ der Kegelschnitte $T^{(2)}$ und $O^{(2)}$ mit derselben Geraden $ac$; folglich muss $k_2$ derjenige Punkt auf $ac$ sein, durch welchen eine zweite gemeinschaftliche Sekante geht, die mit $G$ zusammen ein Linienpaar bildet in dem durch diet beiden Kegelschnitte $T^{(2)}$ und $O^{(2)}$ bestimmten Büschel; diese zweite gemeinschaftliche Sekante geht in gleicher Weise durch die Punkte $k_3$ und $k_1$, is

also die Gerade $k_1k_2k_3$; da sie, wie wir vorhin gesehen haben, eine Tangente des Kegelschnitts $T^{(2)}$ ist und, wie wir jetzt wissen, eine gemeinschaftliche Sekante der beiden Kegelschnitte $T^{(2)}$ und $O^{(2)}$, so muss sie auch den Kegelschnitt $O^{(2)}$ in demselben Punkt berühren, in welchem sie $T^{(2)}$ berührt: also *die beiden Kegelschnitte $T^{(2)}$ und $O^{(2)}$ berühren sich und haben zu ihrer gemeinschaftlichen Tangente im Berührungspunkte die Gerade, auf welcher die Punkte $k_1$ $k_2$ $k_3$ liegen**). Die Construction dieser Punkte ist oben angegeben (7.).

Was für den Kegelschnitt $T^{(2)}$ nunmehr bewiesen ist, gilt offenbar für jeden der vier Kegelschnitte, die dem Dreiecke *abc* einbeschrieben werden können und das auf der Geraden *G* gegebene Punktsystem $(s, \sigma)$ zu ihrem zugehörigen haben; alle diese vier Kegelschnitte werden also von $O^{(2)}$ berührt. Ferner behält der Kegelschnitt $O^{(2)}$, wie wir früher gesehen haben, dieselbe Bedeutung für das Dreieck *abc*, wie für jedes der Dreiecke *bcH, caH, abH;* wir schliessen also:

*Der Kegelschnitt $O^{(2)}$ berührt die sechszehn Kegelschnitte, welche sich je einem der vier Dreiecke abc, bcH, caH, abH einbeschreiben lassen und zugleich das auf G gegebene Punktsystem $(s, \sigma)$ zu ihrem zugehörigen haben.*

Anderseits wissen wir, dass der Kegelschnitt $O^{(2)}$ dieselbe Bedeutung hat für das vollständige Viereck *abcH* und die Gerade *G* mit ihrem Punktsystem $(s, \sigma)$ wie für das vollständige Viereck *abcS* und die oben construirte Gerade $\Gamma$ mit ihrem Punktsystem $(r, \varrho)$; wir schliessen also:

*Der Kegelschnitt $O^{(2)}$ berührt die sechszehn Kegelschnitte, welche sich je einem der vier Dreiecke abc, bcS, caS, abS einbeschreiben lassen und zugleich das auf der Geraden $\Gamma$ befindliche Punktsystem $(r, \varrho)$ zu ihrem zugehörigen haben.*

Berücksichtigen wir die oben gefundene Eigenschaft, dass der Kegelschnitt $O^{(2)}$ der Polarkegelschnitt der Geraden *G* ist in Bezug auf ein Kegelschnittbüschel mit den vier Grundpunkten *a b c H,* oder auch der Polarkegelschnitt der Geraden $\Gamma$ in Bezug auf ein Kegelschnittbüschel mit den vier Grundpunkten *a b c S,* so lässt sich das erlangte Resultat auch so aussprechen:

*Hat man ein Kegelschnittbüschel mit vier reellen Grundpunkten a b c d und eine beliebige Transversale G in der Ebene, so berührt der Polarkegel-*

*) Die hier angegebene Construction der gemeinsamen Tangente im Berührungspunkte kommt mit derjenigen überein, welche für den besonderen Fall der Kreise in *Schlömilchs* Zeitschrift für Mathematik und Physik Bd. XII, S. 354 von Herrn *C. W. Baur* als „geometrischer Satz" ohne Beweis mitgetheilt ist.

*schnitt $O^{(2)}$ der Geraden $G$ in Bezug auf das Kegelschnittbüschel diejenigen sechszehn Kegelschnitte, welche je einem der vier Dreiecke $abc$, $abd$, $bcd$, $acd$ einbeschrieben werden können und die Gerade $G$ zur (reellen oder ideellen) gemeinschaftlichen Sekante mit $O^{(2)}$ haben.*

Liegen insbesondere die vier Punkte $a\ b\ c\ d$ so, dass einer (jeder) der Höhenpunkt des von den drei andern gebildeten Dreiecks ist, und ist $G$ die unendlich entfernte Gerade $G_\infty$, so folgt der in der Einleitung hervorgehobene Elementarsatz.

9. Die im Vorigen betrachtete Figur führt noch zu andern Constructionen sowohl der Geraden $k_1\ k_2\ k_3$, welche für beide sich berührende Kegelschnitte $T^{(2)}$ und $O^{(2)}$ die Tangente in ihrem Berührungspunkte ist, als auch dieses Berührungspunktes selbst.

Wir haben gesehen (7.), dass die vier Punkte $y\ z\ t_1\ \varpi_1$ auf derselben Geraden liegen und vier harmonische Punkte sind; die vier Strahlen $b[y\,z\,t_1\,\varpi_1]$ sind daher vier harmonische Strahlen und treffen die Gerade $t_2t_3$ in vier neuen harmonischen Punkten:

$$(by,\,t_2t_3) \qquad \tau_1 \qquad (bc,\,t_2t_3) \qquad \varpi_1.$$

Bezeichnen wir den schon früher betrachteten Schnittpunkt:

$$(by,\,t_2t_3) = (cz,\,t_2t_3) = \xi$$

und analog

$$(cz,\,t_3t_1) = (ax,\,t_3t_1) = \eta,$$
$$(ax,\,t_1t_2) = (by,\,t_1t_2) = \zeta,$$

so wie die Schnittpunkte:

$$(bc,\,t_2t_3) = \mathfrak{a},$$
$$(ca,\,t_3t_1) = \mathfrak{b},$$
$$(ab,\,t_1t_2) = \mathfrak{c},$$

so sind also $\xi\ \tau_1\ \mathfrak{a}\ \varpi_1$ vier harmonische Punkte, die von $s_1$ auf $ac$ projicirt wieder vier harmonische Punkte bestimmen, nämlich:

$$(s_1\xi,\,ac) \qquad s_2 \qquad c \qquad a.$$

Hieraus folgt aber, dass der Punkt $(s_1\xi,\,ac)$ identisch ist mit dem Punkte $b_1$, welchen wir anfangs eingeführt haben (1.), und die Gerade $s_1\xi$ mit der Geraden $b_1c_1$, folglich schneiden sich *die Geraden $b_1c_1$, $t_2t_3$, $by$, $cz$ alle vier in einem und demselben Punkte $\xi$.* Da nun

| die vier Geraden | $by$ | $cz$ | $b_1c_1$ | $t_2t_3$ | durch den Punkt | $\xi$ | gehen und |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| – – – | $cz$ | $ax$ | $c_1a_1$ | $t_3t_1$ | – – – | $\eta$ | – – |
| – – – | $ax$ | $by$ | $a_1b_1$ | $t_1t_2$ | – – – | $\zeta$ | – , |

so liegen $by$ $\xi$ $\zeta$ in einer Geraden
– – $cz$ $\xi$ $\eta$ – – –
– – $ax$ $\eta$ $\zeta$ – – –

d. h. $\xi$ $\eta$ $\zeta$ sind die Ecken desjenigen Dreiecks, dessen Seiten $ax$, $by$, $cz$ sind.

Zur Construction der Geraden $k_1 k_2 k_3$, welche die beiden sich berührenden Kegelschnitte $T^{(2)}$ und $O^{(2)}$ zur Tangente in ihrem Berührungspunkte haben, sind früher die Punkte $x$ $y$ $z$ benutzt worden; jetzt können wir zu ihrer *Construction* die Punkte $\xi$ $\eta$ $\zeta$ benutzen, welche nur aus den Dreiecken $t_1 t_2 t_3$ und $a_1 b_1 c_1$ der Art hervorgehen, dass:

$$(b_1 c_1, t_2 t_3) = \xi, \quad (c_1 a_1, t_3 t_1) = \eta, \quad (a_1 b_1, t_1 t_2) = \zeta$$

ist und

$$(\eta\zeta, bc) = k_1, \quad (\zeta\xi, ca) = k_2, \quad (\xi\eta, ab) = k_3;$$

die Punkte $k_1$ $k_2$ $k_3$ liegen eben in der gesuchten Geraden *). Hieraus folgt weiter, dass die beiden Dreiecke $abc$ und $\xi\eta\zeta$ perspectivisch liegen müssen, weil die Schnittpunkte entsprechender Seiten sich auf einer Geraden befinden.

*Es schneiden sich also $a\xi$, $b\eta$, $c\zeta$ in einem Punkte.*

Betrachten wir die Seiten des Dreiecks $abc$ und die Gerade $k_1 k_2 k_3$ als ein vollständiges Vierseit, so erscheint $\xi\eta\zeta$ als das Diagonaldreieck desselben; *$\xi\eta\zeta$ bilden daher ein Tripel conjugirter Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt $T^{(2)}$*, weil jenes Vierseit demselben umschrieben ist (Theorie der Kegelsch. S. 152); dies tritt auch unmittelbar aus der harmonischen Eigenschaft des vollständigen Vierseits hervor, wonach

$$\begin{matrix} \xi & \eta & c & k_3 \\ \eta & \zeta & a & k_1 \\ \zeta & \xi & b & k_2 \end{matrix}$$

je vier harmonische Punkte sind, immer die beiden ersten zugeordnet und die beiden letzten einander zugeordnet. Mithin treffen die vier Strahlen $a[\xi\eta c k_3]$ die Gerade $t_2 t_3$ wieder in vier harmonischen Punkten, also $a\eta$ oder $\eta\zeta$ geht durch den vierten harmonischen dem $\xi$ zugeordneten Punkt, während $t_2 t_3$ das andere Paar zugeordneter Punkte ist. Da nun $\xi$ auf der Polare von $a$ liegt, so ist $a\zeta$ oder $\eta\zeta$ die Polare von $\xi$ in Bezug auf den Kegelschnitt $T^{(2)}$ und mithin $\xi\eta\zeta$ ein Tripel conjugirter Punkte.

Wir haben früher gesehen, dass $s_1$ und $x$ conjugirte Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt $T^{(2)}$ sind, also $t_1 x$ die Polare von $s_1$ ist; jetzt wissen

*) Diese Construction hat *Salmon* in Quarterly Journal of Math. Bd. IV, pag. 152 als von *W. R. Hamilton* herrührend mitgetheilt.

wir, dass $\xi$ der Pol von $\eta\zeta$ ist, folglich wird der Schnittpunkt $x$ der Geraden $t_1 x$ und $\eta\zeta$ der Pol von $s_1\xi$ oder $b_1 c_1$ sein, also *die oben eingeführten Punkte $x\ y\ z$ sind die Pole der drei Geraden $b_1 c_1$, $c_1 a_1$, $a_1 b_1$ in Bezug auf den Kegelschnitt $T^{(2)}$.* Da die Dreiecke $a_1 b_1 c_1$ und $xyz$ Polardreiecke von einander sind in Bezug auf $T^{(2)}$, so liegen sie perspectivisch (Th. d. Kegelsch. S. 160), d. h. *es schneiden sich sowohl $a_1 x$, $b_1 y$, $c_1 z$ in einem Punkte, als auch die drei Schnittpunkte:*

$$(a_1 b_1, xy) \quad (b_1 c_1, yz) \quad (c_1 a_1, zx)$$

*liegen in einer Geraden, der Polare des vorigen Punktes.*

Wir haben vorhin gesehen, dass die drei Strahlen $a\xi$, $b\eta$, $c\zeta$ sich in einem Punkte schneiden; da nun die Polare von $a$ die Gerade $t_2 t_3$ und von $\xi$ die Gerade $\eta\zeta$ ist, so müssen auch die drei Schnittpunkte:

$$(\eta\zeta, t_2 t_3) \quad (\zeta\xi, t_3 t_1) \quad (\xi\eta, t_1 t_2)$$

in einer Geraden liegen, d. h. die Dreiecke $t_1 t_2 t_3$ und $\xi\eta\zeta$ perspectivisch liegen, also auch

$$\xi t_1 \quad \eta t_2 \quad \zeta t_3$$

*sich in einem Punkte treffen.* Dieser Punkt liegt nothwendig auf dem Kegelschnitte $T^{(2)}$, welchem das Dreieck $t_1 t_2 t_3$ einbeschrieben und für den $\xi\eta\zeta$ ein Tripel conjugirter Punkte ist, die auf den Seiten des vorigen Dreiecks liegen (Th. d. Kegelsch. S. 153). Da nun die Polare von $\xi$ die Gerade $\eta\zeta$, von $t_1$ die Gerade $bc$, so ist der Pol von $\xi t_1$ der Schnittpunkt $(\eta\zeta, bc) = k_1$, also da sich $\xi t_1$, $\eta t_2$, $\zeta t_3$ in einem Punkte treffen, so liegen $k_1\ k_2\ k_3$ in einer Geraden, welche die Polare jenes Punktes und zugleich Tangente des Kegelschnitts $T^{(2)}$ ist, weil ihr Pol auf dem Kegelschnitt selbst liegt.

Hieraus fliesst eine *Construction des Berührungspunktes der beiden Kegelschnitte $T^{(2)}$ und $O^{(2)}$.* Man bestimme die Schnittpunkte:

$$(b_1 c_1, t_2 t_3) = \xi, \quad (c_1 a_1, t_3 t_1) = \eta, \quad (a_1 b_1, t_1 t_2) = \zeta,$$

*dann schneiden sich die drei Verbindungslinien $t_1\xi$, $t_2\eta$, $t_3\zeta$ in demjenigen Punkte, in welchem sich die Kegelschnitte $T^{(2)}$ und $O^{(2)}$ berühren.*

Weil $ax$ oder $\eta\zeta$ durch den vierten harmonischen Punkt zu $t_2\ t_3\ \xi$, der dem $\xi$ zugeordnet ist, hindurchgeht, und $c_1 t_3$, $b_1 t_2$ sich in $a$, $t_2 t_3$ und $b_1 c_1$ sich in $\xi$ schneiden, so geht $\eta\zeta$ auch durch den vierten harmonischen Punkt zu $b_1\ c_1\ \xi$, der dem $\xi$ zugeordnet ist; ebenso geht $\zeta\xi$ durch den vierten harmonischen Punkt zu $c_1\ a_1\ \eta$, der dem $\eta$ zugeordnet ist, folglich schneiden sich $\xi\eta$ $a_1 b_1$ und die Verbindungslinie jener beiden vierten harmonischen Punkte in einem und

demselben Punkt, oder

$$(b_1c_1, \eta\xi) \quad (c_1a_1, \zeta\xi) \quad (a_1b_1, \xi\eta)$$

*liegen auf einer Geraden*, d. h. die beiden Dreiecke $a_1b_1c_1$ und $\xi\eta\zeta$ liegen perspectivisch, also $a_1\xi$, $b_1\eta$, $c_1\zeta$ *schneiden sich in einem Punkte.* Dieser Punkt, in welchem sich die drei Geraden $a_1\xi$, $b_1\eta$, $c_1\zeta$ treffen, *liegt auf der gemeinschaftlichen Tangente* $k_1k_2k_3$ der beiden sich berührenden Kegelschnitte $T^{(2)}$ und $O^{(2)}$, denn die drei Punkte $a_1$ $\zeta$ $b_1$ liegen auf einer Geraden und die Punkte $\eta$ $c$ $\xi$ ebenfalls auf einer Geraden; wir haben daher (Th. d. Kegelsch. S. 90) die drei Schnittpunkte:

$$(a_1c, \eta\zeta) \quad (b_1c, \xi\zeta) \quad (a_1\xi, b_1\eta)$$

oder

$$k_1 \qquad k_2 \qquad (a_1\xi, b_1\eta)$$

auf einer Geraden, d. h. der Punkt, in welchem sich die drei Strahlen $a_1\xi$, $b_1\eta$, $c_1\zeta$ treffen, liegt in der Geraden $k_1k_2k_3$.

Da das Polardreieck von $a_1b_1c_1$ das Dreieck $xyz$ ist und $\xi\eta\zeta$ sich selbst zum Polardreieck hat, so folgt aus dem Vorigen, dass auch die Dreiecke $xyz$ und $\xi\eta\zeta$ perspectivisch liegen, d. h.

$$(xy, \xi\eta) \quad (yz, \eta\zeta) \quad (zx, \zeta\xi)$$

*in einer Geraden*, während sich $x\xi$, $y\eta$, $z\zeta$ *in einem Punkte treffen.* Die Gerade, in welcher die drei Schnittpunkte:

$$(xy, \xi\eta) \quad (yz, \eta\zeta) \quad (zx, \zeta\xi)$$

liegen, *geht durch den Berührungspunkt der beiden Kegelschnitte $T^{(2)}$ und $O^{(2)}$*, weil sie die Polare des Schnittpunktes $(a_1\xi, b_1\eta)$ ist und dieser auf der Tangente $k_1k_2k_3$ liegt.

Weil sich $at_1$, $bt_2$, $ct_3$ in einem Punkte schneiden (Theorie d. Kegelsch. S. 93), so liegen die früher mit $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{b}$ $\mathfrak{c}$ bezeichneten Punkte:

$$(bc, t_2t_3) = \mathfrak{a} \quad (ca, t_3t_1) = \mathfrak{b} \quad (ab, t_1t_2) = \mathfrak{c}$$

in einer Geraden und es sind

$$b \quad c \quad \mathfrak{a} \quad t_1$$

vier harmonische Punkte; da auch $b$ $c$ $s_1$ $a_1$ vier harmonische Punkte sind, so folgt die Gleichheit der Doppelverhältnisse:

$$(cbs_1a_1) = (cb\mathfrak{a}t_1)$$

und die Projectivität der Strahlbüschel:

$$s_2[cbs_1a_1] = \mathfrak{b}[cb\mathfrak{a}t_1];$$

nun finden sich aber $s_2$ $\mathfrak{b}$ und $c$ auf derselben Geraden, folglich sind die beiden Strahlbüschel perspectivisch und die Schnittpunkte der drei übrigen Strahlen-

paare auf einer Geraden; von diesen ist einer der Punkt $b$, der andere $(s_2 a_1, \mathfrak{b} t_1)$ oder $(a_1 c_1, t_1 t_3) = \eta$ und der dritte $(s_1 s_2, \mathfrak{a}\mathfrak{b})$; die Gerade $b\eta$ geht daher durch den Schnittpunkt der beiden Geraden $s_1 s_2 s_3$ und $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$; aus demselben Grunde die Verbindungslinie $c\zeta$ und auch $a\xi$; *der Punkt, in welchem sich die drei Geraden $a\xi$, $b\eta$, $c\zeta$ treffen, liegt also auf der Geraden $G$ und ist ihr Schnittpunkt mit derjenigen Geraden, auf welcher $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{b}$ $\mathfrak{c}$ liegen.*

Die Pole der drei Geraden $a\xi$, $b\eta$, $c\zeta$, welche wir mit $\xi_1\eta_1\zeta_1$ bezeichnen wollen, sind:

$$(t_2 t_3, \eta\zeta) = \xi_1 \quad (t_3 t_1, \zeta\xi) = \eta_1 \quad (t_1 t_2, \xi\eta) = \zeta_1.$$

*Die Punkte $\xi_1\eta_1\zeta_1$ liegen auf einer Geraden*, weil ihre Polaren durch einen Punkt gehen und die Gerade $\xi_1\eta_1\zeta_1$ geht durch den Pol von $G$ in Bezug auf den Kegelschnitt $T^{(2)}$. Wir bemerken noch, weil

$$\begin{matrix} t_2 & t_3 & \xi & \xi_1 \\ t_3 & t_1 & \eta & \eta_1 \\ t_1 & t_2 & \zeta & \zeta_1 \end{matrix}$$

je vier harmonische Punkte sind, erscheint $t_1 t_2 t_3$ als das Diagonaldreieck eines vollständigen Vierseits, dessen drei Paar Gegenecken $\xi\xi_1$ $\eta\eta_1$ $\zeta\zeta_1$ sind; ferner treffen sich

$$\begin{matrix} t_1\xi_1 & t_2\eta_1 & t_3\zeta \\ t_2\eta_1 & t_3\zeta_1 & t_1\xi \\ t_3\zeta_1 & t_1\xi_1 & t_2\eta \end{matrix}$$

zu je drei in einem Punkte u. s. w.

Diese Eigenschaft führt noch zu einer andern Construction der Geraden $k_1 k_2 k_3$; es ist nämlich

der Pol von $t_1\xi_1$ der Schnittpunkt $(a\xi, bc)$
– – – $t_2\eta_1$ – – $(b\eta, ca)$
– – – $t_3\zeta_1$ – – $(c\zeta, ab)$,

folglich liegen nicht allein die Punkte $k_1$ $k_2$ $k_3$ in einer Geraden, sondern auch

$$\begin{matrix} (a\xi, bc); & (b\eta, ca); & k_3 \\ (b\eta, ca); & (c\zeta, ab); & k_1 \\ (c\zeta, ab); & (a\xi, bc); & k_2 \end{matrix}$$

*in je einer Geraden*, und weil $a\xi$, $b\eta$, $c\zeta$ durch den Schnittpunkt $\sigma$ der Geraden $G$ mit der Geraden $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ hindurchgehen, so gestaltet sich *die Construction der Punkte $k_1$ $k_2$ $k_3$* folgendermaassen:

Man construire für die beiden Dreiecke $abc$ und $t_1 t_2 t_3$ die drei Schnittpunkte correspondirender Seiten:

$$(bc, t_2 t_3) = \mathfrak{a}, \quad (ca, t_3 t_1) = \mathfrak{b}, \quad (ab, t_1 t_2) = \mathfrak{c},$$

welche in einer Geraden liegen, die $G$ im Punkte $\sigma$ trifft; dann bilden die Schnittpunkte:

$$(\sigma a, bc) \quad (\sigma b, ca) \quad (\sigma c, ab)$$

ein neues Dreieck, dessen Seiten den correspondirenden Seiten des Dreiecks $abc$ in den drei Punkten $k_1$ $k_2$ $k_3$ begegnen *).

Eine andere Construction der drei Punkte $k_1$ $k_2$ $k_3$, welche in der gemeinschaftlichen Tangente der beiden sich berührenden Kegelschnitte $T^{(2)}$ und $O^{(2)}$ liegen, ergiebt sich, wenn man erwägt, dass die drei Geraden $\tau_2\tau_3$, $b_1c_1$ und $bc$ sich in demselben Punkte $s_1$ der Geraden $G$ treffen, folglich die beiden Dreiecke $\tau_2 b_1 c$ und $\tau_3 c_1 b$ perspectivisch liegen; die Schnittpunkte entsprechender Seiten:

$$(\tau_2 b_1, \tau_3 c_1) \quad (\tau_2 c, \tau_3 b) = x \quad (b_1 c, bc_1) = a$$

müssen daher in einer Geraden liegen oder der neue Punkt $(\tau_2 b_1, \tau_3 c_1)$ liegt auf der Geraden $ax$, die eben durch $k_1$ geht; wir werden also, um $k_1$ und ebenso $k_2$ $k_3$ zu finden, folgende neue Construction in Anwendung bringen können:

„Man bestimme die Punkte $\tau_1$ $\tau_2$ $\tau_3$, in welchen die Gerade $G$ von den Berührungssehnen $t_2t_3$, $t_3t_1$, $t_1t_2$ getroffen wird, sodann die drei Schnittpunkte:

$$(b_1\tau_2, c_1\tau_3) = \mathfrak{a}_1, \quad (c_1\tau_3, a_1\tau_1) = \mathfrak{b}_1, \quad (a_1\tau_1, b_1\tau_2) = \mathfrak{c}_1,$$

dann sind:

$$(\mathfrak{a}_1 a, bc) = k_1, \quad (\mathfrak{b}_1 b, ca) = k_2, \quad (\mathfrak{c}_1 c, ab) = k_3.“$$

Wir überlassen dem Leser die weiteren Beziehungen aufzusuchen, welche die Lage des neuen Dreiecks $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$ in Verbindung mit den früheren Dreiecken darbietet.

Breslau, im October 1867.

---

*) Diese Construction kommt mit derjenigen überein, welche *J. Griffiths* in den Nouvelles Annales de Mathématiques p. M. *Gerono*, Bd. XXIV, pag. 429 angegeben hat.

# Ein *Steiner*scher Satz über Krümmungskreise bei Kegelschnitten und ein allgemeinerer *Steiner*scher Satz über osculirende Kegelschnitte bei Curven dritten Grades.

(Von Herrn *F. August.*)

---

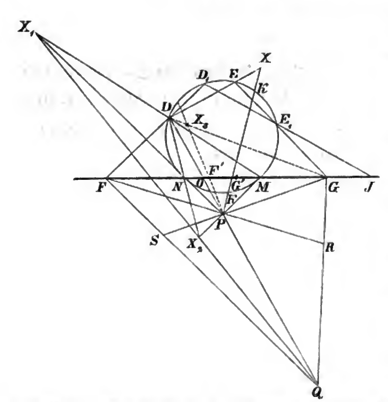
Im 33sten Bande p. 300 dieses Journals hat *Steiner* einige Sätze über Curven zweiten und dritten Grades ohne Beweis veröffentlicht, die sich folgendermassen entwickeln lassen.

## I.

*Durch jeden Punkt D einer Ellipse (eines Kegelschnitts) gehen drei Krümmungskreise, die nicht in D osculiren, die drei Osculationspunkte derselben A, B, C und der Punkt D liegen in einem Kreise.*

Vorbemerkung. Zwei Punktreihen $A$ und $B$ auf einem Kegelschnitt $k^2$ sollen projectivisch heissen, wenn die Büschel $(U)A$ und $(V)B$, deren Mittelpunkte $U$ und $V$ beliebig auf $k^2$ liegen, projectivisch sind. Daraus folgt umgekehrt: Wenn $A$ und $B$ projectivische Punktreihen auf $k^2$ sind, und $U$ und $V$ zwei beliebige Punkte auf $k^2$ bezeichnen, so sind die Büschel $(U)A$ und $(V)B$ projectivisch. Lässt man $V$ auf $U$ fallen, so erhält man zwei concentrische projectivische Büschel $(U)A$ und $(U)B$. Wenn insbesondere die Strahlenpaare $UA$ und $UB$ ein Involutionssystem bilden, so sollen auch die Punktpaare $A$, $B$ involutorische heissen.

Mit dieser Bezeichnung lässt sich ein bekannter Satz in folgender Weise aussprechen: Die Strahlen eines beliebigen Strahlenbüschels schneiden einen Kegelschnitt in einem Systeme involutorischer Punktpaare. (Aehnliche Betrachtungen mit etwas anderm Ausgangspunkte sind der Abhandlung von *Göpel* „über Projectivität der Kegelschnitte als krummer Gebilde", Bd. 36 dieses Journals pag. 317 zu Grunde gelegt.)




Gegeben ein Kegelschnitt $k^2$, (in der Zeichnung ist der Bequemlichkeit wegen ein Kreis gewählt), auf demselben zwei Punkte $D$ und $E$, ausserdem beliebig in der Ebene zwei Punkte $F$ und $G$. Durch die vier Punkte $D, E, F, G$ ist ein Kegelschnittbüschel $\mathfrak{B}(h^2) = (D,E,F,G)$ bestimmt, und ein beliebiges Glied desselben $h^2$ schneidet den gegebenen $k^2$ ausser in $D$ und $E$ noch in zwei Punkten $H_1$ und $H_2$ (in der Figur nicht bezeichnet). Man denke $H_1 H_2$ gezogen; diese Gerade schneidet $FG$ in $J$. Man ziehe ferner die Geraden $DF$ und $EG$, die den gegebenen $k^2$ noch schneiden in $D_1$ und $E_1$. Fassen wir nun den Kegelschnitt $k^2$ nebst der Geraden $FG$ als Curve dritten Grades $c^3$ auf, so hat diese mit $h^2$ die drei Paar Schnittpunkte $DF$, $EG$ und $H_1 H_2$. Die Verbindungslinie jedes Paars ist gezogen. Jede schneidet die Curve $c^3$ zum dritten Mal, bezüglich in $D_1$, $E_1$, $J$; also müssen nach einem bekannten Satze $D_1$ $E_1$ $J$ in eine Gerade fallen. Da $D_1$ und $E_1$ sich nicht ändern, wenn $h^2$ sich ändert, so ist auch $J$ unveränderlich. Wir erkennen daraus:

*Jeder Kegelschnitt des Büschels $\mathfrak{B}(h^2)$ schneidet den gegebenen $k^2$ in einem Punktpaare $H_1 H_2$, durch welches ein Strahl des ebenen Strahlbüschels mit dem Mittelpunkt $J$ geht. (Die Punktpaare bilden also eine Involution auf dem Kegelschnitte $k^2$.) Und insbesondere:*

*In dem Büschel $\mathfrak{B}(h^2)$ sind zwei Glieder, für welche $H_1$ und $H_2$ zusammenfallen, welche also den Kegelschnitt $k^2$ berühren und zwar in den Punkten $K$, in welchen die beiden Tangenten von $J$ den gegebenen Kegelschnitt berühren, oder anders ausgedrückt, in welchen die Polare von $J$ in Bezug auf den Kegelschnitt $k^2$ diesen durchschneidet.*

Wenn nun von den vier Fundamentalpunkten des Büschels $\mathfrak{B}(k^2)=(DEFG)$ einer, nämlich $E$ sich auf $k^2$ bewegt, während die drei andern fest bleiben, so verändert sich $J$, also auch die Polare von $J$ und die Punkte $K$. Fällt insbesondere ein Punkt $K$ mit $E$ zusammen, so berührt in diesem Punkte ein Kegelschnitt dreipunktig, der ausserdem durch $D$, $F$ und $G$ geht. Wir untersuchen die Lage dieser Punkte.

Durchläuft $E$ auf $k^2$ eine Punktreihe, so durchläuft $E_1$ eine projectivische Punktreihe, denn die Punkte $E$ und $E_1$ bilden eine Involution, also sind die ebenen Strahlbüschel $(D)E$ und $(D_1)E_1$ projectivisch: der letztere Büschel ist aber perspectivisch mit der Punktreihe $J$, und während $J$ sich auf $FG$ bewegt, durchläuft die Polare von $J$ einen Strahlbüschel $(P)K$ (wo $P$ der Pol von $FG$ in Bezug auf $k^2$ ist), der projectivisch mit der Punktreihe $J$ ist; daraus folgt, dass die Büschel $(D)E$ und $(P)K$ projectivisch sind. Der Ort des Durchschnitts $X$ der Strahlen $DE$ und $PK$ ist somit ein Kegelschnitt $x^2$ (der in der Figur nicht gezeichnet ist). Dieser schneidet den gegebenen $k^2$ ausser in $D$ noch dreimal, in den Punkten $A$, $B$ und $C$; diese Punkte sind es, in denen $E$ und $K$ zusammenfallen, d. h. in den Punkten $A$, $B$, $C$ osculirt je ein Kegelschnitt, der ausserdem durch $D$, $F$ und $G$ geht.

Die Lage der Punkte $A$, $B$, $C$ lässt sich noch näher angeben. Der Kegelschnitt $k^2$ hat mit der Geraden $FG$ zwei Punkte gemein, $M$ und $N$. Rückt nun $E$ nach $M$, so rückt $E_1$ nach $N$, also auch $J$ nach $N$, und die Polare von $J$ wird die Tangente $PN$; also ist der Durchschnitt der Geraden $DM$ und $PN$ ein Punkt $X_1$ des Kegelschnitts $x^2$. Ebenso ist der Durchschnitt der Geraden $DN$ und $PM$ ein Punkt $X_2$ des Kegelschnitts $x^2$.

Nennt man nun $Q$ den Durchschnitt der Geraden $X_1X_2$ mit $DP$, so erkennt man, dass die Polare von $Q$ in Bezug auf $x^2$ die Gerade $FG$ ist; (denn das Viereck $DPX_1X_2$ ist dem $x^2$ eingeschrieben, $FG$ ist eine Diagonale, $Q$ der Durchschnitt der beiden andern) und wenn $O$ den Durchschnitt von $DP$ und $FG$ bezeichnet, sind die vier Punkte $D\ O\ P\ Q$ harmonisch.

Rückt ferner $E$ so, dass $E_1$ nach $D$ kommt, so rückt $J$ nach $F$, und die Polare von $J$ in Bezug auf $k^2$ wird identisch mit der Polare von $F$ $PF'$; also ist der Durchschnitt von $PF'$ und $GD$ ein Punkt $X_3$ von $x^2$.

Die Polare des Punktes $F'$ in Bezug auf $x^2$ geht nun durch $Q$, weil $F'$ auf $FG$ liegt, und zwar muss es eine solche Gerade durch $Q$ sein, welche die Sehne $X_3P$ in dem zu $F'$ harmonisch conjugirten Punkte schneidet. Dies ist aber die Gerade $GQ$; denn die vier Strahlen des Büschels $G$ nämlich $(G)X_3$,

$F'$, $P$, $Q$ sind harmonisch, weil sie perspectivisch liegen mit den harmonischen Punkten $D\ O\ P\ Q$.

Die Polare von $F'$ in Bezug auf $x^2$ ist also $GQ$. Wenn man endlich $E$ und $D'$ rücken lässt, erkennt man, dass die Polare von $G'$ (wenn $GMG'N$ ebenfalls harmonisch sind) in Bezug auf $x^2$ die Gerade $QF$ ist. Nun geht durch die vier Punkte $A\ B\ C\ D$ ein Büschel $\mathfrak{B}(l^2) = (A, B, C, D)$, zu dem auch die Kegelschnitte $k^2$ und $x^2$ gehören. Nach dem Vorangegangenen können wir für die Gerade $FG$ den Ort aller Pole $Y$ in Bezug auf die Glieder dieses Büschels bestimmen, der bekanntlich ein Kegelschnitt $y^2$ ist. Zunächst liegen in $y^2$ die Punkte $P$ und $Q$. Aber der Kegelschnitt $y^2$ ist zugleich der Ort des Durchschnitts der Polaren aller Punkte von $FG$ in Bezug auf irgend zwei Kegelschnitte des Büschels $\mathfrak{B}(l^2)$. Dadurch finden wir noch zwei Punkte. Die Polare von $F'$ in Bezug auf $k^2$ ist $FP$; in Bezug auf $x^2$ ist sie $GQ$, und somit liegt der Durchschnitt $R$ von $FP$ und $GQ$ auf $y^2$. Die Polare von $G'$ in Bezug auf $k^2$ ist $GP$, in Bezug auf $x^2$ ist sie $FQ$; also liegt auch der Durchschnitt $S$ von $GP$ und $FQ$ auf $y^2$. Diesem Kegelschnitt $y^2$ ist also eingeschrieben das Viereck $PQRS$. Daraus erkennt man, dass die Polare von $F$ in Bezug auf $y^2$ durch $G$ geht und umgekehrt. Also bilden die Punkte $F$, $G$ ein Punktpaar der Involution, welche der Kegelschnitt $y^2$ auf $FG$ hervorruft. Diese Involution ist identisch mit derjenigen der Punktpaare, durch welche die einzelnen Glieder des Büschels $\mathfrak{B}(l^2)$ gehen, also geht ein Kegelschnitt des Büschels $\mathfrak{B}(l^2)=(A,B,C,D)$ durch $F$ und $G$. Wir haben somit folgendes Resultat:

*Gegeben ist ein Kegelschnitt $k^2$; auf demselben ein Punkt $D$ und beliebig in der Ebene zwei Punkte $F$, $G$. Es giebt im Allgemeinen drei Kegelschnitte durch $F$ und $G$, die $k^2$ in $D$ schneiden und ausserdem dreipunktig osculiren in den Punkten $A$, $B$, $C$, und die sechs Punkte $A\ B\ C\ D\ F\ G$ liegen wieder in einem Kegelschnitt $y^2$.*

*Nimmt man nun als Punkte $F$ und $G$ die Durchschnittspunkte eines beliebigen Kreises mit der unendlich entfernten Geraden, und beachtet, dass alle durch diese Punkte gelegten Kegelschnitte Kreise sind, dass also die in $A$, $B$ oder $C$ osculirenden Kegelschnitte Krümmungskreise werden, so erhält man als speciellen Fall den anfangs ausgesprochenen Steinerschen Satz.*

## II.

Dieser Satz ist, wie *Steiner* a. a. O. angiebt, und wie schon aus dem obigen Beweise hervorgeht, gewissermassen als specieller Fall eines andern anzusehn.

In der That stützte sich unser Beweis auf eine Eigenschaft der Curven dritten Grades, und es liegt die Frage nahe, wie sich der Satz gestaltet, wenn man es nicht mit einer aufgelösten Curve, sondern mit einer irreductibeln Curve dritten Grades zu thun hat.

Wenn also auf einer beliebigen Curve dritten Grades $c^3$ drei Punkte $D$, $F$, $G$ gegeben sind, wieviel Kegelschnitte giebt es, die durch diese drei Punkte gehen und $c^3$ ausserdem in einem andern Punkte osculiren?

Diese Frage lässt sich mit Hülfe der bekannten Correlation beantworten, welche *Steiner* unter dem Namen projectivischer Drehung häufig anwendete. Sind nämlich in einer Ebene zwei Strahlenbüschel $P$ und $Q$ gegeben, so ist jeder beliebige Punkt $X$ der Ebene definirt durch die beiden Strahlen $(P)X$ und $(Q)X$, welche hindurch gehen. Es finden hierbei *nur* folgende Singularitäten statt.

1) Der Durchschnitt der Strahlen $(P)Q$ und $(Q)P$ ist unbestimmt, nämlich jeder Punkt der Geraden $PQ$ ist als solcher anzusehen.

2) Der Punkt $Q$ ist der Durchschnitt des Strahls $(P)Q$ und jedes beliebigen Strahls aus dem Büschel $Q$.

3) Der Punkt $P$ ist der Durchschnitt des Strahls $(Q)P$ und jedes beliebigen Strahls aus dem Büschel $P$.

Betrachtet man nun ein System von Punkten $X$ und die Strahlen $(P)X$ und $(Q)X$, und denkt sich jeden Strahl des Büschels $(P)X$ um einen constanten Winkel $\alpha$ in demselben Sinne gedreht und jeden Strahl $(Q)X$ um einen constanten Winkel $\beta$, so schneiden sich im Allgemeinen $PX$ und $QX$ in einem neuen Punkte $X'$. Es giebt aber ein Paar Strahlen $(P)R$ und $(Q)R$, die nach der Drehung zusammenfallen, und dem Punkte $R$ entspricht nach der Drehung jeder beliebige Punkt von $PQ$. Die Strahlen $P(Q)$ und $Q(P)$ schneiden sich nach der Drehung in einem Punkte $S'$; also jedem Punkte der Geraden $PQ$ entspricht nach der Drehung derselbe Punkt $S'$, und die Punkte $S'$ und $R$ liegen symmetrisch zu $PQ$.

Durchläuft der Punkt $X$ eine Curve $c$, so durchläuft $X'$ eine Curve $c'$, und es gelten hierbei folgende Gesetze:

Durchschneidet die Curve $c$ ein oder mehrere Mal $PQ$, so geht die Curve $c'$ ebenso oft durch $S'$, ferner

Soviel Schnittpunkte $c$ mit $PR$ hat, einen so vielfachen Punkt hat $c'$ in $Q$, und endlich

Soviel Schnittpunkte $c$ mit $QR$ hat, einen so vielfachen Punkt hat $c'$ in $P$.

Geht die Curve $c$ ein oder mehrere Male durch $R$, so ist die Gerade $PQ$, ebenso oft gedacht, ein singulärer Bestandtheil der Curve $c'$, und der übrige Bestandtheil der Curve $c'$ schneidet ebenso oft die Gerade $PQ$.

Geht die Curve $c$ ein oder mehrere Mal durch $P$, so ist die Gerade $QS'$, ebenso oft gedacht, singulärer Bestandtheil von $c'$, und der übrige Bestandtheil von $c'$ schneidet $QS'$ ebenso oft.

Geht die Curve $c$ ein oder mehrere Male durch $Q$, so ist $PS'$ ebenso oft gedacht singulärer Bestandtheil von $c'$, und der übrige Bestandtheil von $c'$ schneidet $PS'$ ebenso oft.

(Die singulären Bestandtheile von $c'$ enthalten nur diejenigen Punkte $X'$, deren entsprechende auf einer der Seiten des Dreiecks $PQR$ liegen, und man kann dieselben ausser Acht lassen. Dadurch erklärt sich das scheinbar Paradoxe in dem Folgenden.)

Jeder Geraden der $X$ Ebene entspricht ein Kegelschnitt der $x'$ Ebene, der durch $PQS$ geht.

Jeder Geraden der $X'$ Ebene entspricht ein Kegelschnitt der $x$ Ebene durch $PQR$.

Jeder Curve $n^{\text{ten}}$ Grades $(c)^n$ der $X$ Ebene entspricht eine Curve $2n^{\text{ten}}$ Grades $(c')^{2n}$ der $X'$ Ebene, die im Allgemeinen $P$, $Q$, $S$ zu $n$fachen Punkten hat. Hieraus lassen sich nun verschiedene singuläre Fälle ableiten, entsprechend der obigen Betrachtung, die sich unter sich mannigfach combiniren lassen. Für unsere Zwecke genügt folgende Combination:

Sind $P$, $Q$, $R$ einfache Punkte der Curve $(c)^n$, so ist die Curve $c'$ aufgelöst in die drei Seiten des Dreiecks $PQS'$ und eine Curve $(2n-3)^{\text{ten}}$ Grades, die für sich in $P$, $Q$, $S'$ $(n-2)$fache Punkte hat.

Denken wir also die Curve $c^3$ und durch die drei Punkte derselben $D$, $F$, $G$ einen Kegelschnitt $k^2$, der in $A$ osculirt. Wir betrachten $F$ und $G$ als Mittelpunkte zweier Strahlbüschel und beziehen auf diese beiden Büschel die Curven $c^3$ und $k^2$. Drehen wir nun die Büschel so, dass die Strahlen $FD$ und $GD$ sich decken, so geht nach dem vorigen $c^3$ über in das Dreieck $FGE$, dessen dritter Punkt $E$ symmetrisch zu $D$ liegt in Bezug auf $FG$, und in eine neue Curve $(c')^3$, auf die es allein ankommt, da auf ihr alle nicht singulären Punkte liegen. Andrerseits geht $k^2$ über in dasselbe Dreieck $FGE$ und eine Gerade $g'$. Der Punkt $A$ geht über in einen Punkt $A'$, und es muss die Gerade $g'$ in dem Punkte $A'$ die Curve $(c')^3$ osculiren, d. h. $A'$ ist Wendepunkt von $(c')^3$ und $g'$ die dazugehörige Wendetangente. Man kann auch umgekehrt nachweisen.

dass jeder Wendetangente der Curve $(c')^3$ ein Kegelschnitt durch $F$, $G$, $D$ entspricht, der $c^3$ ausserdem in einem Punkte $A$ osculirt.

Wenn nun die Curve $c^3$, wie dies im Allgemeinen auch nicht der Fall ist, keinen Doppelpunkt hat, so hat auch $(c')^3$ keinen solchen. Alsdann hat, wie bekannt, die Curve $c'$ neun Wendepunkte $A'$, drei reelle $3R'$ und sechs imaginäre $6J'$, von denen 12 mal je 3 in einer Geraden $l'$ liegen. Bei der Rückdrehung gehen die neun Wendepunkte in die verlangten Osculationspunkte $A$ ($3R$ und $6J$) über und jede Gerade $l'$ in einen Kegelschnitt $l^2$ durch $D$, $F$, $G$ und drei der Punkte $A$. Wir haben also den folgenden Satz:

*Gegeben eine Curve $c^3$ und auf derselben drei Punkte $F$, $G$, $D$. Es giebt im Allgemeinen neun Kegelschnitte $k^2$, drei reelle und sechs imaginäre, die durch die Punkte $F$, $G$, $D$ gehen und ausserdem $c^3$ in einem Punkte $A$ dreipunktig berühren. Von den neun Punkten $A$ liegen 12 mal je 3 mit $F$, $G$, $D$ in einem Kegelschnitte $l^2$; zum Beispiel die drei Osculationspunkte der drei reellen Kegelschnitte und die Punkte $F$, $G$, $D$ liegen in einem dieser Kegelschnitte.*

Anmerkung. Dieses ist der allgemeinere *Steiner*sche Satz. Man erkennt aber, dass es nicht ohne Weiteres gelingt, die Specialisirung so durchzuführen, dass der vorige Satz daraus hervorgeht; denn die aufgelöste Curve $c^3$ des vorigen Satzes hat zwei Doppelpunkte, und auf dem einen Bestandtheil derselben ist die Krümmung Null. Es bedarf also einer Untersuchung darüber, welche Punkte bei dieser aufgelösten Curve als Wendepunkte zu rechnen seien. Darum glaube ich, dass jene besondere Herleitung des ersten Satzes nicht überflüssig ist. Dies scheint auch *Steiner* angedeutet zu haben, indem er sagt, der erste Satz sei *gewissermassen* ein specieller Fall des zweiten. Einen eleganten Beweis des ersten *Steiner*schen Satzes, aus dem jedoch der Zusammenhang mit dem zweiten Satze nicht ersichtlich ist, hat *Joachimsthal* im 36sten Bande dieses Journals pag. 95 gegeben, und zugleich nachgewiesen, dass der Schwerpunkt von $A$, $B$, $C$ der Mittelpunkt der Ellipse ist.

Berlin, im August 1867.

---

# Geometrische Betrachtung der Normalen, welche sich von einem beliebigen Punkte auf eine algebraische Fläche fällen lassen.

(Von Herrn *F. August.*)

---

Im 49sten Bande dieses Journals giebt *Steiner* drei Methoden an, um die Anzahl der Normalen zu bestimmen, die sich im Allgemeinen von einem beliebigen Punkte aus auf eine Curve $n^{ten}$ Grades fällen lassen. Im Anschluss an die dritte Methode behandelt er dann das analoge Problem für die Normalen von einem beliebigen Punkte auf eine Oberfläche und erwähnt, dass dies auch nach der ersten Methode möglich sei, ohne indess Näheres hierüber anzugeben.

Diese erste Methode, die im Ganzen weniger Sätze der höheren Geometrie voraussetzt, ist hier auf die analoge Untersuchung bei der Fläche angewandt.

Die erste *Steiner*sche Methode ist kurz folgende: Gegeben in einer Ebene eine Curve $C^n$ und ein beliebiger Punkt $\pi$. Denkt man sich die $C^n$ fest mit $\pi$ verbunden und unendlich wenig um $\pi$ gedreht, und nennt man die Curve in der neuen Lage $C_1^n$, so können sich $C_1^n$ und $C^n$ nur in solchen Punkten $\xi$ schneiden, für die $\pi\xi$ Normale von $C^n$ ist, und umgekehrt.

*Es sind also die Schnittpunkte $\xi$ der Curven $C^n$ und $C_1^n$ die Fusspunkte aller Normalen von $\pi$ auf $C^n$. Ihre Anzahl ist $n^2$, und wenn $\frac{n(n+3)}{2}-1=\frac{n^2+3n-2}{2}$ derselben bekannt sind, so sind die übrigen $\frac{n^2-3n+2}{2}$ nach den bekannten Sätzen über den Durchschnitt algebraischer Curven zu finden.*

Der Beweis kann sehr leicht durch die Betrachtung des Durchschnitts der Tangenten in zwei entsprechenden Punkten der Curven $C^n$ und $C_1^n$ geführt werden. Diesen Satz benutzen wir bei der Betrachtung der Flächen folgendermassen.

## I.

Gegeben eine Fläche $n^{ten}$ Grades $f^n$ und ein willkürlicher Punkt $\pi$. Wieviel Normalen lassen sich von $\pi$ auf $f^n$ fällen? Wir denken durch $\pi$ eine

beliebige Gerade $A_1$ mit $f^n$ fest verbunden, die $f^n$ in den $n$ Punkten $\eta_1$ schneidet. Wir denken ferner $f^n$ um $A_1$ als Axe unendlich wenig gedreht in die Lage $f_1^n$, so schneiden sich $f^n$ und $f_1^n$ in einer Raumcurve $R_1^{n^2} = (f^n f_1^n)$, auf welcher auch die $n$ Punkte $\eta_1$ liegen. Legt man durch einen Punkt $\beta_1$ dieser Raumcurve eine Ebene $e_1$ normal gegen die Axe $A_1$, die dieselbe in $\alpha_1$ schneidet, so muss $\alpha_1\beta_1$ Normale in $\beta_1$ sein auf dem ebenen Schnitt $E_1^n = (f^n e_1)$ nach der obigen Betrachtung. Zieht man also in $\beta_1$ die Tangente $B_1$ an den ebenen Schnitt $E_1^n$ (die zugleich Tangente von $f^n$ ist), so steht diese Tangente $B_1$ senkrecht auf der Ebene $(A_1\beta_1)$; also bildet $B_1$ einen rechten Winkel mit $\pi\beta_1$.

Denkt man sich nun eine zweite Gerade $A_2$ durch $\pi$; dreht dann um diese als Axe $f^n$ unendlich wenig in die Lage $f_2^n$, so erhält man als Durchschnitt von $f^n$ und $f_2^n$ eine Raumcurve $R_2^{n^2} = (f^n f_2^n)$, auf welcher auch die $n$ Schnittpunkte $\eta_2 = (f^n A_2)$ liegen. Irgend ein Punkt derselben sei $\beta_2$, so ist das Loth $B_2$, in $\beta_2$ auf der Ebene $(A_2\beta_2)$ errichtet, eine Tangente an $f^n$ in $\beta_2$, die senkrecht steht auf $\pi\beta$.

Betrachten wir insbesondre einen Durchschnittspunkt $\xi = (R_1^{n^2} R_2^{n^2})$. Denken wir die Ebenen $(\xi A_1)$ und $(\xi A_2)$ und errichten in $\xi$ Lothe auf beiden: $T_1$ und $T_2$, so sind diese Geraden nach dem Vorigen Tangenten an $f^n$ in $\xi$, die beide senkrecht stehen auf $\pi\xi$. Wenn nun nicht $\xi$ in der Ebene $(A_1A_2)$ liegt, so können $T_1$ und $T_2$ nicht in eine Gerade zusammenfallen, und die Ebene $(T_1T_2)$ ist Tangentialebene in $\xi$ an $f^n$; $\pi\xi$ steht senkrecht darauf, d. h. $\pi\xi$ ist Normale von $f^n$ in $\xi$.

Liegt dagegen ein Punkt $\xi$ in $(A_1A_2)$, so fallen $T_1$ und $T_2$ zusammen, bestimmen also keine Ebene, und es kann $\pi\xi$ im Allgemeinen auch keine Normale sein, weil die Ebene $(A_1A_2)$ eine willkürliche Ebene durch $\pi$ ist, also im Allgemeinen keine Normalen durch $\pi$ enthält.

Es fragt sich nun, wieviel Punkte $\xi_0$ unter allen Punkten $\xi$ enthalten sind, die zugleich in $(A_1A_2)$ liegen. Ein Loth auf $(A_1A_2)$ in $\xi_0$ errichtet, muss offenbar Tangente an $f^n$ in $\xi_0$ sein, wie umgekehrt jeder Punkt des ebenen Schnitts $[(A_1A_2)f^n]$, durch den eine Tangente auf $f^n$ geht, die zugleich normal auf $(A_1A_2)$ steht, ein Punkt $\xi_0$ ist. Die Normalen auf der Ebene $(A_1A_2)$ sind die Geraden, die einen unendlich entfernten Punkt $\gamma$ gemein haben. Der Tangentenkegel (Cylinder) von $\gamma$ hat als Ort der Berührungspunkte eine Raumcurve vom Grade $n(n-1)$, nämlich den Durchschnitt von $f^n$ und der ersten Polare von $\gamma$ in Bezug auf $f^n$. Diese Curve schneidet die Ebene $(A_1A_2)$ in $n(n-1)$ Punkten, und dies sind nach dem Obigen die gesuchten Punkte $\xi_0$. Die An-

zahl $x$ aller Normalen von $\pi$ auf $f^n$, deren Fusspunkte wir $\xi_1$ nennen, ist die Differenz der Anzahl der Punkte $\xi$ und der der Punkte $\xi_0$.

Es giebt $n^3$ Punkte $\xi$, $n(n-1)$ Punkte $\xi_0$, also

$$x = n^3 - n(n-1) = n(n^2 - n + 1).$$

Das Resultat, das wir bisher erhalten haben, ist demnach:

*Von einem beliebigen Punkte $\pi$ lassen sich auf eine Fläche $f^n$ im Allgemeinen $n(n^2-n+1)$ Normale $\pi\xi_1$ fällen.*

## II.

Die gegenseitige Lage der Fusspunkte $\xi_1$ lässt sich noch näher feststellen.

Durch die sämmtlichen Punkte $\xi$ geht eine Schaar-Schaar von Flächen $n^{\text{ten}}$ Grades. Diese schneiden die Ebene $(A_1A_2)$ in einer Schaar-Schaar von Curven $C^n$, die durch $\xi_0$ gehn. Diese Schaar-Schaar ist durch drei Elemente bestimmt, z. B. durch die drei ebenen Schnitte von $(A_1A_2)$ mit den drei Flächen $f^n$, $f_1^n$, $f_2^n$, die wir bezeichnen durch $C^n$, $C_1^n$, $C_2^n$. Von dieser Schaar-Schaar geht eine einfache Schaar, ein Büschel, durch $\pi$; um diesen Büschel zu kennen, genügt es zwei beliebige Curven $C$ zu kennen, welche durch $\pi$ gehen. Wir wählen dazu 1) die Curve $C_3^n$ aus der Schaar $(C^n, C_1^n)$, d. h. $C_3^n = (C^n, C_1^n)\pi$. Da aber ausser $\pi$ die $n$ Punkte $\eta_1$ der Axe $A_1$ in dieser Curve liegen, so hat $A_1$ $(n+1)$ Punkte mit $C_3^n$ gemein, daher muss $C_3^n$ aufgelöst sein in die Gerade $A_1$ und eine Curve $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades durch die Punkte $\xi_0$. Wir wählen 2) $C_4^n = (C^nC_2^n)\pi$; $C_4^n$ ist aufgelöst in die Gerade $A_2$ und in eine Curve $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades. Diese beiden Curven $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades sind unter sich identisch, wie aus der Anzahl ihrer gemeinschaftlichen Punkte $\xi_0$ hervorgeht. (Sie bilden nämlich beide den Durchschnitt der Ebene $A_1A_2$ mit der oben betrachteten ersten Polare des Punktes $\gamma$ in Bezug auf $f^n$). Daraus folgt: Der Flächenbüschel $n^{\text{ten}}$ Grades durch die Punkte $\xi$ und $\pi$ hat zur Fundamentalcurve jene ebene Curve $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades und ausserdem eine Raumcurve vom Grade $n^2-n+1$, sie heisse $N^{n^2-n+1}$. Auf der ersten liegen die Punkte $\xi_0$; auf $N$ liegen die Fusspunkte $\xi_1$ der Normalen von $\pi$ auf $f^n$. Und da alle Sehnen einer Raumcurve $N^x$, die durch einen Punkt derselben gezogen sind, einen Kegel vom Grade $(x-1)$ erzeugen, so kann man auch sagen: die Normalen von einem beliebigen Punkte $\pi$ auf $f^n$ liegen auf einem Kegel vom Grade $n^2-n$. Wir haben also folgenden Satz:

***Durch einen beliebigen Punkt $\pi$ lassen sich auf eine Fläche $n^{\text{ten}}$ Grades $f^n$ im Allgemeinen $n(n^2-n+1)$ Normalen $\pi\xi_1$ fällen. Die Fusspunkte derselben $\xi_1$ liegen mit dem Punkte $\pi$ in einer Raumcurve vom Grade $(n^2-n+1)$, nämlich***

$N^{(n^2-n+1)}$; *die Normalen* $\pi\xi_1$ *liegen mithin alle auf einem Kegel vom Grade* $(n^2-n)$.

Dies lässt sich auch so aussprechen:

*Die Normalen einer Fläche* $n^{ten}$ *Grades* $f^n$ *bilden ein Strahlensystem von der Ordnung* $n(n^2-n+1)$ *und von der Klasse* $n(n-1)$.

(Dass in jeder Ebene $e$ $n(n-1)$ Normalen von $f^n$ liegen, folgt wie oben aus der Betrachtung der ersten Polare des Punktes $\gamma$ in Bezug auf $f^n$, wo $\gamma$ der gemeinschaftliche unendlich entfernte Punkt der Geraden ist, die senkrecht auf $e$ stehen. Die Normalen auf $f^n$ in den Durchschnittspunkten dieser Polare mit $f^n$ und $e$ sind die in $e$ liegenden.)

Im Besondern lassen sich auf eine Fläche zweiten Grades sechs Normalen $\pi\xi_1$ von jedem Punkte $\pi$ fällen, und die sieben Punkte $\pi$ und $\xi_1$ liegen in einer Raumcurve dritten Grades $N^3$; die sechs Normalen $\pi\xi_1$ liegen mithin auf einem Kegel zweiten Grades. Sämmtliche Normalen einer Fläche zweiten Grades bilden ein Strahlensystem sechster Ordnung und zweiter Klasse.

Auf eine Fläche dritten Grades lassen sich von einem beliebigen Punkte $\pi$ 21 Normalen $\pi\xi_1$ fällen; die 22 Punkte $\pi$ und $\xi_1$ liegen auf einer Raumcurve siebenten Grades $N^7$; die 21 Normalen $\pi\xi_1$ liegen mithin auf einem Kegel sechsten Grades. (Das letztere ist hier und bei höheren Graden ohne Interesse, da ein Kegel sechsten Grades erst durch 27 Generatrices bestimmt ist, also durch jene 21 nicht bestimmt wird.) Sämmtliche Normalen einer Fläche dritten Grades bilden ein Strahlensystem einundzwanzigster Ordnung und sechster Klasse u. s. f.

Berlin, im August 1867.

---

# Beweis des Fundamentalsatzes der Invariantentheorie.

(Von Herrn *E. B. Christoffel* in Zürich.)

---

In der fundamentalen Begründung der Invariantentheorie, durch welche Herr *Aronhold* dieses ganze Gebiet auf ein einziges, von jeder Willkürlichkeit befreites und der grössten Ausdehnung fähiges Princip zurückgeführt hat, wirft sich das Hauptgewicht auf die Frage, *wie gross für eine gegebene homogene Function in einem System von Grundformen die Anzahl derselben vorausgesetzt werden darf, wenn dasselbe nur voneinander unabhängige enthalten soll,* weil nur bei gesicherter Kenntniss dieser Fundamentalzahlen beurtheilt werden kann, ob gegebene Functionen $F$ und $F'$ durch lineare Substitutionen ineinander transformirt werden können, und durch wieviel Substitutionen dies erreicht werden kann.

Die Anzahl der voneinander unabhängigen Invarianten einer homogenen Function, mit welcher alle übrigen Fundamentalzahlen gegeben sind, ist bis jetzt auf zwei verschiedenen Wegen bestimmt worden, zuerst durch Abzählung der Transformationsbedingungen und der zu eliminirenden Substitutionscoefficienten, dann mittelst der partiellen Differentialgleichungen der Invariantentheorie. Bemerkenswerthe und den allgemeinen Fall bildende Abweichungen von den bei diesen Beweisen vorausgesetzten Verhältnissen, welche sich mir bei andern Untersuchungen darboten, haben mir gezeigt, dass beide Beweise unzureichend sind und übereinstimmend das voraussetzen, was sich bei genauerer Betrachtung als die Hauptfrage für den zu leistenden Beweis herausstellt.

Bezeichnet $(n, p)$ die Anzahl der Coefficienten einer homogenen Function $F$ vom $p^{\text{ten}}$ Grade und $n$ Variabeln, so ist $(n, p)$ auch die Anzahl der Bedingungen für die Transformation dieser Function in eine andere mittelst einer gegebenen linearen Substitution. Durch Elimination der $n.n$ Substitutionscoefficienten ergeben sich die Transformationsrelationen, also die absoluten Invarianten von $F$.

Nimmt man nun an, unter den ursprünglichen Transformationsbedingungen lasse sich eine Gruppe von $n.n$ Gleichungen auswählen, *welche in Bezug auf*

*die Substitutionscoefficienten voneinander unabhängig sind,* so wird die Anzahl der Transformationsrelationen, also der absoluten Invarianten

$$\omega = (n, p) - n^2.$$

Wenn aber eine solche Gruppe von $n.n$ Gleichungen nicht existiren sollte, so würde mit Rücksicht auf den Umstand, dass die ursprünglichen Transformationsbedingungen bei der von ihnen geforderten Wahl von $F'$ nie auf einen Widerspruch führen können, folgen, dass bei der Transformation von $F$ in eine mit möglichst viel willkürlichen Coefficienten versehene Function $F'$

1) nicht alle Substitutionscoefficienten bestimmte Werthe erlangen, sondern eine Anzahl $\mu$ derselben willkürlich bleibt, und in Folge dessen

2) die Anzahl der Transformationsrelationen um $\mu$ Einheiten grösser ist als die durch Abzählen gefundene normalmässige Anzahl $\omega = (n, p) - n^2$ derselben.

Es würden demnach auch die merkwürdigen Folgerungen wegfallen, oder einer durchgreifenden Modification bedürfen, welche sich in der Lehre von den zugehörigen Formen und den Covarianten an die Voraussetzung knüpfen, dass durch das Resultat der Transformation die anzuwendende Substitution völlig bestimmt sei.

Im 65sten Bande dieses Journals pag. 267 ist die Frage nach der Anzahl voneinander unabhängiger Invarianten von der Untersuchung des Systems partieller Differentialgleichungen

$$\dot{D}_{ik} \Pi = 0$$

abhängig gemacht worden, denen alle absoluten Invarianten und nur solche genügen, und gezeigt worden, dass jede Gleichung, welche sich aus diesen $n.n$ Gleichungen durch Differentiiren und Elimination der höhern Derivirten ergiebt, aus Gleichungen des Systems auch linear zusammengesetzt werden kann. Dieser Nachweis reicht jedoch zu der daraus gezogenen Folgerung nicht aus, indem die übrigen Sätze, auf welche diese sich stützt, eine Bedingung enthalten, welche in jedem besondern Falle als erfüllt nachgewiesen werden muss.

Wenn ein System linearer und in den Derivirten homogener Differentialgleichungen erster Ordnung, wie das obige, durch Differentiiren und Elimination der höhern Derivirten nur auf Combinationen der ursprünglichen Gleichungen führt, so nenne ich dasselbe ein *vollständiges,* und schliesse dabei absichtlich den Fall nicht aus, wo in dem System selbst auch noch Gleichungen enthalten sind, welche aus andern linear folgen; solche Gleichungen nenne ich *überzählige.*

*Befreit man ein vollständiges System von seinen überzähligen Gleichungen, so hört es nicht auf, ein vollständiges zu sein.*

Ein von allen überzähligen Gleichungen befreites vollständiges System hat stets soviel, und niemals mehr voneinander unabhängige Lösungen, als die Anzahl der Variabeln, vermindert um die Anzahl der Gleichungen beträgt.

*Ist daher in einem vollständigen System: $N$ die Anzahl der Variabeln, $M$ die Anzahl der Gleichungen überhaupt und $\mu$ die Anzahl der überzähligen, so ist die Anzahl seiner voneinander unabhängigen Lösungen $= N - M + \mu$.*

Wenn daher in obigem System von Differentialgleichungen die Anzahl der überzähligen $\mu$ ist, so folgt:

1) Die Anzahl der voneinander unabhängigen absoluten Invarianten von $F$, d. i. die Anzahl der Transformationsrelationen ist $(n,p)-n^2+\mu = \omega+\mu$, also um $\mu$ Einheiten grösser als die durch Abzählen gefundene normalmässige;

2) bei der Transformation von $F$ in $F'$ können daher $n^2-\mu$ Coefficienten von $F'$ willkürlich angenommen werden, und dann schon sind die übrigen bestimmt;

3) bei dieser Transformation bleiben $\mu$ Substitutionscoefficienten willkürlich.

Aus diesen Erörterungen in Verbindung mit den Vorangehenden ergiebt sich zur Genüge nicht blos die Nothwendigkeit einer genauen Bestimmung der Zahl $\mu$, sondern auch, dass hier der Schwerpunkt aller Zahlenbestimmungen der Invariantentheorie liegt. Auf der andern Seite ist es klar, dass eine besondere Untersuchung über die Zahl $\mu$ nur in dem Falle überflüssig sein würde, wo die Grundformen entweder unmittelbar aus den ursprünglichen Transformationsbedingungen, oder durch directe Integration der partiellen Differentialgleichungen abgeleitet werden, weil nur in einem dieser Fälle die genaue Anzahl der Transformationsrelationen sich von selbst ergiebt.

Die Zahl $\mu$ kann durch die Lösung der Aufgabe gefunden werden, $n.n$ Coefficienten $\lambda$ so zu bestimmen, dass für jede beliebige Function $\Pi$

$$\sum_{ik} \lambda_{ik} D_{ik} \Pi$$

Null wird, indem $\mu$ die Anzahl derjenigen $\lambda$ ist, welche hierbei willkürlich bleiben. Vermöge der Willkürlichkeit von $\Pi$ ergeben sich hieraus $(n,p)$ Gleichungen, welche man erhält, indem man nacheinander $\Pi$ durch die verschiedenen Coefficienten von $F$ ersetzt.

Wäre man im Stande, unter diesen $(n,p)$ Gleichungen irgend eine

Gruppe von $n.n$ Gleichungen zu ermitteln, von denen sich beweisen lässt, dass ihre Determinante von Null verschieden ist, so würde jedes $\lambda = 0$ folgen, also auf dem directesten Wege bewiesen sein, dass $\mu = 0$ ist.

Bei einer allgemeinen Begründung der Invariantentheorie hindert aber nichts, die auf vorstehende Art definirte Zahl $\mu$ vorläufig in der Theorie mitzuführen, bis sich bequeme Hülfsmittel zu ihrer allgemeinen Bestimmung darbieten, und diese finden sich, wie die folgenden Betrachtungen zeigen, für die homogenen Functionen in der Lehre von den zugehörigen Formen, welche den Beweis des Satzes, ***dass für $p > 2$ stets $\mu = 0$ ist,*** ohne Schwierigkeit gestattet.

## 1.

Wir setzen also voraus, dass die Bestimmung der Coefficienten $\lambda$ auf $\mu$ voneinander unabhängige Lösungen

$$\lambda_{ik}^1, \quad \lambda_{ik}^2, \quad \ldots \quad \lambda_{ik}^\mu$$

führt, aus denen sich jede andere nach der Formel

$$\lambda_{ik} = \sum_\varrho c_\varrho \lambda_{ik}^\varrho$$

zusammensetzt. Diese besondern Lösungen $\lambda_{ik}^\varrho$ unterwerfen wir mit Rücksicht auf unsere spätern Untersuchungen der offenbar zulässigen Bedingung, dass sie ausser Coefficienten von $F$ kein anderes willkürliches Element enthalten sollen.

Bei dieser Voraussetzung schliesst man aus der oben nachgewiesenen Anzahl absoluter Invarianten in bekannter Weise, dass die Anzahl voneinander unabhängiger Invarianten überhaupt

$$\eta = (n, p) - n^2 + \mu + 1$$

ist. Dieser Schluss erleidet nur dann eine Ausnahme, wenn gar keine absolute Invariante existirt, also für $p > 2$ nur, wenn $n = 2$, $p = 3$ ist. Für diesen Fall hat Herr *Aronhold* durch Integration der Differentialgleichungen gezeigt, dass eine einzige Invariante, also keine absolute existirt, weshalb in diesem Falle $\mu = 0$ ist.

## 2.

Sei, mit den zugehörigen Polynomialcoefficienten $(\alpha_1 \alpha_2 \ldots)$ geschrieben,

$$F = S(\alpha_1 \alpha_2 \ldots) a_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots.$$

Um zugehörige Formen mit den Variabeln $u_1$, $u_2$, ... zu finden, erhebt man die lineare Function $U = u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots$ in die $p^{\text{te}}$ Potenz, und sucht In-

varianten der homogenen Function $F+tU^p$, wo $t$ einen constanten Parameter bedeutet. Ist also $\Pi(a_{\alpha_1\alpha_2}\ldots)$ eine Invariante von $F$, und von den $u$ unabhängig, so wird bekanntermassen

$$\Pi' = \Pi(a_{\alpha_1\alpha_2\ldots}+t\,u_1^{\alpha_1}u_2^{\alpha_2}\ldots)$$

im weitern Sinne eine zugehörige Form, vorausgesetzt, dass $\Pi'$ nicht von den Variabeln $u$, oder bei willkürlichen $u$ nicht vom Parameter $t$ unabhängig ist.

Nun erkennt man durch Differentiiren sofort dass, welche Function der Coefficienten von $F$ allein $\Pi$ immer bedeuten mag, die aus ihr abgeleitete $\Pi'$ nur dann bei beliebigen Werthen der $u$ von $t$ unabhängig sein kann, wenn $\Pi$ selbst von allen $a$ unabhängig ist.

*Also liefert jede wirkliche Invariante $\Pi$ von $F$ auch eine wirkliche zugehörige Form $\Pi'$.*

Die Anzahl der in Bezug auf die $n$ Variabeln $u$ voneinander unabhängigen zugehörigen Formen kann niemals grösser als $n$ sein. Um die Frage zu entscheiden, wann diese Zahl erreicht wird, betrachten wir vorläufig den Fall, wo $F$ mindestens $n$ von einander unabhängige Invarianten $\Pi_s(a_{\alpha_1\alpha_2\ldots})$ hat, $s=1,2,\ldots n$. Dann sind die Functionen $\Pi_s' = \Pi_s(a_{\alpha_1\alpha_2\ldots}+tu_1^{\alpha_1}u_2^{\alpha_2}\ldots)$ nach dem Vorangehenden wirkliche zugehörige Formen. Wären diese in Bezug auf die Variabeln $u$ nicht unabhängig voneinander, so könnte man eine Function $f$ so wählen, dass $f(\Pi_1', \Pi_2', \ldots \Pi_n')$ von den $u$ unabhängig, also $f(\Pi_1, \Pi_2, \ldots \Pi_n)$ würde. Dann aber wäre dieser letztere Ausdruck nach dem Frühern von allen Coefficienten der Function $F$ unabhängig, und $\Pi_1$, $\Pi_2$, ... $\Pi_n$ wären keine von einander unabhängige Invarianten.

***Aus $n$ voneinander unabhängigen Invarianten erhält man also auch $n$ zugehörige Formen, welche in Bezug auf die Variabeln $u$ voneinander unabhängig sind.***

Dies festgestellt, lässt sich leicht zeigen, dass für $p>2$ selbst unter der Voraussetzung, $\mu$ sei nicht Null, die zugehörigen Formen in der normalmässigen Anzahl $n$ vorhanden sein würden, d. h. dass unter den angegebenen Bedingungen die Anzahl der Invarianten $\eta \gtreqq n$ ist.

Wenn nämlich $\mu$ von Null verschieden ist, so tritt der ungünstigste Fall für die Erfüllung der Ungleichheit

$$(n,p)-n^2+\mu+1 \gtreqq n$$

ein für $\mu=1$, was

$$(n,p) \gtreqq (n-1)(n+2)$$

giebt. Da ferner die linke Seite, sobald $n>1$ ist, wegen der Gleichung

$(n, p+1) = (n, p)\left[1+\frac{n-1}{p+1}\right]$ mit $p$ zugleich wächst, so tritt unter der Voraussetzung, dass $p > 2$ sei, der ungünstigste Fall ein für $p = 3$, was

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6} \gtreqless (n-1)(n+2)$$

giebt. Durch Beseitigung positiver Factoren kann man dieser Bedingung die Form

$$(n-2)(n-3) \gtreqless 0$$

geben, und dies ist für jedes ganzzahlige $n$ der Fall.

### 3.

Durch Division mit einer Invariante kann man stets bewirken, dass eine zugehörige Form beim Uebergange zu den transformirten Coefficienten und Variabeln ganz ungeändert bleibt. Solche zugehörige Formen sind durch das Gleichungssystem

$$D_{ik}\Psi + \frac{\partial \Psi}{\partial u_i} u_k = 0$$

bestimmt.

Man überzeugt sich leicht, dass auch diese Gleichungen ein vollständiges System bilden. Ist daher $\mu_1$ die Anzahl der überzähligen Gleichungen dieses Systems, so ist die Anzahl seiner voneinander unabhängigen Lösungen:

$$n + (n, p) - n^2 + \mu_1.$$

Verwendet man aber zu einem vollständigen System voneinander unabhängiger Lösungen der vorstehenden Gleichungen möglichst viel, also $(n, p) - n^2 + \mu$ absolute Invarianten, so bilden die zur Vervollständigung des Systems erforderlichen Lösungen ein System von zugehörigen Formen, welche in Bezug auf die Variabeln $u$ voneinander unabhängig sind, und aus denen sich mit Hinzuziehung von Invarianten jede andere zugehörige Form zusammensetzen lässt.

Die Anzahl der in Bezug auf die Variabeln $u$ voneinander unabhängigen zugehörigen Formen ist demnach:

$$n + \mu_1 - \mu.$$

Wäre nun, immer unter der Voraussetzung $p > 2$ der Fall möglich, dass $\mu$ von Null verschieden ist, so würde aus dem Schlusse des vorigen art.

$$\mu_1 = \mu$$

folgen. Lässt sich beweisen, dass hierin ein Widerspruch enthalten ist, so ist bewiesen, dass $\mu$ nicht von Null verschieden sein kann.

Der Voraussetzung gemäss ist $\mu_1$ die Anzahl derjenigen $\lambda$, welche willkürlich bleiben, wenn man aus dem Ausdrucke

$$\sum_{ik} \lambda_{ik} D_{ik} \Psi + \sum_{ik} \lambda_{ik} \frac{\partial \Psi}{\partial u_i} u_k$$

alle Derivirten von $\Psi$ eliminirt. Da das erste Glied nur Derivirten nach Coefficienten von $F$ enthält, so muss es für sich verschwinden, also $\lambda_{ik}$ die in art. 1. angegebene Form

$$\lambda_{ik} = \sum_{\varrho} c_{\varrho} \lambda_{ik}^{\varrho}$$

haben, wo die Grössen $\lambda_{ik}^{\varrho}$ von allen willkürlichen Elementen, namentlich den $u$ völlig frei sind. Die $\mu$ Coefficienten $c$ müssen jetzt so gewählt werden, dass auch das zweite Glied identisch verschwindet. Man erhält also die $n$ Bedingungsgleichungen

$$\sum_{\varrho} c_{\varrho} \sum_{k} u_k \lambda_{ik}^{\varrho} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

zwischen den $\mu$ Grössen $c$, und es wird jetzt $\mu_1$ die Anzahl derjenigen $c$, welche hierbei willkürlich bleiben.

Nimmt man aber an, $\mu$ sei von Null verschieden, so muss $\mu_1 = \mu$ sein, also jedes $c$ willkürlich bleiben. Dies ist nicht anders möglich, als wenn für jedes $i$ und $\varrho$

$$\sum_{k} u_k \lambda_{ik}^{\varrho} = 0$$

ist, und zwar für alle Werthe der unabhängigen Variabeln $u_1, u_2, \ldots u_n$.

Da aber die Coefficienten $\lambda_{ik}^{\varrho}$ von den $u$ völlig unabhängig sind, so müssen sie alle Null sein, was mit der Annahme, $\mu$ sei von Null verschieden, im Widerspruche steht. Folglich ist, für $p > 2$, diese Annahme selbst unzulässig.

Wenn aber $\mu = 0$ ist, so ist umsomehr $\mu_1 = 0$, da $n - \mu_1 - \mu$ nicht grösser als $n$, also $\mu_1$ nicht grösser als $\mu$ sein kann. Da dies offenbar auch für die Differentialgleichungen der Covarianten gilt, haben wir also den zu beweisenden Satz:

*Die Anzahl der voneinander unabhängigen Invarianten sowie aller übrigen Grundformen ist für jede homogene Function, deren Grad grösser als 2 ist, die normalmässige.*

Zürich, 19. December 1867.

# Theorie der bilinearen Functionen.

(Von Herrn *E. B. Christoffel* in Zürich.)

---

Die in meiner vorangehenden Arbeit für die homogenen Functionen bewiesenen Lehrsätze lassen sich mit Leichtigkeit auf den Fall ausdehnen, wo die zu transformirende Function $F$ in Bezug auf $p$ Systeme von je $n$ Variabeln linear und homogen ist, und überdies auf jedes Variabelnsystem dieselbe lineare Substitution angewandt wird.

Setzt man nämlich in $F$ alle diejenigen Variabeln einander gleich, für welche dieselbe Substitution gilt, so geht $F$ in eine homogene Function $\Phi$ von der $p^{\text{ten}}$ Ordnung und $n$ Dimensionen über, welche, sobald $p > 2$ ist, die normalmässige Anzahl $n$ voneinander unabhängiger zugehöriger Formen besitzt. Diese zugehörigen Formen von $\Phi$ sind aber auch zugehörige Formen von $F$ und nur insofern specialisirt, als sie die Coefficienten von $F$ nur in denjenigen Verbindungen enthalten, zu denen diese sich beim Uebergange von der $p$-fach linearen Function $F$ zur homogenen Function $\Phi$ vereinigt haben.

Da hiernach $F$ ebenfalls die normalmässige Anzahl $n$ voneinander unabhängiger zugehöriger Formen besitzt, so ist bei der Transformation von $F$ durch das Resultat derselben die anzuwendende Substitution insofern völlig bestimmt, als sie keine willkürlichen Constanten enthalten kann. Folglich sind auch die übrigen Grundformen in der normalmässigen Anzahl vorhanden, und die Anzahl der voneinander unabhängigen Invarianten ist z. B. $= n^p - n^2 + 1$.

Für den Fall $p = 2$ verlieren diese Sätze ebenso, wie bei den homogenen Functionen ihre Gültigkeit, nur dass die Erscheinungen, welche diese Ausnahmefälle darbieten, und welche über die hier erwähnten Transformationsprobleme hinaus zur allgemeinen Regel werden, bei den bilinearen Functionen vollständiger hervortreten, als bei den homogenen Functionen zweiter Ordnung.

Die Frage nach den Grundformen einer bilinearen Function

$$F = S(gh)x_g y_h; \qquad (g, h = 1, 2, \ldots n)$$

erledigt sich am einfachsten durch die wirkliche Darstellung derselben. Wir werden in art. I. für die Function $F$ im Ganzen $\left[\frac{n}{2}\right]$ absolute Invarianten *),

---

*) Unter $\left[\frac{n}{2}\right]$ wird im Folgenden stets die grösste in $\frac{n}{2}$ enthaltene ganze Zahl verstanden.

$\left[\frac{n+1}{2}\right]$ zugehörige Formen und ebensoviel Covarianten darstellen. Aus ihrer Beziehung zum Transformationsprobleme wird dann zunächst der Nachweis geführt, dass diese Formensysteme vollständig sind. Dass sie auch von überzähligen Formen frei sind, also nur voneinander unabhängige enthalten, ergiebt sich dann durch folgende Ueberlegung.

Die wirkliche Anzahl $I$ der voneinander unabhängigen absoluten Invarianten ist unter allen Umständen gleich der normalmässigen, vermehrt um die Anzahl $\mu$ von Substitutionscoefficienten, welche bei einer zulässigen Transformation von $F$ willkürlich bleiben; für die bilinearen Functionen ist also $I=\mu$. Die stets zulässige Transformation von $F$ in sich selbst (art. II) zeigt aber, dass allgemein $\mu=\left[\frac{n}{2}\right]$, also gleich ist der in art. I. gefundenen Anzahl von absoluten Invarianten. Folglich ist dieses Formensystem nicht nur vollständig, sondern auch frei von überzähligen Formen. Daraus ergiebt sich dann nach dem in meiner vorigen Arbeit benutzten Princip, dass die aus diesem Invariantensysteme hervorgegangenen zugehörigen Formen und Covarianten, soweit sich solche wirklich ergeben konnten, ebenfalls voneinander unabhängig sein müssen.

Dies festgestellt, ergiebt sich mittelst des von Herrn *Aronhold* gelehrten Verfahrens für die absoluten Invarianten $\Pi$ von $F$ sehr leicht das System von $nn$ Differentialgleichungen

$$(A.)\qquad D_{ik}\Pi = 0,$$

wo

$$D_{ik}\Pi = \sum_h\left[\frac{\partial\Pi}{\partial(ih)}(kh)+\frac{\partial\Pi}{\partial(hi)}(hk)\right]$$

ist, und welchem alle absoluten Invarianten und nur solche genügen.

Dieses System ist ein vollständiges. Bezeichnet man nämlich, was bei allen Untersuchungen dieser Art grosse Vortheile gewährt und im Folgenden beibehalten wird, durch das Zeichen

$$\binom{i}{k}$$

die Null oder Eins, jenachdem $k$ von $i$ verschieden oder ihm gleich ist, so findet für jede Function der Coefficienten von $F$ die identische Gleichung

$$(B.)\qquad D_{gh}D_{ik}\Pi - D_{ik}D_{gh}\Pi = \binom{g}{k}D_{ih}\Pi - \binom{h}{i}D_{gk}\Pi$$

statt, welche Herr *Clebsch* bereits im 65sten Bande dieses Journals pag. 268 für die homogenen Functionen, wenn auch in verschiedene Fälle zerlegt, aufgestellt hat; dieselbe hat ganz allgemeine Gültigkeit. Sie zeigt, dass jede

Gleichung, welche aus dem System ($A$.) durch Differentiiren und Elimination der höhern Derivirten hervorgeht, auch aus Gleichungen des Systems linear zusammengesetzt werden kann.

Da aber im System ($A$.) die Anzahl der Variabeln mit der Anzahl der Gleichungen übereinstimmt, so ist die Anzahl $\mu$ der überzähligen Gleichungen dieses Systems gleich der Anzahl seiner Lösungen, also

$$\mu = \left[\frac{n}{2}\right],$$

während es für $p > 2$ stets Null ist.

Für *die zugehörigen Formen* $\Psi$ und *die Covarianten* $\Phi$ ergeben sich, wenn jede durch eine geeignete Invariante dividirt wird, die Gleichungssysteme

$$(C.) \qquad D_{ik}\Psi + \frac{\partial \Psi}{\partial u_i} u_k = 0, \qquad D_{ik}\Phi - x_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} = 0,$$

deren Vollständigkeit man leicht beweist. Dieselben sind ausserdem von überzähligen Gleichungen frei. In der That ist die Anzahl der Lösungen des ersten Systems, nämlich der absoluten Invarianten und zugehörigen Formen zusammengenommen, $= \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n+1}{2}\right] = n$, also die normalmässige; dasselbe gilt vom andern System.

Für *die Zwischenformen* $\Theta$ erhält man, wenn jede durch eine geeignete Invariante dividirt wird, das Gleichungssystem

$$D_{ik}\Theta + \frac{\partial \Theta}{\partial u_i} u_k - x_i \frac{\partial \Theta}{\partial x_k} = 0.$$

Dasselbe ist ein vollständiges, und, wie aus dem für die Systeme ($C$.) geführten Beweise hervorgeht, von überzähligen Gleichungen frei: die Anzahl seiner voneinander unabhängigen Lösungen ist daher $2n$.

Verwendet man aber zu einer vollständigen Lösung dieses Systems möglichst viel absolute Invarianten, zugehörige Formen und Covarianten, so bleiben $2n - \left[\frac{n}{2}\right] - 2 . \left[\frac{n+1}{2}\right] = \left[\frac{n}{2}\right]$ eigentliche Zwischenformen übrig, welche

1) mit den zugehörigen Formen ein System von $n$ in Bezug auf die Variabeln $u$,
2) mit den Covarianten ein System von $n$ in Bezug auf die Variabeln $x$,
3) mit beiden und den absoluten Invarianten ein System von $2n$ in Bezug auf die Coefficienten von $F$ voneinander unabhängigen Functionen bilden.

Diese $\left[\frac{n}{2}\right]$ Zwischenformen bilden also eine selbstständige Gattung von Ausdrücken, indem sie sich aus den übrigen Grundformen nicht zusammen-

setzen lassen, und begründen insofern einen der wesentlichsten Unterschiede zwischen den bilinearen und den Functionen von höhern Ordnungen. In der That besteht auch für jede dieser letztern ein System von $2n$ Zwischenformen, welche in Bezug auf die Variabeln $x$ und $u$ voneinander unabhängig sind. Verwendet man aber zu einem solchen System vollständige Systeme von zugehörigen Formen und Covarianten, so bleibt keine Zwischenform mehr übrig, woraus hervorgeht, dass in diesem Falle jede Zwischenform aus zugehörigen Formen und Covarianten zusammengesetzt werden kann, vorausgesetzt, dass diese sämmtlichen Formen durch Division mit einer Invariante in der mehrfach erwähnten Weise modificirt worden sind, wozu man stets mit ein und derselben, nicht absoluten Invariante und ihren Potenzen ausreicht.

Der Grund von dieser und jeder andern Abweichung der bilinearen Functionen vom Verhalten der Functionen höherer Ordnungen liegt darin, dass für die letztern die oben durch $\mu$ bezeichnete Zahl stets Null ist, und es geht hieraus hervor, dass neben der Herstellung der Grundformen sich bei den bilinearen Functionen noch folgende beiden, bei der hier vorausgesetzten Gattung von Transformationsproblemen für sie allein existirenden Aufgaben darbieten:

1) Die Transformation einer bilinearen Function in sich selbst und der Nachweis der willkürlichen Elemente in der hieraus entspringenden Substitution;

2) der directe Nachweis derjenigen $\left[\frac{n}{2}\right]$ Gleichungen, welche im System ($A$.) überzählig sind.

Wegen der Hülfsmittel, welche bei der Herstellung der Grundformen benutzt werden, und der Anwendung der zugehörigen Formen zur Bestimmung der Substitution verweise ich auf die fundamentale Abhandlung des Herrn *Aronhold* im 62sten Bande dieses Journals.

### I. Die Grundformen der bilinearen Function $F$.

Man verificirt leicht, dass die Determinante

$$P = \Sigma \pm (11)(22)\dots(nn)$$

dem Gleichungssystem

$$D_{ik} P = 2\binom{i}{k} P$$

Genüge leistet; also ist $P$ Invariante von $F$, und wenn $r$ die stets von Null verschiedene Substitutionsdeterminante bedeutet, die Transformirte von $P$

$$P' = r^2 P.$$

Dies festgestellt, sei $\mathfrak{F}$ die aus $F$ durch Vertauschung der Variabelnsysteme hervorgehende bilineare Function,

$$\mathfrak{F} = S(gh)y_g x_h = S(hg)x_g y_h.$$

Da bei beiden Variabelnsystemen *dieselbe* Substitution vorausgesetzt wird, so hat $\mathfrak{F}$ dieselben Invarianten wie $F$, und alle simultanen Invarianten von $F$ und $\mathfrak{F}$ sind zugleich Invarianten von $F$. Dasselbe gilt demnach auch von den Invarianten der Function $\lambda F + \mu\mathfrak{F}$, solange $\lambda$, $\mu$ constante Werthe haben.

Setzt man daher den Coefficienten von $x_g y_h$ in dieser Function, nämlich

$$\lambda(gh) + \mu(hg) = [gh],$$

so folgt, dass auch

$$\Sigma \pm [11][22]\dots[nn] = \Pi(\lambda, \mu)$$

eine *Invariante* von $F$ ist, und zwar für alle constanten Werthe von $\lambda$ und $\mu$.

Für die Anwendungen *der zugehörigen Formen* ist es nöthig, die einfachen Voraussetzungen der Einleitung zu verlassen, und statt der Variabeln $u$ allein zwei Variabelnsysteme einzuführen. Wir suchen demnach simultane Invarianten von $\lambda F + \mu\mathfrak{F}$ mit dem Producte zweier linearen Functionen $U = \Sigma u_g x_g$, $U' = \Sigma u'_h y_h$, also der bilinearen Function

$$U_1 = S u_g u'_h x_g y_h.$$

Aus dem Vorangehenden ergiebt sich die Invariante

$$\begin{vmatrix} [11] + \alpha u_1 u'_1 & [12] + \alpha u_1 u'_2 & \dots \\ [21] + \alpha u_2 u'_1 & [22] + \alpha u_2 u'_2 & \dots \\ \vdots & & \end{vmatrix},$$

welche für $\alpha = 0$ in $\Pi(\lambda, \mu)$ übergeht. Dieselbe ist in Bezug auf $\alpha$ linear und bleibt ungeändert, wenn man $\lambda$ mit $\mu$ und zugleich das System der Variabeln $u$ mit dem der $u'$ vertauscht. Setzt man sie $= \Pi(\lambda, \mu) + \alpha\,\Psi(\lambda, \mu; \overline{u}, \overline{u'})$, so hat auch $\Psi$ die zuletzt erwähnte Eigenschaft, und es wird, wenn durch

$$\Pi_{gh}(\lambda, \mu)$$

die aus einer Aenderung des Elementes $[gh]$ entspringende Unterdeterminante von $\Pi(\lambda, \mu)$ bezeichnet wird, die gesuchte zugehörige Form

$$\Psi(\lambda, \mu; \overline{u}, \overline{u'}) = S\,\Pi_{gh}(\lambda, \mu) u_g u'_h,$$

also eine bilineare Function der Variabelnsysteme $u$, $u'$. In Determinantenform wird

$$\Psi(\lambda, \mu; \overline{u}, \overline{u'}) = \begin{vmatrix} 0 & u'_1 & u'_2 & \dots & u'_n \\ -u_1 & [11] & [12] & \dots & [1n] \\ -u_2 & [21] & [22] & \dots & [2n] \\ \vdots & & & & \vdots \\ -u_n & [n1] & [n2] & \dots & [nn] \end{vmatrix}.$$

Um *bilineare Covarianten* zu erhalten, setzen wir

$$\frac{\partial F}{\partial y_h} = X_h, \quad \frac{\partial F}{\partial x_g} = Y_g,$$

und suchen simultane Invarianten von $\lambda F + \mu \mathfrak{F}$ mit dem Producte der linearen Functionen $\Sigma X_h y_g$, $\Sigma Y_g x_h$, indem wir die Coefficienten $X$, $Y$ wie Constanten behandeln. Das Vorangehende zeigt, dass die hieraus fliessenden Covarianten erhalten werden, wenn man in $\Psi$ jedes $u$, $u'$ durch das entsprechende $Y$, $X$ ersetzt; also ergiebt sich die Covariante

$$\Phi(\lambda, \mu; \overline{x}, \overline{y}) = \Psi(\lambda, \mu; \overline{Y}, \overline{X})$$

Was die Beziehung zwischen diesen und ihren Transformirten betrifft, so folgt aus der Grundeigenschaft von $P$, aus welchem die Vorstehenden als Entwicklungscoefficienten entspringen,

$$\Pi' = r^2 \Pi, \quad \Psi' = r^2 \Psi, \quad \Phi' = r^2 \Phi.$$

Wir werden nun zunächst zeigen, dass diese Gleichungen für die Möglichkeit der Transformation von $F$ in $F'$ und die Bestimmung der dies leistenden Substitutionen nicht bloss erforderlich sind, sondern auch hinreichen, sobald sie für alle Werthe von $\lambda$ und $\mu$ erfüllt sind, d. h. dass die vermöge der Willkürlichkeit von $\lambda$ und $\mu$ aus $\Pi$, $\Psi$, $\Phi$ hervorgehenden Formen hinreichen, um aus ihnen jede andere Form derselben Art zusammenzusetzen.

In der That wird für $\lambda = 1$, $\mu = 0$ identisch $\Phi = \Pi(1, 0) F$, also $\Phi' = \Pi'(1, 0) F'$ und $\Pi'(1, 0) F' = r^2 \Pi(1, 0) F$, endlich, weil $\Pi'(1, 0) = r^2 \Pi(1, 0)$ ist, $F' = F$, w. z. b. w.

Dass in der Gleichung $P' \Pi = P \Pi'$ alle für die Möglichkeit der Transformation von $F$ in $F'$ erforderlichen Bedingungen enthalten sind, hat zuerst Herr *Kronecker* in seiner Abhandlung über die bilinearen Functionen von gerader Dimension $n$ *) durch directe Transformation derselben in eine Normalform bewiesen.

Um die Anzahl der Formen zu übersehen, welche in obigen Ausdrücken wegen der Willkürlichkeit von $\lambda$ und $\mu$ enthalten sind, setzen wir

$$\frac{(ik) + (ki)}{2} = \sigma_{ik}, \quad \frac{(ik) - (ki)}{2} = \delta_{ik},$$

woraus allgemein

$$(ik) = \sigma_{ik} + \delta_{ik}, \quad \sigma_{ki} = \sigma_{ik}, \quad \delta_{ki} = -\delta_{ik}$$

folgt. Wird alsdann noch

$$\lambda + \mu = s, \quad \lambda - \mu = t,$$

*) Monatsberichte der Berliner Akademie, Sitzung v. 15. October 1866 pag. 601 u. f.

also

$$[ik] = s\sigma_{ik} + t\delta_{ik}$$

gesetzt, so wird

$$\Psi = \begin{vmatrix} 0 & u_1' & u_2' & \dots \\ -u_1 & s\sigma_{11} & s\sigma_{12}+t\delta_{12} & \dots \\ -u_2 & s\sigma_{12}-t\delta_{12} & s\sigma_{22} & \dots \\ \vdots & & & \end{vmatrix},$$

woraus $\Pi$ durch Weglassung des aus den $u$ und $u'$ gebildeten Randes erhalten wird.

Vertauscht man nun $\lambda$ mit $\mu$, und jedes $u$ mit dem entsprechenden $u'$, so wechselt $t$ sein Zeichen, $s$, $\Pi$ und $\Psi$ bleiben ungeändert. Da nun $\Pi$ von den Variabeln $u$, $u'$ unabhängig ist, so hat seine Entwicklung die Form

$$\Pi = s^n \Pi_0 + s^{n-2} t^2 \Pi_2 + s^{n-4} t^4 \Pi_4 + \dots,$$

während, wenn entwickelt

$$\Psi = s^{n-1} \Psi_1 + s^{n-2} t \Psi_2 + s^{n-3} t^2 \Psi_3 + \dots$$

ist, die Entwicklungscoefficienten $\Psi_\sigma$ bilineare Functionen der Variabeln $u$, $u'$ sind, welche bei der Vertauschung der beiden Variabelnsysteme entweder ungeändert bleiben, oder nur ihr Zeichen wechseln, ersteres bei ungeradem, letzteres bei geradem $\sigma$.

Setzt man daher, um den in der Einleitung vorausgesetzten Fall zu erhalten, jedes $u'$ dem entsprechenden $u$ gleich, so fallen alle $\Psi_\sigma$ mit geradem Index weg, und es ergeben sich nun $\left[\frac{n+2}{2}\right]$ Invarianten, $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ zugehörige Formen mit einem einzigen Variabelnsystem, also ebensoviel Covarianten derselben Art, aus denen alle Formen gleicher Gattung zusammengesetzt werden können. Dass sie auch voneinander unabhängig sind, lässt sich aus der Einrichtung der Elemente von $\Psi$ erkennen, wird sich aber auch im folgenden art. ergeben.

Von den besondern Fällen, welche sich hier darbieten, und welche alle auf bekannte Determinantensätze hinauskommen, heben wir einen des Folgenden wegen hervor. Für ein ungerades $n$ wird nämlich $\Psi_n$, wie man aus dem Ausdrucke für $\Psi$ erkennt, wenn man $s=0$, $t=1$ setzt, das Product aus einer linearen Function der $u$ und der nämlichen Function mit den Variabeln $u'$. Folglich kann die bilineare zugehörige Form $\Psi_n$ durch eine in den $u$ lineare ersetzt werden, welche wir durch $\psi(u)$ bezeichnen werden, so dass $\Psi_n = \psi(u)\psi(u')$ wird.

II. Transformation der bilinearen Function $F$ in sich selbst.

Sei

$$x_i = \sum_k \alpha_{ki}\xi_k, \qquad y_i = \sum_k \alpha_{ki}\eta_k$$

die Substitution, durch welche $F$ in

$$F' = S(gh)'\xi_g\eta_h$$

übergeführt wird, und

$$v_k = \sum_i \alpha_{ki} u_i$$

die in den zugehörigen Formen auszuführende transponirte Substitution, welche für beide Variabelnsysteme der $u$ und $u'$ gilt.

Soll nun allgemein

$$(gh)' = (gh)$$

sein, also durch die vorausgesetzte Substitution $F$ in sich selbst mit andern Variabeln transformirt werden, so folgt aus der Gleichung $\Pi' = r^2\Pi$, dass

$$r^2 = 1$$

sein muss.

Der bessern Uebersicht wegen setzen wir von hier an

$$\lambda + \mu = s = 1, \qquad \lambda - \mu = t,$$

wodurch die Grundformen $\Pi(\lambda, \mu)$, $\Psi(\lambda, \mu; \bar{u}, \bar{u}')$, $\Phi(\lambda, \mu; \bar{x}, \bar{y})$ in Functionen von $t$ übergehen, welche wir durch $\Pi(t)$, $\Psi(t; \bar{u}, \bar{u}')$, $\Phi(t; \bar{x}, \bar{y})$ bezeichnen, und von denen die erste eine gerade Function von $t$ ist.

Beim obigen Werthe von $r^2$ ergiebt sich für die zugehörigen Formen die Gleichung

$$(1.) \qquad \Psi(t; \bar{v}, \bar{v}') = \Psi(t; \bar{u}, \bar{u}')$$

oder

$$\sum_{gh} \Pi_{gh}(t) v_g v'_h = \sum_{gh} \Pi_{gh}(t) u_g u'_h,$$

welche für jedes $t$ erfüllt sein muss.

Wir beweisen zunächst, dass aus dieser Gleichung stets $r^2 = 1$ folgt. Vergleicht man nämlich beiderseits die Coefficienten von $u_i u'_k$, so folgt

$$\sum_{gh} \Pi_{gh}(t)\alpha_{gi}\alpha_{hk} = \Pi_{ik}(t),$$

und wenn man mittelst dieses Ausdrucks die von Null verschiedene Determinante $\Sigma \pm \Pi_{11}\Pi_{22}\ldots\Pi_{nn}$ bildet, $r^2 = 1$, wie erforderlich ist.

Dies festgestellt, ist es nothwendig, die beiden Fälle zu unterscheiden, wo $n$ gerade oder ungerade ist.

Im ersten Falle, $n=2m$, ist der Grad von $\Psi$ in Bezug auf $t$ um zwei Einheiten kleiner, als der Grad von $\Pi$. Schliesst man nun den Fall aus, wo nicht alle Coefficienten von $F$ willkürliche und voneinander unabhängige Werthe haben, so hat die Gleichung $\Pi(t)=0$ $m$ Lösungen $t^2=\omega_1^2$, $t^2=\omega_2^2$, ... $t^2=\omega_m^2$, die alle voneinander verschieden sind.

Dividirt man jetzt die Gleichung (1.) durch $\Pi(t)$, so ergeben sich aus ihr durch Zerlegung in Partialbrüche zwei Systeme von je $m$ Gleichungen, welche den Wurzelfactoren $t-\omega_s$, $t+\omega_s$ entsprechen, und die Gleichung (1.) völlig ersetzen. Der erste Wurzelfactor liefert die Gleichung

$$\sum_{gh}\Pi_{gh}(\omega_s)v_g v'_h = \sum_{gh}\Pi_{gh}(\omega_s)u_g u'_h;$$

beachtet man, dass $\Pi_{gh}(-\omega_s)=-\Pi_{hg}(\omega_s)$ ist, so ergiebt sich aus dem andern Wurzelfactor die Gleichung

$$\sum_{gh}\Pi_{hg}(\omega_s)v_g v'_h = \sum_{gh}\Pi_{hg}(\omega_s)u_g u'_h.$$

Multiplicirt man mit $\Pi_{kk}(\omega_s)$, wo $k$ einen beliebigen Index bedeutet, so zerfallen die vorstehenden Ausdrücke in Linearfactoren

$$(2.)\quad \sum_g\Pi_{gk}(\omega_s)v_g.\sum_h\Pi_{kh}(\omega_s)v'_h = \sum_g\Pi_{gk}(\omega_s)u_g.\sum_h\Pi_{kh}(\omega_s)u'_h,$$

$$(3.)\quad \sum_g\Pi_{kg}(\omega_s)v_g.\sum_h\Pi_{hk}(\omega_s)v'_h = \sum_g\Pi_{kg}(\omega_s)u_g.\sum_h\Pi_{hk}(\omega_s)u'_h.$$

Da jedes $v_g$ lineare Function der $u$ allein, und jedes $v'_g$ dieselbe Function der $u'$ allein ist, so folgt aus (2.)

$$\sum_g\Pi_{gk}(\omega_s)v_g = a_s\sum_g\Pi_{gk}(\omega_s)u_g,$$

$$\sum_h\Pi_{kh}(\omega_s)v'_h = \frac{1}{a_s}\sum_h\Pi_{kh}(\omega_s)u'_h,$$

wo alle $a$ willkürliche Constanten und offenbar von $k$ unabhängig sind.

Vertauscht man hier die Variabeln $u$ und $u'$, so vertauschen sich auch die $v$ und $v'$, und es folgt, dass die Gleichungen (3.) von selbst befriedigt sind.

Also haben wir zur Bestimmung der gesuchten Substitutionen, durch welche bei geradem $n=2m$ die Function $F$ in sich selbst transformirt wird, die $2m$ Gleichungen

$$\sum_g\Pi_{gk}(\omega_s)(v_g-a_s u_g) = 0,$$

$$\sum_g\Pi_{kg}(\omega_s)(u_g-a_s v_g) = 0,$$

in denen der Index $k$ gleichgültig ist, und durch jeden andern ersetzt werden kann.

Zur Bestimmung der inversen Substitution erhält man ähnliche Gleichungen. Da die Determinante dieser Gleichungen, wie man durch Bildung derselben leicht findet, von Null verschieden ist, so sind die Unbekannten $v$ als lineare Functionen der $u$ mit den $m=\left[\frac{n}{2}\right]$ willkürlichen Constanten $a$ bestimmt.

Für ein ungerades $n=2m+1$ sind $\Psi$ und $\Pi$ vom nämlichen Grade in $t$. Folglich liefert die Partialbruchzerfällung in diesem Falle 1) ein System von $2m$ Gleichungen der nämlichen Form wie das vorstehende, und 2) nach der Bezeichnung am Schlusse des vorigen art. noch die Bedingung $\Psi_n(\overline{v},\overline{v'})=\Psi_n(\overline{u},\overline{u'})$, welche durch die einfachere $\psi(\overline{v})=r.\psi(\overline{u})$ ersetzt werden kann, und daher keine willkürliche Constante in die gesuchte Substitution einführt. Folglich ist in dieser die Anzahl der willkürlichen Elemente wieder $m=\left[\frac{n}{2}\right]$.

Die Anzahl der willkürlichen Substitutionselemente stimmt daher in allen Fällen mit der Anzahl von absoluten Invarianten überein, die sich im vorigen art. ergeben haben, und es ist hiernach dieses Invariantensystem nicht bloss vollständig, sondern auch frei von überzähligen Formen. Dasselbe gilt daher auch, wie schon bemerkt wurde, von den übrigen Formensystemen.

### III. Transformation von $F$ in specielle Formen.

Für die Transformation von $F$ in irgend eine gegebene Form $F'$ haben wir demnach die nothwendigen und ausreichenden Bedingungen

$$\Pi'(\lambda,\mu) = r^2\Pi(\lambda,\mu),$$
$$\Psi'(\lambda,\mu;\overline{v},\overline{v'}) = r^2\Psi(\lambda,\mu;\overline{u},\overline{u'}),$$
$$\Phi'(\lambda,\mu;\overline{\xi},\overline{\eta}) = r^2\Phi(\lambda,\mu;\overline{x},\overline{y}),$$

von denen die erste die sämmtlichen Bedingungen für die Möglichkeit der Transformation enthält, die zweite die directe und die dritte die inverse Substitution liefert.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, die Substitution so zu bestimmen, dass $F'$ in eine Summe von $m$ bilinearen Functionen

$$f_1'=S(gh)'\xi_g\eta_h,\quad (g,h=1,2,\dots n_1)$$
$$f_2'=S(gh)'\xi_g\eta_h,\quad (g,h=n_1+1,n_1+2,\dots n_2)$$
$$\dots\dots\quad\dots\dots\dots$$
$$f_m'=S(gh)'\xi_g\eta_h,\quad (g,h=n_{m-1}+1,n_{m-1}+2,\dots n)$$

zerfällt, welche so gewählt sind, dass ein Variabelnpaar $\xi_s$, $\eta_s$, welches in eine von diesen speciellen Functionen eingeht, in keiner von den übrigen mehr vorkommt.

Auf dieselbe Weise, wie in art. I. $\Pi(\lambda,\mu)$ aus $F$, $\Psi(\lambda,\mu,\bar{u},\bar{u}')$ und $\Phi(\lambda,\mu,\bar{x},\bar{y})$ aus $\Pi(\lambda,\mu)$ abgeleitet wurde, leite man aus jeder der vorstehenden, einer geringern Anzahl von Variabelnpaaren entsprechenden Functionen eine Invariante, zugehörige Form und Covariante ab, welche für die Function $f'_s$ durch $\pi_s(\lambda,\mu)$, $\psi_s(\lambda,\mu,\bar{v},\bar{v}')$, $\varphi_s(\lambda,\mu,\bar{\xi},\bar{\eta})$ bezeichnet werden sollen.

Dann wird offenbar für die Function

$$F' = f'_1+f'_2+\cdots+f'_m$$

die Invariante

$$\Pi'(\lambda,\mu) = \pi_1(\lambda,\mu)\pi_2(\lambda,\mu)\dots\pi_m(\lambda,\mu),$$

während die Herleitung von $\Psi$ und $\Phi$ aus $\Pi$ sofort erkennen lässt, dass

$$\frac{\Psi'(\lambda,\mu;\bar{v},\bar{v}')}{\Pi'(\lambda,\mu)} = \sum_s \frac{\psi_s(\lambda,\mu;\bar{v},\bar{v}')}{\pi_s(\lambda,\mu)},$$

$$\frac{\Phi'(\lambda,\mu;\bar{\xi},\bar{\eta})}{\Pi'(\lambda,\mu)} = \sum_s \frac{\varphi_s(\lambda,\mu;\bar{\xi},\bar{\eta})}{\pi_s(\lambda,\mu)}$$

ist.

Setzt man diese Ausdrücke den der ursprünglichen Function $F$ entsprechenden gleich, und zerfällt beiderseits in Partialbrüche, so zerfallen die hier auftretenden besondern Werthe der Functionen $\psi_s$, $\varphi_s$, $\Psi$, $\Phi$ nach dem vorigen art. in Linearfactoren, und es muss nun jeder solche Linearfactor der einen Seite einem durch die Bedingung eines gleichen Nenners und entsprechender Variabeln völlig bestimmten Linearfactor auf der andern Seite proportional gesetzt werden.

Wir verfolgen dies nicht weiter, und ziehen aus dem Vorangehenden nur noch die folgende Bestimmung über die zulässigen Dimensionen der einzelnen Functionen $f'_s$.

Setzt man wieder $\lambda-\mu = s = 1$, $\lambda-\mu = t$, so werden beide Seiten der für die Möglichkeit der Transformation nothwendigen und ausreichenden Bedingungsgleichung

$$r^2\Pi(\lambda,\mu) = \pi_1(\lambda,\mu)\pi_2(\lambda,\mu)\dots\pi_m(\lambda,\mu)$$

ganze Functionen von $t^2$, und die linke Seite sowie die aufeinanderfolgenden Factoren der rechten in Bezug auf $t^2$ vom Grade $\left[\frac{n}{2}\right]$, $\left[\frac{n_1}{2}\right]$, $\left[\frac{n_2-n_1}{2}\right]$, ... $\left[\frac{n-n_{m-1}}{2}\right]$. Damit diese Gleichung bei willkürlichem $t$ durch geeignete Wahl

der Functionen $f'_\varkappa$ befriedigt werden könne, ist es also erforderlich, dass beide Seiten in Bezug auf $t$ vom nämlichen Grade sind, also

$$\left[\frac{n_1}{2}\right]+\left[\frac{n_2-n_1}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{n-n_{m-1}}{2}\right] = \left[\frac{n}{2}\right]$$

ist. Bezeichnet aber $\alpha$ die Anzahl derjenigen Functionen $f'_\lambda$, welche von ungerader Dimension sind, so ist die linke Seite offenbar

$$\frac{n-\alpha}{2},$$

und daraus folgt, *dass unter den Functionen $f'_1, f'_2, \ldots f'_m$ sich für ein gerades $n$ keine, für ein ungerades $n$ nur eine einzige von ungerader Dimension befinden darf.* Ist diese Bedingung erfüllt, so ist die verlangte Transformation von $F$ stets möglich.

Nimmt man daher, um die grösste Vereinfachung zu erhalten, die Dimensionen sämmtlicher Functionen $f'_\varkappa$ so klein wie möglich, so zerfällt $F'$ für ein gerades $n$ in eine Summe von $\left[\frac{n}{2}\right]$ binären Functionen, wozu für ein ungerades $n$ noch ein eingliedriger Ausdruck kommt. Der erste von diesen Fällen liefert die von Herrn *Kronecker* in der oben erwähnten Abhandlung zuerst eingeführte Normalform.

### IV. Die Zwischenformen und die überzähligen Differentialgleichungen der absoluten Invarianten.

Um eine grössere Anzahl von Zwischenformen zu erhalten, aus denen sich dann die vorzugsweise charakteristischen zusammensetzen lassen, suchen wir mit Ausscheidung von früher bestimmten Formen simultane Invarianten von

$$\lambda F+\mu\mathfrak{F} = S[gh]\,x_g y_h$$

mit den linearen Functionen

$$U=\Sigma u_g x_g,\qquad V=\Sigma X_g y_g,\qquad W=\Sigma \mathfrak{X}_g y_g,$$

indem wir schliesslich

$$X_g=\frac{\partial F}{\partial y_g},\qquad \mathfrak{X}_g=\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y_g}$$

setzen, wodurch $V$ und $W$ in $F$ und $\mathfrak{F}$ übergehen. Vermehrt man also in $\Pi(\lambda,\mu)$ jedes Element $[gh]$ um

$$\omega_{gh} = \alpha u_g X_h+\beta u_g \mathfrak{X}_h+\gamma u_h \mathfrak{X}_g+\delta u_h X_g,$$

entwickelt dann nach Potenzen von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, so ergiebt sich

$$\Pi(\lambda,\mu)+\alpha\Theta_1+\beta\Theta_2+\gamma\Theta_3+\delta\Theta_4+\cdots,$$

wo die Entwicklungscoefficienten der linearen Glieder, welche wir allein berücksichtigen, die Ausdrücke

$$\begin{aligned}
\Theta_1 &= S\Pi_{gh}.u_g X_h,\\
\Theta_2 &= S\Pi_{gh}.u_g \mathfrak{X}_h,\\
\Theta_3 &= S\Pi_{gh}.u_h \mathfrak{X}_g,\\
\Theta_4 &= S\Pi_{gh}.u_h X_g
\end{aligned}$$

haben, und eigentliche Zwischenformen sind. Zwischen diesen vier Formen bestehen einfache Beziehungen.

Zunächst bemerkt man leicht, dass durch Vertauschung von $\lambda$ mit $\mu$ $\Theta_1$ mit $\Theta_4$, $\Theta_2$ mit $\Theta_3$ vertauscht wird. Sodann ergiebt sich

$$\begin{aligned}
\lambda\Theta_1+\mu\Theta_2 &= \Pi.U,\\
\lambda\Theta_3+\mu\Theta_4 &= \Pi.U.
\end{aligned}$$

Setzt man daher

$$\lambda\Theta_1+\mu\Theta_4 = \Pi U+\Theta,$$

so wird

$$\lambda\Theta_3+\mu\Theta_2 = \Pi U-\Theta,$$

und $\Theta$ eine neue Zwischenform, welche auf doppelte Weise dargestellt werden kann

$$\Theta = \lambda(\Theta_1-\Theta_3) = \mu(\Theta_4-\Theta_2),$$

also durch $\lambda\mu$ theilbar ist, und überdies durch Vertauschung von $\lambda$ mit $\mu$ nicht geändert wird.

Hieran knüpfen sich nun merkwürdige Resultate. Ersetzt man allgemein $x_i u_k$ durch

$$D_{ik}F = x_i\frac{\partial F}{\partial x_k}+y_i\frac{\partial F}{\partial y_k},$$

(vergl. die Einleitung), und bezeichnet das, was hierdurch aus $\Theta_i$ wird, durch $\Theta_i(F)$, so folgt, weil $U$ in $2F$ übergeht,

$$\begin{aligned}
\lambda\Theta_1(F)+\mu\Theta_4(F) &= 2\Pi F+\Theta(F),\\
\lambda\Theta_3(F)+\mu\Theta_2(F) &= 2\Pi F-\Theta(F).
\end{aligned}$$

Nun ist in $\lambda\Theta_1+\mu\Theta_4$ der Factor von $\Pi_{gh}$ gleich

$$\lambda u_g X_h+\mu u_h X_g = \sum_i \lambda(ih)x_i u_g+\mu(ig)x_i u_h;$$

derselbe geht durch die angegebene Substitution über in

$$\sum_i \lambda(ih)D_{ig}F+\mu(ig)D_{ih}F.$$

In diesem Ausdrucke findet sich der Factor von $x_i y_k$ ohne Schwierigkeit $=(ih)[gk]+(ig)[kh]$; also ist in $\lambda\Theta_1(F)+\mu\Theta_4(F)$ der Factor von $x_i y_k$ gleich

$$\underset{g,h}{S}\, \Pi_{gh}((ih)[gk]+(ig)[kh]) = 2\Pi.(ik),$$

mithin

$$\lambda\Theta_1(F)+\mu\Theta_4(F) = 2\Pi F,$$

$$\Theta(F) = 0,$$

$$\lambda\Theta_3(F)+\mu\Theta_2(F) = 2\Pi F.$$

Die zweite von diesen Gleichungen liefert den Satz:

*Ist die obige Zwischenform:*

$$\Theta = \Sigma\lambda_{ik} x_i u_k,$$

*so ist identisch*

$$\Sigma\lambda_{ik} D_{ik} F = 0,$$

*also auch für jede beliebige Function P der Coefficienten von F*

$$\Sigma\lambda_{ik} D_{ik} P = 0.$$

Diese Gleichung enthält die vollständige Lösung der Aufgabe, die überzähligen Differentialgleichungen der absoluten Invarianten zu bestimmen. Da nämlich

$$\Theta_1-\Theta_3 = S(\Pi_{kh} X_h - \Pi_{hk}\mathfrak{X}_h) u_k,$$

und $\Theta=\lambda(\Theta_1-\Theta_3)$ ist, so folgt

$$\lambda_{ik} = \lambda \sum_h ((ih)\Pi_{kh}-(hi)\Pi_{hk}).$$

Einen andern Ausdruck erhält man aus der Gleichung $\Theta=\mu(\Theta_4-\Theta_2)$, nämlich

$$\lambda_{ik} = \mu \sum_h ((ih)\Pi_{hk}-(hi)\Pi_{kh}).$$

Die halbe Summe beider ergiebt endlich die symmetrische Darstellung

$$\lambda_{ik} = \tfrac{1}{2}\sum_h \left((ih)\frac{\partial\Pi}{\partial(kh)}-(hi)\frac{\partial\Pi}{\partial(hk)}\right).$$

Setzt man nun

$$\Pi = \Pi_0\lambda^n+\Pi_1\lambda^{n-1}\mu+\Pi_2\lambda^{n-2}\mu^2+\cdots+\Pi_n\mu^n,$$

so fallen aus $\lambda_{ik}$ die mit $\lambda^n$ und $\mu^n$ multiplicirten Glieder fort, wie man leicht verificirt, und auch aus dem Umstande schliesst, dass $\Theta$, mithin auch $\lambda_{ik}$ durch $\lambda\mu$ theilbar ist, so dass in der Entwicklung von $\lambda_{ik}$ nur $(n-1)$ Glieder übrig bleiben. Da aber allgemein $\Pi_{n-s}=\Pi_s$ ist, so erhält man nur $\frac{n-1}{2}$ verschiedene Glieder, wenn $(n-1)$ gerade, und nur $\frac{n}{2}$ Glieder, wenn $(n-1)$ ungerade ist, also allgemein $\left[\frac{n}{2}\right]$ verschiedene Lösungen der Aufgabe, die

$n.n$ Coefficienten $\lambda_{ik}$ so zu bestimmen, dass

$$\Sigma \lambda_{ik} D_{ik} P$$

für jede beliebige Function $P$ verschwindet.

Dadurch sind ebensoviel Gleichungen des Systems

$$D_{ik} P = 0$$

als lineare Folge der übrigen nachgewiesen, was direct bestätigt werden sollte.

### V. Eigenschaften der $\lambda_{ik}$.

Durch das Schlussresultat des vorigen art. erlangen die Coefficienten der speciellen Zwischenform $\Theta$ ein selbstständiges Interesse, weshalb wir zum Nachweise ihrer Eigenschaften übergehen.

Da $\Theta(\overline{x}, \overline{u})$ Entwicklungsglied einer Zwischenform $\Pi$ ist, welche der Gleichung $\Pi' = r^2 \Pi$ genügt, so ist unter Voraussetzung der in art. II. angegebenen Substitution

$$\Theta'(\overline{\xi}, \overline{v}) = r^2 \Theta(\overline{x}, \overline{u}),$$

und es genügt hiernach $\Theta$ dem System partieller Differentialgleichungen

$$D_{ik}\, \Theta + \frac{\partial \Theta}{\partial u_i} u_k - x_i \frac{\partial \Theta}{\partial x_k} = 2\binom{i}{k} \Theta;$$

dasselbe gilt von jeder der vier Zwischenformen, aus denen $\Theta$ zusammengesetzt wurde.

Sei nun $\lambda'_{ik}$ das, was aus $\lambda_{ik}$ wird, wenn jeder Coefficient von $F$ durch den entsprechenden Coefficienten der transformirten $F'$ ersetzt wird, also $\Theta'(\overline{x}, \overline{u}) = \Sigma \lambda'_{ik} x_i u_k$; dann folgt aus der ersten Gleichung

$$\Sigma \lambda'_{ik} \xi_i v_k = r^2 \Sigma \lambda_{gh} x_g u_h.$$

Nimmt man beiderseits die Derivirte nach $\xi_i$ und $v_k$, so folgt, weil $\frac{\partial x_g}{\partial \xi_i} = \alpha_{ig}$, $\frac{\partial u_h}{\partial v_k} = \frac{\partial \log r}{\partial \alpha_{kh}}$ ist,

$$\lambda'_{ik} = r^2 \sum_{g,h} \alpha_{ig} \frac{\partial \log r}{\partial \alpha_{kh}} \lambda_{gh}.$$

Setzt man sodann den Ausdruck von $\Theta$ in die Differentialgleichungen ein, so folgt

$$D_{ik} \lambda_{gh} = 2\binom{i}{k} \lambda_{gh} - \binom{h}{k} \lambda_{gi} + \binom{g}{i} \lambda_{kh}.$$

Ist daher $P$ irgend eine Function der $\lambda$, also auch der Coefficienten von $F$, so folgt

$$D_{ik} P = 2\binom{i}{k} \sum_{g,h} \frac{\partial P}{\partial \lambda_{gh}} \lambda_{gh} + \sum_h \left( \frac{\partial P}{\partial \lambda_{ih}} \lambda_{kh} - \lambda_{hi} \frac{\partial P}{\partial \lambda_{hk}} \right).$$

Wenn daher $P$ homogen ist und dem Gleichungssystem

$$\sum_h \left( \frac{\partial P}{\partial \lambda_{ih}} \lambda_{kh} - \lambda_{hi} \frac{\partial P}{\partial \lambda_{hk}} \right) = 0$$

genügt, so ist es eine Invariante von $F$. Die Bedeutung dieses Resultates wird sich aus dem Folgenden ergeben.

### VI. Ueber die den Zwischenformen eigenthümliche Substitution.

Nach dem Vorangehenden ist $\Theta(\bar{x}, \bar{u})$ eine bilineare Function, deren Transformation sich von der früher betrachteten dadurch unterscheidet, dass die auf die beiden Variabelnsysteme anzuwendenden Substitutionen nicht übereinstimmen, sondern zueinander transponirt sein sollen. Sei allgemein

$$G = S l_{gh} x_g u_h$$

eine solche Function, welche durch die beiden Substitutionen

$$x_i = \sum_k \alpha_{ki} \xi_k, \qquad v_k = \sum_i \alpha_{ki} u_i$$

in

$$G' = S l'_{gh} \xi_g v_h$$

übergeführt wird.

Vermöge der Gleichung $G' = G$ folgt aus der Lehre von den Zwischenformen, weil

$$D_{ik} G' = \sum_h \frac{\partial G'}{\partial \alpha_{ih}} \alpha_{kh}$$

ist,

$$\sum_h \frac{\partial G'}{\partial \alpha_{ih}} \alpha_{kh} = \xi_i \frac{\partial G'}{\partial \xi_k} - \frac{\partial G'}{\partial v_i} v_k.$$

Dies festgestellt, sei $\Pi$ eine Function der Coefficienten von $G$; dann ist

$$\begin{aligned}
\sum_h \frac{\partial \Pi'}{\partial \alpha_{ih}} \alpha_{kh} &= \underset{a,b}{S} \frac{\partial \Pi'}{\partial l'_{ab}} \left[ \sum_h \frac{\partial G'}{\partial \alpha_{ih}} \alpha_{kh} \right]_{\xi_a v_b} \\
&= S \frac{\partial \Pi'}{\partial l'_{ab}} \left[ \xi_i \frac{\partial G'}{\partial \xi_k} - \frac{\partial G'}{\partial v_i} v_k \right]_{\xi_a v_b} \\
&= \sum_h \left( \frac{\partial \Pi'}{\partial l'_{ih}} l'_{kh} - l'_{hi} \frac{\partial \Pi'}{\partial l'_{hk}} \right).
\end{aligned}$$

Wenn daher die rechte Seite dieser Gleichung für jedes $i$ und $k$ verschwindet, so ist $\Pi$ absolute Invariante von $G$, und umgekehrt.

Die absoluten Invarianten von $G$, unter Voraussetzung obiger Transformation, sind also durch das Gleichungssystem

$$(A.) \qquad \delta_{ik} \Pi = \sum_h \left( \frac{\partial \Pi}{\partial l_{ih}} l_{kh} - l_{hi} \frac{\partial \Pi}{\partial l_{hk}} \right) = 0$$

definirt, und es lässt sich nun zunächst leicht zeigen, dass $G$ bei obiger Transformation auch *nur* absolute Invarianten besitzt.

Um dies zu beweisen, setze man die rationale Function $H$ gleich dem Quotienten aus zwei von gemeinsamen veränderlichen Factoren befreiten ganzen Functionen. Dann erhält man nach bekannten Schlüssen für diese ein System von Differentialgleichungen

$$\delta_{ik} P = \varrho_{ik} P,$$

wo die Factoren $\varrho$ sämmtlich constant sind. Wir werden nun zeigen, dass dieselben alle Null sein müssen, woraus dann der vorstehende Satz folgt.

Aus der Definitionsgleichung

$$\delta_{ik} G = x_i \frac{\partial G}{\partial x_k} - \frac{\partial G}{\partial u_i} u_k$$

zieht man leicht die folgende

$$(B.) \qquad \delta_{gh}\delta_{ik} G - \delta_{ik}\delta_{gh} G = \binom{g}{k}\delta_{ih} G - \binom{h}{i}\delta_{gk} G,$$

welche nun auch für jede beliebige Function $P$ gilt. Aus den obigen Differentialgleichungen folgt jetzt $0 = \binom{g}{k}\varrho_{ih} P - \binom{h}{i}\varrho_{gk} P$, also, wenn nicht $P=0$ ist, was wir ausschliessen, $\binom{g}{k}\varrho_{ih} = \binom{h}{i}\varrho_{gk}$, woraus allgemein $\varrho_{ik} = \binom{i}{k}\varrho$, mithin $\delta_{ik} P = \binom{i}{k}\varrho P$ folgt. Da aber identisch $\Sigma\delta_{ii} P = 0$ ist, so folgt endlich $\varrho = 0$, w. z. b. w.

Vergleicht man diese Resultate mit dem Schlusse des vorigen art., so folgt, dass jede Invariante einer bilinearen Zwischenform von $F$, mit Rücksicht auf die den Zwischenformen eigenthümliche Transformation gebildet, auch Invariante von $F$ selbst ist.

Es ist sehr leicht, Invarianten von $G$ zu erhalten. Sei

$$H = S\mathfrak{C}_{gh} x_g u_h$$

eine derselben Transformation wie $G$ unterworfene Function oder $= G$ selbst. Dann ist nach art. V.

$$l'_{ik} = \underset{gh}{S} l_{gh} \alpha_{ig} \frac{\partial \log r}{\partial \alpha_{kh}},$$

$$\mathfrak{C}' = S\mathfrak{C}_{gh} \alpha_{ig} \frac{\partial \log r}{\partial \alpha_{kh}},$$

mithin

$$(C.) \qquad \underset{a}{\Sigma} l'_{ia}\mathfrak{C}'_{ak} = \underset{g,h}{S}(\underset{a}{\Sigma} l_{ga}\mathfrak{C}_{ah}).\alpha_{ig} \frac{\partial \log r}{\partial \alpha_{kh}}.$$

Wenn daher eine bloss aus Coefficienten von $G$ gebildete Function $f(\overline{l_{ik}})$ die Eigenschaft hat, dass

$$f(l_{ik}) = f(\overline{l_{ik}})$$

ist, so ist auch

$$f(\overline{\sum_a l_{ia} \mathfrak{C}_{ak}}) = f(\overline{\sum_a l_{ia} \mathfrak{C}_{ak}}).$$

Nun findet man leicht, dass $\Sigma l_{ii} = \Sigma \overline{l_{ii}}$ ist; nimmt man daher das erstemal $H = G$, und dann neue, sich von selbst ergebende Formen für $H$, so erhält man folgende Reihe von Invarianten von $G$, die nach dem Obigen sämmtlich absolute sind:

$$(D.) \quad \begin{cases} \sum_i l_{ii} \\ \sum_i \sum_a l_{ia} l_{ai} \\ \sum_i \sum_{ab} l_{ia} l_{ab} l_{bi} \\ \sum_i \sum_{abc} l_{ia} l_{ab} l_{bc} l_{ci} \end{cases}$$

u. s. w.

Ein zweites Verfahren ergiebt sich aus den Differentialgleichungen $(A.)$. Da nämlich aus diesen

$$\frac{\partial \delta_{ik} \Pi}{\partial l_{ab}} = \delta_{ik}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial l_{ab}}\right) + \binom{a}{k} \frac{\partial \Pi}{\partial l_{ib}} - \binom{b}{i} \frac{\partial \Pi}{\partial l_{ak}}$$

folgt, so ist identisch

$$\sum_a \frac{\partial \delta_{ik} \Pi}{\partial l_{aa}} = \delta_{ik}\left(\sum_a \frac{\partial \Pi}{\partial l_{aa}}\right).$$

Wenn daher $\Pi$ eine Lösung des Systems $(A.)$ ist, so ist auch

$$\theta \Pi = \sum_a \frac{\partial \Pi}{\partial l_{aa}}$$

eine solche, und hieraus können durch Wiederholung noch weitere Lösungen $\theta\theta\Pi = \theta^2\Pi$, $\theta^3\Pi$ u. s. w. folgen.

Nun bestätigt man ohne Weiteres, dass $\Delta = \Sigma \pm l_{11} l_{22} \dots l_{nn}$ den Gleichungen $(A.)$ genügt. Folglich werden dieselben für jeden constanten Werth von $\alpha$ auch befriedigt durch

$$\begin{vmatrix} l_{11} - \alpha & l_{12} & l_{1n} \\ l_{21} & l_{22} - \alpha & l_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{nn} - \alpha \end{vmatrix} = \Delta(\alpha),$$

worin $n$ offenbar voneinander unabhängige Lösungen enthalten sind.

Die Wurzeln der Gleichung $\varDelta(\alpha)=0$ sind ebenfalls Invarianten von $G$, wie man mittelst der Differentialgleichungen $(A.)$, denen $\varDelta(\alpha)$ und seine nach $\alpha$ genommenen Derivirten für jedes $\alpha$ genügen, leicht bestätigt. Zwischen diesen Wurzeln und den unter $(D.)$ angegebenen Invarianten besteht ein sehr einfacher Zusammenhang, den zuerst Herr *Borchardt* (Bd. 30 dieses Journals pag. 38) gefunden hat, und welcher sich auch aus dem Folgenden ergiebt.

Wir werden nämlich zeigen, dass die vorausgesetzte Substitution stets so gewählt werden kann, dass $G'$ die Form

$$G' = \Sigma\omega_i \xi_i v_i$$

annimmt, und dass alsdann die Coefficienten $\omega$ die Wurzeln der Gleichung $\varDelta(\alpha)=0$ werden. Ist dies bewiesen, so wird $l'_{ii}=\omega_i$, $l'_{ik}=0$. und die unter $(D.)$ gegebenen Invarianten werden:

$$\Sigma l_{ii} = \Sigma l'_{ii} = \Sigma\omega, \qquad \sum_{ia} l_{ia} l_{ai} = \Sigma\omega^2, \qquad \Sigma l_{ia} l_{ab} l_{bi} = \Sigma\omega^3, \qquad \text{u. s. w.}$$

Da allgemein

$$\sum_k l_{ik} a_{kh} = \sum_g a_{ig} l_{gh}$$

ist, so ist zur Ausführbarkeit obiger Transformation von $G$ für jedes $i$ das Gleichungssystem

$$\sum_g a_{ig} l_{gh} = a_{ih}\omega_i$$

erforderlich. Also müssen die Grössen $\omega$ die Wurzeln der Gleichung $\varDelta(\alpha)=0$, oder es muss identisch

$$\varDelta(\alpha) = (\omega_1-\alpha)(\omega_2-\alpha)\dots(\omega_n-\alpha)$$

sein. Sind die $\omega$ dieser Bedingung gemäss gewählt, so lassen sich die Transformationsbedingungen für jedes $i$ befriedigen. Daraus folgt aber, dass in $\varDelta(\alpha)$ alle voneinander unabhängigen Invarianten von $G$ enthalten sind und die Anzahl derselben $n$ ist. Endlich folgt für das System $(A.)$, dessen Vollständigkeit durch die Gleichung $(B.)$ nachgewiesen ist, dass dasselbe genau $n$ überzählige Gleichungen enthält. In der That findet man leicht, dass der Ausdruck

$$\Sigma\mu_{ik}\delta_{ik}\Pi$$

für jede Function $\Pi$ verschwindet, wenn man die Coefficienten $\mu$ aus einer der folgenden Gleichungen wählt:

$$\mu_{ik} = \binom{i}{k}$$

$$\mu_{ik}^{(1)} = l_{ik}$$

$$\mu_{ik}^{(2)} = \sum_a l_{ia} l_{ak}$$

$$\mu_{ik}^{(3)} = \sum_{ab} l_{ia} l_{ab} l_{bk} \qquad \text{u. s. w.}$$

Die invariantiven Eigenschaften dieser ebenfalls zuerst von Herrn *Borchardt* (in der oben erwähnten Abhandlung) eingeführten Ausdrücke ergeben sich ohne Weiteres aus $(C.)$. Mittelst derselben findet man leicht, dass allgemein $\mu_{ik}^{(m)}$ der Coefficient von $\frac{1}{x^{m+1}}$ in der absteigenden Entwicklung von

$$-\frac{\partial \log \Delta(x)}{\partial l_{ki}}$$

ist. Bei der Wichtigkeit der Ausdrücke $\mu_{ik}$ für die Untersuchung der Gleichung $\Delta(\alpha)=0$ war es nicht ohne Interesse, die eigenthümliche Bedeutung nachzuweisen, welche ihnen in der Theorie der bilinearen Functionen zukommt.

Zürich, 27. December 1867.

# Ueber bilineare Formen.

(Von Herrn *Kronecker*.)

---

Vorgetragen in der Sitzung der phys.-math. Klasse der Berliner Akademie vom 15. October 1866 *).

---

Durch mündliche Mittheilungen meines Freundes *Weierstrass* habe ich seit längerer Zeit Kenntniss von seinen Untersuchungen über die allgemeinen $\Theta$-Functionen d. h. über $n$fach unendliche, aus Gliedern von der Form

$$e^{G(u_1, u_2, \ldots u_n;\, \nu_1, \nu_2, \ldots \nu_n)}$$

zusammengesetzte Reihen, in welchen $G$ eine ganze Function zweiten Grades der $n$ Variabeln $u$ und der $n$ Summationsbuchstaben $\nu$ bedeutet. Die Coefficienten der ganzen Function $G$ bilden die Parameter der $\Theta$-Functionen und sind einzig und allein den für die Convergenz der Reihen erforderlichen Bedingungen unterworfen. Diese allgemeinen $\Theta$-Functionen werden in den erwähnten *Weierstrass*schen Untersuchungen auf speciellere zurückgeführt, die von nur $\frac{1}{2}n(n+1)$ Parametern $\tau_{ik}$ abhängen, welche den Gleichungen: $\tau_{ik} = \tau_{ki}$ genügen, im Uebrigen aber bloss durch die für die Convergenz der Reihen nöthigen Bedingungen eingeschränkt sind; und für die Transformation dieser $\Theta$-Functionen werden folgende Relationen zwischen den ursprünglichen Parametern $\tau$ und den entsprechenden transformirten $\tau'$ erlangt:

$$m_{p,n+q} + \sum_r m_{n+r,n+q}\tau_{pr} = \sum_r m_{pr}\tau'_{rq} + \sum_{r,s} m_{n+r,s}\tau_{pr}\tau'_{sq}.$$

Hierin sind für $p$ und $q$ die Zahlen 1, 2, 3, ... $n$ zu setzen, die in Bezug auf $r$ und $s$ zu machenden Summationen erstrecken sich ebenfalls auf die Zahlen 1, 2, 3, ... $n$, und die $4n^2$ ganzen Zahlen $m$ sind kurzweg dadurch zu charakterisiren, dass sie die Coefficienten einer Substitution für je $2n$ Va-

---

*) Da in der vorstehenden Abhandlung des Herrn *Christoffel* auf meine im Monatsbericht der Akademie erschienene Notiz „über bilineare Formen" hingewiesen wird, so dürfte ein Abdruck derselben an dieser Stelle motivirt sein. Das specielle Problem, welches mir zu den Untersuchungen über bilineare Formen Anlass gab, führte mich naturgemäss auf diejenigen bis dahin noch nicht behandelten Transformationen, bei denen für beide Variabeln-Systeme identische Substitutionen angewendet werden, und dadurch ferner zur Aufstellung einer neuen Normalform, einer die Coefficienten derselben bestimmenden Determinante und derjenigen Formen, welche ich *beigeordnete* genannt habe.

riable $x_1, x_2, \ldots x_{2n}; y_1, y_2, \ldots y_{2n}$ bilden, durch welche die bilineare Form:

$$\sum_{r=1}^{r=n} (x_r y_{n+r} - x_{n+r} y_r)$$ .

in ein ganzes Vielfaches ihrer selbst übergeht.

Ich brauche den zu erwartenden eigenen Mittheilungen meines Freundes *Weierstrass* über seine hier erwähnten Untersuchungen nicht weiter vorzugreifen, da das Gesagte genügt, um die Veranlassung zu meinen rein algebraischen Arbeiten darzulegen, von denen ich im Folgenden einen kurzen Auszug geben will. Ich suchte nämlich die Bedingungen zu ermitteln, unter denen die transformirten Parameter $\tau'$ den ursprünglichen oben mit $\tau$ bezeichneten gleich werden, und bin dadurch auf die allgemeine Untersuchung derjenigen Transformationen bilinearer Formen von je $2n$ Variabeln $x$ und $y$ geführt worden, bei welchen die Substitutionscoefficienten für beide Systeme von Variabeln identisch sind. In der That ist der Zusammenhang jener Frage mit der erwähnten Art von Transformationen bilinearer Formen, von welcher nunmehr ausschliesslich die Rede sein soll, einerseits schon durch die Charakterisirung der Zahlen $m$ gegeben, andrerseits aber wird ein solcher Zusammenhang noch durch die folgende Betrachtung hergestellt. Wenn man die obige Relation zwischen den Grössen $\tau$ und $\tau'$ mit $x_p . y_q$ multiplicirt und alsdann in Beziehung auf alle Werthe von $p$ und $q$ summirt, so erhält man eine Gleichung, die durch Einführung der Bezeichnungen $x_{n+r}$, $y_{n+r}$ für die Summen:

$$\sum_p \tau_{pr} x_p, \qquad \sum_q \tau'_{rq} y_q$$

die Form annimmt:

$$\Sigma m_{ir} x_i y_{n+r} = \Sigma m_{i,n+r} x_i y_r ,$$

wo in Bezug auf $i$ von 1 bis $2n$ und in Bezug auf $r$ von 1 bis $n$ zu summiren ist. Wenn man nun $\varepsilon_k = +1$ oder $= -1$ setzt, je nachdem der Index $k$ zu der ersten oder der zweiten Hälfte der Zahlen 1, 2, 3 ... $2n$ gehört, und wenn man ferner sowohl bei den Coefficienten als bei den Variabeln der bilinearen Formen Indices, welche grösser als $2n$ sind, in dem Sinne zulässt, dass darunter deren kleinste positive Reste *modulo* $2n$ zu verstehen sind, so nimmt die obige Gleichung die einfachere Gestalt an:

$$\Sigma \varepsilon_k m_{i,n+k} x_i y_k = 0,$$

und die Summation ist hier in Beziehung auf $i$ und $k$ auf die Werthe 1, 2, 3 ... $2n$ auszudehnen. Man kann hiernach den Zusammenhang zwischen den Grössen $\tau$ und $\tau'$ vollständig dadurch charakterisiren, dass die bilineare Form:

$$\Sigma \varepsilon_k m_{i,n+k} x_i y_k ,$$

welche mit $M(x, y)$ bezeichnet werden soll, vermöge der Substitutionen:

$$x_{n+r} = \Sigma \tau_{pr} x_p; \quad y_{n+r} = \Sigma \tau'_{pr} y_p$$

identisch verschwinden muss. Sollen also die Grössen $\tau'$ den Grössen $\tau$ gleich werden, so sind dieselben in der Weise zu bestimmen, dass die bilineare Form der Variabeln $x'$, $y'$, in welche $M(x, y)$ durch eine Transformation:

$$x'_r = x_r, \quad x'_{n+r} = -x_{n+r} + \sum_p \tau_{pr} x_p,$$

$$y'_r = y_r, \quad y'_{n+r} = -y_{n+r} + \sum_p \tau_{pr} y_p$$

übergeht, für $x'_{n+r} = y'_{n+r} = 0$ identisch verschwindet. Für $r$ sind hier stets sämmtliche Zahlen $1, 2. \ldots n$ zu setzen, damit die sämmtlichen neuen Variabeln durch die alten ausgedrückt erscheinen. Die angegebene Transformation ist eine für beide Systeme von Variabeln übereinstimmende, also eine von denjenigen Transformationen bilinearer Formen, welche hier überhaupt nur betrachtet werden sollen. Aber von der specielleren Beschaffenheit jener Transformationen kann abgesehen werden, da offenbar aus *jeder* Transformation von $M(x, y)$ in eine Form $M'(x', y')$, die für $x'_{n+r} = y'_{n+r} = 0$ verschwindet, $n$ lineare Gleichungen zwischen den je $2n$ Variabeln $x$ und $y$, also auch im Allgemeinen je $n$ Relationen von der Form:

$$x_{n+r} = \Sigma \tau_{pr} x_p, \quad y_{n+r} = \Sigma \tau_{pr} y_p$$

hervorgehen, unter deren Anwendung $M(x, y)$ identisch gleich Null wird.

Die einfachste specielle bilineare Form, welche verschwindet, wenn man die zweite Hälfte der Variabeln $x$ und $y$ gleich Null setzt, ist die Form:

$$\sum_{k=1}^{k=2n} \lambda_k x_k y_{n+k},$$

welche ich „Normalform" nennen will, weil *jede* bilineare Form in dieselbe transformirt werden kann. Diese Reduction der bilinearen Formen von je $2n$ Variabeln auf die angegebene Normalform ist von der wesentlichsten Bedeutung, indem dadurch nicht bloss die obige Frage nach den speciellen Werthen der Grössen $\tau$ erledigt sondern auch die allgemeine Transformation irgend einer bilinearen Form in eine andere vermittelt wird. Das Problem einer solchen allgemeinen Transformation zweier gegebener Formen:

$$\Sigma a_{ik} x_i y_k, \quad \Sigma a'_{ik} x'_i y'_k,$$

in einander, welches also — wenn $c_{ik}$ die $4n^2$ Substitutionscoefficienten bedeuten — durch die Gleichung:

$$\Sigma a_{ik} x_i y_k = \Sigma a'_{gh} c_{gi} c_{hk} x_i y_k,$$

dargestellt wird, erfordert zwar die Erfüllung von $4n^2$ Bedingungsgleichungen

für die gleiche Anzahl Coefficienten $c$ und erscheint hiernach als stets lösbar und bestimmt, in der That aber ist dies nicht der Fall, da mit den Formen:

$$\Sigma a_{ik} x_i y_k, \qquad \Sigma a'_{ik} x'_i y'_k,$$

gleichzeitig die transponirten Formen:

$$\Sigma a_{ki} x_i y_k, \qquad \Sigma a'_{ki} x'_i y'_k$$

durch eben dieselbe Transformation in einander übergehen müssen. Hiernach muss, wenn $u$ und $v$ zwei unbestimmte Variable bedeuten, die Gleichung:

$$\Sigma(ua_{ik} + va_{ki}) x_i y_k = \Sigma(ua'_{ik} + va'_{ki}) x'_i y'_k$$

durch die Substitution:

$$x_i = \Sigma c_{ih} x'_h, \qquad y_i = \Sigma c_{ih} y'_h$$

erfüllt werden. Bezeichnet man die Determinante eines Systems von Grössen $b_{ik}$ durch: $|b_{ik}|$, so erhält man für die Zulässigkeit der Transformation jener beiden bilinearen Formen in einander die Bedingung:

$$|a'_{ik}| \cdot |ua_{ik} + va_{ki}| = |a_{ik}| \cdot |ua'_{ik} + va'_{ki}|.$$

Da beide Seiten dieser Gleichung ganze symmetrische Functionen des $2n^{\text{ten}}$ Grades von $u$ und $v$ enthalten und die Coefficienten von $(u^{2n} + v^{2n})$ überdies identisch sind, so repräsentirt dieselbe $n$ Relationen zwischen den Coefficienten $a$ und $a'$, welche für die Transformation der beiden bezüglichen Formen in einander erforderlich sind. Dieselben sind aber, wie sich zeigen wird, auch ausreichend, da beide Formen auf eine und dieselbe Normalform reducirt werden können, wenn, wie jetzt vorausgesetzt werden soll, die Determinante:

$$|ua_{ik} + va_{ki}|$$

als Function von $u$ und $v$ betrachtet, keine gleichen Factoren enthält. Diese Determinante, welche für die bilinearen Formen von besonderer Bedeutung ist, lässt übrigens noch mannichfache Umformungen zu, von denen ich nur eine hier hervorheben will. Bezeichnet man nämlich mit $\alpha_{ik}$ die Coefficienten des dem Substitutionssysteme $a_{ik}$ entgegengesetzten Systems, so wird:

$$\sum_k a_{ik} \alpha_{kh} = \delta_{ih},$$

wenn, wie von jetzt ab stets geschehen soll, $\delta_{ik} = 1$ oder $\delta_{ik} = 0$ genommen wird, je nachdem die Indices $i$ und $k$ einander gleich oder von einander verschieden sind. Bei Einführung dieser Bezeichnungen erhält man für die obige Determinante die Relation:

$$|ua_{ik} + va_{ki}| = |a_{ik}| \cdot |u\delta_{ik} + v \sum_h a_{hi} \alpha_{hk}|.$$

Wenn die bilineare Form, deren Coefficienten $a_{ik}$ sind, durch eine Substitution mit den Coefficienten $c_{ik}$ auf die Normalform:

$$\Sigma \lambda_k x'_k y'_{n+k}$$

reducirt werden soll, so muss den vorstehenden Ausführungen gemäss:

$$\sum_{ik} (u a_{ik} + v a_{ki}) x_i y_k = \sum_h (u \lambda_h + v \lambda_{n+h}) x'_h y'_{n+h}$$

werden, wenn:

$$x_i = \sum_h c_{ih} x'_h, \quad y_i = \sum_h c_{ih} y'_h$$

und in Folge dessen:

$$x'_h = \sum_k \gamma_{hk} x_k, \quad y'_h = \sum_k \gamma_{hk} y_k$$

gesetzt wird, wobei die Coefficienten $c$ und $\gamma$ durch die Relation:

$$\sum_h c_{ih} \gamma_{hk} = \delta_{ik}$$

mit einander verbunden sind. Da die Normalform mit den Coefficienten $\lambda$, wenn man darin $p_k x'_k$ für $x'_k$ und $p_k y'_k$ für $y'_k$ setzt, in:

$$\Sigma \lambda_k p_k p_{n+k} x'_k y'_{n+k}$$

übergeht, so folgt, dass bei der Reduction einer beliebigen Form auf die Normalform sowohl für deren Coefficienten $\lambda$ als für diejenigen der Substitution $c$ nur die Quotienten:

$$\frac{\lambda_k}{\lambda_{n+k}}, \quad \frac{c_{ih}}{c_{kh}}$$

bestimmt sein können. Für diese Quotienten aber ergeben sich die nothwendigen Bedingungen, wenn man in der obigen Transformations-Gleichung die Variabeln $x$ durch $x'$ und die Variabeln $y'$ durch $y$ ersetzt. In der That erhält man alsdann:

$$\Sigma(u a_{ik} + v a_{ki}) c_{ih} x'_h y_k = \Sigma(u \lambda_h + v \lambda_{n+h}) \gamma_{n+h,k} x'_h y_k,$$

so dass die $2n$ Verhältnisse $\lambda_h : \lambda_{n+h}$ durch die $2n$ Wurzeln der reciproken Gleichung:

$$|a_{ik} z - a_{ki}| = 0$$

gegeben werden, während sich die Verhältnisse $c_{ih} : c_{kh}$ alsdann aus den $2n$ Gleichungen:

$$\sum_i (a_{ik} \lambda_{n+h} - a_{ki} \lambda_h) c_{ih} = 0$$

für $k = 1, 2, \ldots 2n$ bestimmen. Es ist aber nunmehr noch zu zeigen, dass oder in wie weit diese Bestimmung der Coefficienten $c$ und $\lambda$ der Aufgabe genügt. Zu diesem Zwecke denke man sich die Determinante

$$|u a_{ik} + v a_{ki}|$$

in irgend einer Weise in die $2n$ linearen Factoren

$$uv_r - vu_r$$

zerlegt, jedoch so dass $v_{n+r} = u_r$, $u_{n+r} = v_r$ wird. Ferner seien $d_{ik}(u, v)$ die Unterdeterminanten von $|ua_{ik} + va_{ki}|$, so dass:

$$\sum_k (ua_{ik} + va_{ki}) d_{kh}(u, v) = |ua_{ik} + va_{ki}| \cdot \delta_{ih}$$

also auch:

$$\sum_i (ua_{ik} + va_{ki}) d_{ih}(v, u) = |ua_{ik} + va_{ki}| \cdot \delta_{kh}$$

wird. Setzt man nun:

$$\sum_{ik} (ua_{ik} + va_{ki}) d_{ih}(v_r, u_r) d_{kh}(u_s, v_s) = uA_{rs} + vB_{rs},$$

so ergiebt schon die Summation über $i$ allein, dass

$$u_r A_{rs} + v_r B_{rs} = 0$$

sein muss, und ebenso ergiebt die Summation über $k$ die Gleichung:

$$u_s A_{rs} + v_s B_{rs} = 0.$$

Da $\frac{u_r}{v_r}$ der Voraussetzung nach von $\frac{u_s}{v_s}$ verschieden ist, so folgt:

$$A_{rs} = B_{rs} = 0.$$

Ferner erhält man leicht die Relation:

$$A_{rr} = B_{n+r, n+r},$$

und mit Hilfe dieser Beziehungen zwischen den Grössen $A$ und $B$ ergiebt sich die Identität der auf $i, k, r, s = 1, 2, \ldots 2n$ auszudehnenden Summe:

$$\sum (ua_{ik} + va_{ki}) d_{ih}(u_r, v_r) d_{kh}(u_s, v_s) \cdot p_r p_s x'_r y'_s$$

mit:

$$\sum_k (uA_{n+k, n+k} + vA_{kk}) p_k p_{n+k} x'_k y'_{n+k}.$$

Die Identität dieser beiden Summenausdrücke, in welchen die Coefficienten $p$ ganz willkürlich bleiben, setzt die Reduction einer Form:

$$\sum a_{ik} x_i y_k$$

auf die Normalform mittelst der Substitution:

$$x_i = \sum_r d_{ih}(u_r, v_r) \cdot p_r x'_r$$

in Evidenz, und die Coefficienten $c_{ik}$ werden hiernach in der allgemeinsten Weise durch die Gleichung:

$$c_{ik} = p_k \cdot d_{ih}(u_k, v_k)$$

bestimmt.

Der bilinearen Form mit den Coefficienten $a_{ik}$ ist in gewisser Hinsicht eine andere *beigeordnet*, welche aus derselben durch die Substitution:

$$\varepsilon_k \xi_{n+k} = \sum_i a_{ik} x_i$$

entsteht. Sind nämlich die Grössen $\alpha$, wie oben, durch die Gleichung

$$\sum_k a_{ik} \alpha_{kh} = \delta_{ih}$$

für alle Indices $i$, $h$ bestimmt, so erhält man die Relation:

$$\Sigma a_{ik} x_i y_k = \Sigma \varepsilon_i \varepsilon_k \alpha_{n+k,n+i} \xi_i \eta_k$$

für die beiden einander beigeordneten Formen. Wenn die Coefficienten der Substitution, mittelst deren die beigeordnete Form auf die Normalform gebracht wird, mit $c'$ bezeichnet werden, so besteht zwischen den Coefficienten $c$ und $c'$ die Beziehung:

$$\varepsilon_h c'_{n+h,i} = w_i \sum_k a_{kh} c_{ki},$$

welche für die nunmehr wieder aufzunehmende Ermittelung der Grössen $\tau$ von Bedeutung ist.

Wenn eine bilineare Normalform, deren Coefficienten $\lambda$ sämmtlich von einander verschieden sind, dadurch gleich Null werden soll, dass die je $2n$ Variabeln durch je $n$ übereinstimmende Relationen mit einander verbunden werden, so kann dies nur in der einfachen Weise geschehen, dass die eine Hälfte der Variabeln selbst gleich Null gesetzt wird. Es kann hierfür stets die letzte Hälfte genommen werden, sobald man keinerlei Voraussetzung über die Anordnung der Variabeln macht. Hiernach bestimmen sich die Coefficienten $\tau$ in den Relationen:

$$x_{n+q} = \sum_r \tau_{qr} x_r, \qquad y_{n+q} = \sum_r \tau_{qr} y_r,$$

für welche

$$\Sigma a_{ik} x_i y_k = 0$$

werden soll, aus den Coefficienten $c$ durch die Gleichungen:

$$c_{n+q,p} = \sum_r c_{rp} \tau_{qr}.$$

Für die Indices $p$, $q$, $r$ sind hier überall nur die Zahlen 1, 2, ... $n$ zu setzen. Die Variabeln der Normalform und also die zweiten Indices der Coefficienten $c$ werden in einer derjenigen Anordnungen vorausgesetzt, für welche $|c_{rp}|$ nicht verschwindet. Alsdann lässt sich für die zu der beigeordneten Form gehörigen Coefficienten $c'$ die Gleichung:

$$c'_{n+q,p} = \sum_r c'_{rp} \tau_{rq}$$

herleiten. Hiernach stehen irgend zwei einander beigeordnete Formen in der

gegenseitigen Beziehung, dass wenn die eine vermöge der Relationen:

$$x_{n+q} = \sum_r \tau_{qr} x_r, \qquad y_{n+q} = \sum_r \tau_{qr} y_r$$

verschwindet, die andere durch die transponirten Substitutionen:

$$x_{n+q} = \sum_r \tau_{rq} x_r, \qquad y_{n+q} = \sum_r \tau_{rq} y_r$$

auf Null reducirt wird. Wenn also die beigeordneten Formen abgesehen von einem constanten Factor einander gleich und demgemäss die Coefficienten $c$ und $c'$ mit einander identisch anzunehmen sind, so muss $\tau_{qr} = \tau_{rq}$ sein. Dies findet in der That statt, wenn $a_{ik} = \varepsilon_k m_{i,n+k}$ genommen wird, wodurch übrigens für die Bestimmung der Coefficienten $c$ aus der obigen Gleichung zwischen $c$ und $c'$ die Relationen

$$c_{hi} = w_i \sum_k m_{kh} c_{ki}, \qquad |w_i m_{kh} - \delta_{kh}| = 0$$

hervorgehen, und man kann das Resultat folgendermassen aussprechen:

„Wenn die Zahlen $m_{ik}$ die $4n^2$ Substitutionscoefficienten für die Transformation der Form:

$$\sum \varepsilon_k x_k y_{n+k}$$

in ein Vielfaches ihrer selbst bilden, so giebt es ***symmetrische*** Systeme von $n^2$ Grössen $\tau$, für welche die Form:

$$\sum \varepsilon_k m_{i,n+k} x_i y_k$$

verschwindet, wenn darin:

$$x_{n+q} = \sum \tau_{qr} x_r, \qquad y_{n+q} = \sum \tau_{qr} y_r$$

gesetzt wird. Unter der Annahme, dass die Determinante

$$|u\varepsilon_k m_{i,n+k} + v\varepsilon_i m_{k,n+i}|$$

aus lauter verschiedenen Linearfactoren:

$$uv_k - vu_k$$

bestehe, lassen sich sämmtliche Systeme von Grössen $\tau$ rational aus den Grössen $u_k$, $v_k$ bestimmen. Wenn nämlich eine Hälfte der Werthe $u_k$, $v_k$ irgendwie ausgewählt wird, jedoch so dass nicht zwei um $n$ verschiedene Indices $k$ darunter vorkommen, und man bezeichnet die Unterdeterminanten der obigen Determinante mit $d_{ih}(u, v)$, so werden die zu einem und demselben Systeme gehörigen Grössen $\tau$ durch diejenigen Gleichungen gegeben, welche aus:

$$\sum_{r=1}^{r=n} d_{rh}(u_k, v_k) \cdot \tau_{qr} = d_{n+q,h}(u_k, v_k)$$

für die ausgewählten $n$ Indices $k$ und für $q = 1, 2, \ldots n$ entstehen."

Eine besonders bemerkenswerthe Beziehung zwischen den Grössen $\tau$ und den zugehörigen bilinearen Formen besteht darin, dass transformirten bilinearen Formen transformirte Grössen $\tau$ entsprechen, vorausgesetzt dass die Coefficienten der Transformation selbst ein System $m_{ik}$ bilden. Wenn nämlich die Grössen $\tau'$ zu der Form $\Sigma \varepsilon_k m'_{i,n+k} x'_i y'_k$ und die Grössen $\tau$ zu derjenigen Form gehören, welche aus jener durch die Substitution:

$$x'_i = \sum_h m_{h,i} x_h, \qquad y'_i = \sum_h m_{h,i} y_h$$

hervorgeht, so besteht zwischen den Grössen $\tau$ und $\tau'$ genau die im Anfang dieser Mittheilung angegebene Relation, welche die einen als transformirte der andern charakterisirt. Die arithmetische Theorie der Grössensysteme $\tau$ ist sonach auf die der bilinearen Formen $M(x, y)$ zurückzuführen, und diese bilden eine in sich abgeschlossene Gattung von Formen, welche bei Transformationen der bezeichneten Art nur in einander übergehen und welche, wenn die Coefficienten $m$ symmetrisch sind, durch quadratische Formen jener besonderen Gattung ersetzt werden können, welche Herr *Hermite* für den Fall $n = 2$ zuerst aufgestellt und behandelt hat.

Es muss hervorgehoben werden, dass nicht alle Werthe der Grössen $\tau$, welche auf die angegebene Weise resultiren, die für die Convergenz der $\Theta$-Reihen nothwendigen Bedingungen erfüllen. Ferner ist zu bemerken, dass, wenn die Gleichung:

$$|z a_{ik} - a_{ki}| = 0$$

gleiche Wurzeln enthält, die Grössen $\tau$ theilweise unbestimmt bleiben, d. h. es existiren in diesem Falle gewisse Functionen von einer oder mehreren Variabeln, die für $\tau_{ik}$ gesetzt der Aufgabe genügen. Ich will indessen auf diese eine genauere Untersuchung erfordernden Punkte nicht näher eingehen, sondern nur noch gewisse Eigenschaften der Zahlen $m$ hervorheben, welche für die hier berührten Fragen von Bedeutung sind.

Die Gleichungen, denen das System der Zahlen $m$ genügt, bleiben auch bei der Zusammensetzung solcher Systeme bestehen. Dies geht unmittelbar daraus hervor, dass die Zahlen $m$ die Coefficienten der Substitution für die Transformation einer gewissen Form in ein Vielfaches derselben bilden. Auf dergleichen Substitutions-Systeme, deren Eigenschaften bei der Zusammensetzung erhalten bleiben, habe ich bereits vor längerer Zeit bei Gelegenheit anderer algebraischer Untersuchungen meine Aufmerksamkeit gerichtet und von denselben namentlich zur Bildung von Affectfunctionen Gebrauch gemacht.

Um solche Systeme herzustellen bedarf es nur der Auffindung von Formen, welche unendlich viele Transformationen in sich selbst zulassen, und wenn bereits derartige Formen bekannt sind, so kann man daraus neue ableiten, indem man Formen, die sowohl in sich selbst als in einander transformirbar sind, zu einander addirt. In dem oben angegebenen Falle sind es z. B. die $n$ in sich selbst transformirbaren Formen: $x_k y_{n+k} - x_{n+k} y_k$, deren Summe eine Form bildet, welche Transformationen in sich selbst gestattet, und man sieht leicht, in welcher Weise sich namentlich die Verallgemeinerung für Determinanten höherer Ordnung gestaltet. Nach diesen Andeutungen über allgemeinere Systeme bemerke ich zuvörderst in Bezug auf dasjenige, durch welches die Form: $\Sigma \varepsilon_k x_k y_{n+k}$ in sich selbst übergeht, dass dessen Elemente $m_{ik}$ sich rational durch $n(2n+1)$ von einander unabhängige, ein symmetrisches System bildende Grössen $\nu_{ik}$ ausdrücken lassen. Bringt man nämlich die Elemente des dem Systeme $(m_{ik} + \delta_{ik})$ entgegengesetzten Systems auf die Form:

$$\tfrac{1}{2}(\varepsilon_k \nu_{i,n+k} + \delta_{ik}),$$

so sind die Grössen $m$ und $\nu$ offenbar durch einander rational ausdrückbar, und es bestehen vermöge der Eigenschaften des Systems $m$ für die Grössen $\nu$ die Relationen: $\nu_{ik} = \nu_{ki}$. Durch diese Zurückführung der Systeme $m$ auf symmetrische Systeme $\nu$ wird indessen nur die Auffindung aller *rationalen*, nicht aber die aller *ganzzahligen* Elemente einer Transformation der Form: $\Sigma \varepsilon_k x_k y_{n+k}$ in sich selbst ermöglicht. Hierzu dient vielmehr ein Princip der Reduction von gegebenen Substitutions-Systemen auf „elementare", welches auch auf die allgemeineren vorhin charakterisirten Systeme anwendbar ist.

Wenn man auf eine Substitution zweiter Ordnung mit ganzzahligen und vorläufig positiv anzunehmenden Coefficienten:

$$y_1 = ax_1 + bx_2, \qquad y_2 = cx_1 + dx_2$$

successive und abwechselnd die weiteren Substitutionen:

$$x_1 = x_2', \qquad x_2 = -x_1'$$
$$x_1 = x_1' - px_2', \qquad x_2 = x_2'$$

anwendet, und hierbei für die Zahlen $p$ die Theilnenner nimmt, welche bei der Entwickelung von $\frac{b}{a}$ in einen Kettenbruch mit den Zählern: $-1$ auftreten, so reducirt sich hierdurch schliesslich in der Reihe der neuen Coefficienten $b$ einer auf Null. Ist $ad - bc = 1$, so werden hiernach die zugehörigen Coefficienten $a$ und $d$ gleich Eins, und eine Folge von drei ferneren Transfor-

mationen der obigen Art bringt auch den Coefficienten $c$ auf Null. Da überdies eine Folge von Substitutionen der ersten Art jede zulässige Zeichenänderung der Coefficienten bewirkt und die der zweiten Art offenbar aus solchen zusammengesetzt werden können, in denen $p=1$ ist, so ergiebt sich, dass *jedes* ganzzahlige Substitutionssystem zweiter Ordnung mit der Determinante 1 aus den beiden elementaren Systemen:

$$\begin{matrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{matrix}$$

zusammengesetzt werden kann. Die Zusammensetzung von Systemen ist dabei stets in der Weise zu nehmen, wie sich dieselbe durch successive Transformation der Variabeln ergiebt, so dass ein aus der Aufeinanderfolge von Systemen $a_{ik}$ und $b_{ik}$ entstehendes System $c_{ik}$ durch die Gleichung:

$$c_{ik} = \sum_h a_{ih} b_{hk}$$

bestimmt wird. — Da der angegebene, mit dem Kettenbruchsverfahren übereinstimmende Process der allmäligen Verkleinerung zweier ganzzahliger Elemente einer Horizontalreihe ohne Weiteres auf ein beliebiges ganzzahliges Substitutionssystem $n^{\text{ter}}$ Ordnung angewendet werden kann, so sieht man, dass auf diese Weise zuvörderst nach einander die zur Rechten der Hauptdiagonale stehenden Glieder der ersten, zweiten, dritten etc. Horizontalreihe und, falls die Determinante gleich Eins ist, alsdann auch die auf der linken Seite befindlichen Glieder auf Null reducirt werden können. Die Zahl der hierzu nur erforderlichen elementaren Systeme ist genau gleich $n$, und zwar kann man dazu diejenigen wählen, welche durch die folgenden Transformationen der Variabeln bezeichnet sind:

$$1. \qquad x_1 = -x'_k, \quad x_k = x'_1, \quad \text{und wenn} \quad i \gtrless k : x_i = x'_i,$$

wo nach einander $k = 2, 3, \ldots n$ zu setzen ist;

$$2. \qquad x_1 = x'_1 + x_2, \quad \text{und wenn} \quad i > 1 : x_i = x'_i.$$

Jedes ganzzahlige Substitutionssystem $n^{\text{ter}}$ Ordnung mit der Determinante Eins kann also als eine Aufeinanderfolge der angegebenen $n$ elementaren Systeme betrachtet werden, und diese Zerlegung beliebiger Systeme in elementare, welche übrigens in gewisser Hinsicht eine bestimmte ist, hat auch für die arithmetische Theorie der Formen ihre besondere Bedeutung.

Um nunmehr zu der analogen Zerlegung der obigen Substitutionssysteme $m$ in elementare überzugehen, bemerke ich zuvörderst, dass jede Transformation einer Summe von Formen: $x_k y_{n+k} - x_{n+k} y_k$ in sich selbst aus denjenigen

sich zusammensetzen lassen muss, welche eine dieser Formen in sich selbst und aus denjenigen, welche sie in eine der übrigen verwandelt. Demgemäss ergeben sich mit Rücksicht auf obige Ausführungen zwei elementare Transformationen der ersteren und $n$ der letzteren Art, nämlich:

I. 1) $x_1 = -x'_{n+1}, \quad x_{n+1} = x'_1;$

I. 2) $x_1 = x'_1 + x'_{n+1}.$

II. 1) $x_1 = x'_k, \quad x_{n+1} = x'_{n+k}, \quad x_k = x'_1, \quad x_{n+k} = x'_{n+1},$
wo nach einander 2, 3, ... $n$ für $k$ zu setzen ist;

II. 2) $x_1 = x'_1 + x'_{n+2}, \quad x_2 = x'_2 + x'_{n+1}.$

Hierbei sind der Einfachheit wegen überall diejenigen $x$ weggelassen worden, welche den entsprechenden $x'$ gleich zu setzen sind. — Es lässt sich nun in der That jede beliebige ganzzahlige Transformation der Form: $\Sigma\varepsilon_k x_k y_{n+k}$ in sich selbst in eine Folge der angegebenen $(n+2)$ elementaren Transformationen zerlegen, und die zu dieser Zerlegung erforderliche Reduction eines beliebigen ganzzahligen Systems $m$ mit der Determinante Eins kann in folgender Weise bewirkt werden:

Erstens sind mit Hülfe der elementaren Substitutionen nach der oben angegebenen Methode diejenigen Glieder $m_{r,s}$ zu vernichten, in welchen $s > r$ ist, sowie diejenigen Glieder $m_{r,n+s}$, in welchen $s \geqq r$ ist, wobei die Indices $r$ und $s$ stets nicht grösser als $n$ zu nehmen sind. Alsdann sind vermöge der Eigenschaften der Zahlen $m$ nothwendig sämmtliche Glieder $m_{r,n+s}$ gleich Null, und also die Zahlen $m_{rr}$ sämmtlich gleich Eins. — Zweitens sind hierauf die Glieder $m_{rs}$, für welche $r > s$ ist, auf Null zu reduciren, und es verschwinden in Folge dessen von selbst die Glieder $m_{n+r,n+s}$, für welche $r$ und $s$ verschieden sind, während die Zahlen $m_{n+r,n+r} = 1$ werden. — Drittens sind endlich nunmehr auch die noch übrigen Glieder $m_{n+r,s}$ mit Hülfe der elementaren Substitutionen zu vernichten, so dass nur die Zahlen $m_{kk}$, welche sämmtlich gleich Eins sind, übrig bleiben.

Wenn die Determinante der Zahlen $m_{ik}$ von Eins verschieden ist, so treten bei der angegebenen Reduction mittelst elementarer Systeme in den Diagonalgliedern — statt der Zahl Eins — Theiler der Determinante auf, und es lassen sich hiernach nicht mehr sämmtliche ausserhalb der Diagonale stehenden Glieder auf Null reduciren. Aber man erhält durch dieses Verfahren die sämmtlichen nicht äquivalenten Substitutionssysteme irgend einer von Eins

verschiedenen Determinante und die bezüglichen Resultate sind als Verallgemeinerungen derjenigen anzusehen, welche Herr *Hermite* in seiner Abhandlung über die Transformation der *Abel*schen Functionen für den Fall $n=2$ gegeben hat.

---

Ich habe den vorstehenden Ausführungen die Bemerkung hinzuzufügen, dass mir vor dem Abdruck des obigen Auszugs aus meiner am 15. October gehaltenen Vorlesung, nämlich am 31. desselben Monats, das inzwischen erschienene Werk von *Clebsch* und *Gordan* über *Abel*sche Functionen auf gütige Veranlassung der Herren Verfasser zugekommen ist. Die Entwickelungen im §. 86 dieses Werkes, wo die Aufgabe alle ganzzahligen Systeme $m$ aufzufinden behandelt wird, sind den meinigen analog, wenn auch nicht bis zu denselben einfachsten Resultaten durchgeführt; sie stützen sich aber ebenfalls wesentlich auf das oben dargelegte Princip der Reduction beliebiger Substitutionssysteme auf elementare, und es wird dabei die Idee einer solchen Reduction als mir angehörig in einer Note bezeichnet, deren etwas unbestimmte Fassung mich zu einer Darlegung des Sachverhältnisses veranlasst. In der That habe ich bereits vor acht Jahren das Problem, die sämmtlichen ganzzahligen Systeme $m$ darzustellen, durch die obige Methode gelöst und eine vollständige schriftliche Auseinandersetzung derselben im Februar 1859 meinem Freunde *Weierstrass* übergeben, welcher sie bei einer damaligen Bearbeitung seiner Theorie der allgemeinen *Abel*schen Functionen benutzen wollte. Die Methode ist überdies durch private Mittheilungen so wie durch meine an der Universität gehaltenen Vorlesungen seit Jahren mehrfach bekannt geworden. Indessen könnte jene Note in dem Werke von *Clebsch* und *Gordan* sich auch auf unmittelbare mündliche Mittheilungen beziehen, welche ich über die Reduction der Systeme und deren Anwendung auf die Transformation *Abel*scher Functionen Herrn *Gordan* bei seiner vorjährigen Anwesenheit in Berlin gemacht habe.

---

# Ueber eine Transformation der hydrodynamischen Gleichungen.

(Von Herrn *H. Weber* in Heidelberg.)

---

Es ist seit den Untersuchungen *Dirichlets* hinlänglich bekannt, welchen Vorzug die sogenannte *Lagrange*sche*) Form der Gleichungen der Hydrodynamik vor der *Euler*schen Form voraus hat, dass nämlich das Gebiet der unabhängigen Variablen bei der ersteren ein für allemal gegeben ist, während in der zweiten Form dieses Gebiet wenigstens in den meisten Fällen erst von den zu suchenden unbekannten Grössen abhängt. Daher übersteigt die Behandlung der *Euler*schen Gleichungen in allen den Fällen, wo die äussere Gestalt der flüssigen bewegten Masse nicht ungeändert bleibt, oder sich dieselbe nicht allerseits ins Unendliche erstreckt, bei weitem die Kräfte der heutigen Analysis, mehr als dies bei den *Lagrange*schen Gleichungen trotz ihrer verwickelteren Form der Fall ist. Dem ungeachtet ist die Zahl der Probleme, die bis jetzt auf Grund der *Lagrange*schen Gleichungen gelöst worden sind, eine ungemein geringe, und selbst die allgemeine Theorie dieser Gleichungen scheint mir noch nicht die Höhe erreicht zu haben, deren sie fähig ist. So ist namentlich die Frage noch nicht beantwortet, welchen Nutzen man für die Integration der *Lagrange*schen Gleichungen ziehen kann aus der Annahme eines Geschwindigkeitspotentials, eine Annahme, wodurch die *Euler*schen Gleichungen so ausserordentlich vereinfacht werden. Da die Voraussetzung des Geschwindigkeitspotentials nicht bloss eine analytische, sondern eine physikalische Vereinfachung des Problems ist, so muss auch in der *Lagrange*schen Form der Gleichungen durch dieselbe eine Erleichterung herbeigeführt werden.

Ich werde im Folgenden eine Form der hydrodynamischen Gleichungen entwickeln, in der ihnen der wesentliche Vortheil der *Euler*schen Gleichungen zukommt, nämlich dass die darin vorkommenden Differentialquotienten nur von der ersten Ordnung sind, und dass die Bedingung der Existenz eines Geschwindigkeitspotentials sofort eingeführt werden kann, und zwar ohne die Zahl der

---

*) Ich bediene mich der gewöhnlichen Bezeichnung wiewohl es mir nicht unbekannt ist, dass, wie Herr *Hankel* bemerkt hat, beide Formen der hydrodynamischen Gleichungen von *Euler* herrühren.

unbekannten Functionen und der Differentialgleichungen zu vermehren. Diese Gleichungen erster Ordnung haben zwar nicht die Einfachheit der *Euler*schen Gleichungen, besitzen aber gleichzeitig den Vortheil der *Lagrange*schen Gleichungen, nämlich dass das Gebiet der unabhängigen Veränderlichen unveränderlich und gegeben ist.

## §. 1.

Ich gehe von der bekannten Form der *Lagrange*schen Gleichungen aus. Bezeichnen $x\ y\ z$ die rechtwinkligen Coordinaten eines Flüssigkeitstheilchens, dessen Coordinaten beim Beginn der Bewegung $a\ b\ c$ sind; bezeichnet ferner $p$ den Druck, $\varrho$ die Dichtigkeit, $V$ das Potential der wirkenden Kräfte, alles bezogen auf das Theilchen $abc$ zur Zeit $t$, so sind diese Gleichungen folgende:

$$(1.)\quad \begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\frac{\partial z}{\partial a}-\frac{\partial V}{\partial a}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial a}=0, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\frac{\partial x}{\partial b}+\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\frac{\partial y}{\partial b}+\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\frac{\partial z}{\partial b}-\frac{\partial V}{\partial b}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial b}=0, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\frac{\partial x}{\partial c}+\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\frac{\partial y}{\partial c}+\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\frac{\partial z}{\partial c}-\frac{\partial V}{\partial c}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial c}=0. \end{cases}$$

Dazu kommt für incompressible Flüssigkeiten die Gleichung

$$(2.)\qquad \Sigma\pm\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c}=1$$

und für Gase:

$$(2'.)\qquad \Sigma\pm\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c}=\frac{\varrho_0}{\varrho},$$

wo $\varrho_0$ die Dichtigkeit an der Stelle $abc$ beim Anfang der Bewegung bedeutet. Für incompressible Flüssigkeiten ist $\varrho$ eine Constante, die $=1$ gesetzt werden kann, während bei Gasen $\varrho$ als eine erfahrungsmässig bekannte Function von $p$ zu betrachten ist, so dass die Anzahl der Gleichungen der Anzahl der zu bestimmenden Functionen in beiden Fällen gleich kommt.

Ich schicke einige Betrachtungen über die Grenz- und Stetigkeitsbedingungen voraus, welche erforderlich sind, um die unbekannten Functionen vollständig zu bestimmen.

Die Ableitung der Gleichung (2.) und (2'.) setzt bekanntlich voraus, dass diejenigen Flüssigkeitstheilchen, welche zu irgend einer Zeit auf einer geschlossenen Fläche liegen, auch zu jeder anderen Zeit eine geschlossene Fläche bilden, und dass die Theilchen, welche innerhalb einer solchen Fläche

liegen, auch beständig innerhalb derselben bleiben, woraus unmittelbar folgt, dass die Oberfläche der ganzen bewegten Flüssigkeit beständig von denselben Theilchen gebildet wird. Diese Bedingung lässt sich analytisch so ausdrücken, dass $x\ y\ z$ zu allen Zeiten einwerthige, stetige und für endliche Werthe der Variablen endliche Functionen von $a\ b\ c$ sein müssen, innerhalb des diesen Variablen zukommenden Bereichs, und dass den Grössen $a\ b\ c$ als Functionen von $x\ y\ z$ betrachtet, dieselben Eigenschaften zukommen müssen.

Die letzteren dieser Bedingungen sind aber wegen der Gleichungen (2.) oder (2'.) Folgen der ersteren, wenn man noch die Bedingung hinzufügt, dass auch die Geschwindigkeiten $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$ für alle Zeiten endliche und stetige Functionen von $a\ b\ c$ sein sollen.

Betrachtet man nämlich irgend zwei Functionensysteme: $x\ y\ z$, $x'\ y'\ z'$, welche sich auf zwei verschiedene Werthe von $t$ beziehen, und beide endliche und stetige Functionen von $a\ b\ c$ sind, so müssen auch die $x'\ y'\ z'$ endliche und stetige Functionen der $x\ y\ z$ sein und umgekehrt, mithin auch $a\ b\ c$ endliche und stetige Functionen von $x\ y\ z$. Denn bildet man die Differentialquotienten $\frac{\partial x'}{\partial x}\cdots$ aus den Gleichungen:

$$\frac{\partial x'}{\partial a} = \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial x'}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

so erhalten die Auflösungen den Nenner $\Sigma \pm \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c}$, welcher jedenfalls nicht verschwinden kann, da auch bei Gasen die Dichtigkeit nicht unendlich und nicht Null werden kann. Die Differentialquotienten $\frac{\partial x'}{\partial x}$, $\frac{\partial x'}{\partial y}\cdots$ sind sonach alle endlich und mithin die Functionen $x'\ y'\ z'$ in Bezug auf $x\ y\ z$ endlich und stetig.

Um den Nachweis zu führen, dass unter der Voraussetzung, dass $x\ y\ z$ zu allen Zeiten einwerthige Functionen von $a\ b\ c$ sind, auch nicht zwei Theilchen, welche zu einer Zeit verschiedene Coordinaten haben, zu einer anderen Zeit dieselben Coordinaten haben können, betrachten wir zwei Flüssigkeitstheilchen, welche zur Zeit $t$ respective die Coordinaten $x\ y\ z$, $x'\ y'\ z'$ haben mögen, und setzen voraus, dass $x$ von $x'$, $y$ von $y'$, $z$ von $z'$ nur unendlich wenig verschieden sei. Wenn nun diese beiden Theilchen nach Verlauf des Zeitelements $dt$ dieselben Coordinaten hätten, so müsste sein:

$$(x-x')+\frac{d(x-x')}{dt}dt = 0,$$

$$(y-y')+\frac{d(y-y')}{dt}dt = 0,$$

$$(z-z')+\frac{d(z-z')}{dt}dt = 0.$$

Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit können die Theilchen $xyz$, $x'y'z'$ auch beim Beginn der Bewegung nur unendlich wenig von einander entfernt gewesen sein. Bezeichnet man also die Unterschiede der Anfangswerthe der Coordinaten mit $da$, $db$, $dc$, so lässt sich immer eine unendlich kleine Grösse $\varepsilon$ der Art bestimmen, dass

$$da = \varepsilon\alpha, \qquad db = \varepsilon\beta, \qquad dc = \varepsilon\gamma$$

und dass die Grössen $\alpha$ $\beta$ $\gamma$ jedenfalls nicht alle drei unendlich klein sind. Dann lassen sich die obigen Gleichungen so schreiben:

$$\frac{\partial x}{\partial a}\alpha+\frac{\partial x}{\partial b}\beta+\frac{\partial x}{\partial c}\gamma = -\left\{\frac{\partial^2 x}{\partial a\partial t}\alpha+\frac{\partial^2 x}{\partial b\partial t}\beta+\frac{\partial^2 x}{\partial c\partial t}\gamma\right\}dt = \varepsilon_1,$$

$$\frac{\partial y}{\partial a}\alpha+\frac{\partial y}{\partial b}\beta+\frac{\partial y}{\partial c}\gamma = -\left\{\frac{\partial^2 y}{\partial a\partial t}\alpha+\frac{\partial^2 y}{\partial b\partial t}\beta+\frac{\partial^2 y}{\partial c\partial t}\gamma\right\}dt = \varepsilon_2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial a}\alpha+\frac{\partial z}{\partial b}\beta+\frac{\partial z}{\partial c}\gamma = -\left\{\frac{\partial^2 z}{\partial a\partial t}\alpha+\frac{\partial^2 z}{\partial b\partial t}\beta+\frac{\partial^2 z}{\partial c\partial t}\gamma\right\}dt = \varepsilon_3.$$

Sind nun die Functionen $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$ zu allen Zeiten stetige und endliche Functionen von $a$ $b$ $c$, so sind die $\varepsilon_1$ $\varepsilon_2$ $\varepsilon_3$ unendlich kleine Grössen von der Ordnung $dt$, und wenn man die vorstehenden Gleichungen in Bezug auf die auf der linken Seite stehenden $\alpha$ $\beta$ $\gamma$ auflöst, so ergeben sich diese, da die Determinante nicht verschwinden kann, gleichfalls als unendlich kleine Grössen von der Ordnung $dt$, was gegen die Voraussetzung ist.

Wegen der Stetigkeit können auch nicht Theilchen zusammenfallen, welche unmittelbar vorher durch eine endliche Strecke getrennt waren. Demnach reduciren sich die Stetigkeitsbedingungen auf folgende: die Coordinaten $x$ $y$ $z$ und die Geschwindigkeiten $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ müssen für alle Werthe von $t$ einwerthige, stetige und für endliche Werthe der Variablen endliche Functionen von $a$ $b$ $c$ sein.

Dazu tritt noch die eine Bedingung, dass entweder der Druck zu allen Zeiten eine stetige Function des Ortes ist, oder dass die Geschwindigkeiten stetige Functionen der Zeit sind; von diesen beiden letzteren Bedingungen ist

wegen der Gleichungen (1.) unter der Voraussetzung stetiger Kräfte die eine eine Folge der andern.

Dazu kommen noch die Bedingungen des Anfangszustandes und der Grenzen. Die ersteren sind einfach die, dass zur Zeit $t = 0$, $x = a$, $y = b$, $z = c$ sein muss, und dass die Geschwindigkeiten $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ für $t = 0$ beliebig gegebene Functionen $u_0$, $v_0$, $w_0$ von $a\ b\ c$ werden, welche bei incompressiblen Flüssigkeiten der Bedingung genügen müssen:

$$\frac{\partial u_0}{\partial a} + \frac{\partial v_0}{\partial b} + \frac{\partial w_0}{\partial c} = 0.$$

Die Bedingungen, die während der ganzen Dauer der Bewegung an der Grenze erfüllt sein müssen, sind je nach der speciellen Natur des Problems sehr verschieden. Ist z. B. die ganze Oberfläche einer incompressiblen Flüssigkeit frei beweglich, so ist weiter nichts erforderlich, als dass an der ganzen Oberfläche der Druck gegeben ist. Ist ein Theil der Oberfläche von festen oder bewegten Wänden gebildet, so müssen, der gewöhnlichen Annahme zufolge, die Theilchen, welche zu Anfang der Wand angehörten, während der ganzen Bewegung mit der Wand in Berührung bleiben, während an dem freien Theil der Oberfläche wieder der Druck gegeben sein muss. Aus physikalischen Gründen ist anzunehmen, dass durch diese Bedingungen die Bewegung eine vollständig gegebene ist. Der Nachweis aber, dass auch mathematisch durch diese Bedingungen das Problem der Integration der Gleichungen ein völlig eindeutiges ist, dürfte ziemlich schwierig sein.

## §. 2.

Um nun die oben erwähnte Transformation der hydrodynamischen Gleichungen auf Differentialgleichungen der ersten Ordnung durchzuführen, multiplicirt man die Gleichungen (1.) mit $dt$ und integrirt dieselben zwischen den Grenzen 0 und $t$. Wendet man dann auf die drei ersten Glieder jeder dieser Gleichungen eine theilweise Integration an, welche wegen der vorausgesetzten Stetigkeitsbedingungen statthaft ist, und beachtet man, dass man für die untere Grenze $t = 0$ hat:

$$\begin{array}{lll}
\frac{\partial x}{\partial a} = 1, & \frac{\partial x}{\partial b} = 0, & \frac{\partial x}{\partial c} = 0, \\
\frac{\partial y}{\partial a} = 0, & \frac{\partial y}{\partial b} = 1, & \frac{\partial y}{\partial c} = 0, \\
\frac{\partial z}{\partial a} = 0, & \frac{\partial z}{\partial b} = 0, & \frac{\partial z}{\partial c} = 1, \\
\frac{\partial x}{\partial t} = u_0, & \frac{\partial y}{\partial t} = v_0, & \frac{\partial z}{\partial t} = w_0,
\end{array}$$

so erhält man ohne Schwierigkeiten:

$$(3.)\quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial a}-u_0 = \frac{\partial \lambda}{\partial a}, \\ \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial b}+\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial b}+\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial b}-v_0 = \frac{\partial \lambda}{\partial b}, \\ \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial c}+\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial c}+\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial c}-w_0 = \frac{\partial \lambda}{\partial c}, \end{cases}$$

worin zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\lambda = \int_0^t \left\{ V-\int\frac{\partial p}{\varrho}+\tfrac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right)\right\} dt.$$

Wenn man nun $\lambda$ als eine neue abhängige Variable ansieht, so bilden die Gleichungen (3.) ein System partieller Differentialgleichungen erster Ordnung, welche in Verbindung mit der Gleichung (2.) oder (2′) und mit der neuen Gleichung

$$(4.)\quad \frac{\partial \lambda}{\partial t} = V-\int\frac{\partial p}{\varrho}+\tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right\}$$

der Zahl nach genügen, um die fünf Functionen: $x\ y\ z\ \lambda\ p$ zu bestimmen, da $\int\frac{dp}{\varrho}$ als eine durch die Erfahrung gegebene Function von $p$ zu betrachten ist, welche im Fall einer incompressiblen Flüssigkeit, wo $\varrho$ constant ist, in $\frac{p}{\varrho}$ übergeht, so dass, wenn man $\varrho=1$ setzt, die Gleichung (4.) für diesen Fall wird:

$$(4.')\quad \frac{\partial \lambda}{\partial t} = V-p+\tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right\}.$$

Die Function $\lambda$ muss die Bedingung des Anfangszustandes erfüllen, dass für $t=0$, $\lambda=0$ werde, was unmittelbar aus der Definition von $\lambda$ hervorgeht, während die Bedingungen des Anfangszustandes für die Geschwindigkeiten $\frac{\partial x}{\partial t}\ \frac{\partial y}{\partial t}\ \frac{\partial z}{\partial t}$ von selbst erfüllt sind, wenn die Functionen $x\ y\ z\ \lambda\ p$ die Gleichungen (3.), (4.) und die übrigen Bedingungen des Anfangszustandes befriedigen. Die Gleichungen (3.), (4.) sind vollständig äquivalent mit den Gleichungen (1.), denn wenn man aus den ersteren $\lambda$ durch Differentiation eliminirt, so gelangt man direct zu den Gleichungen (1.) zurück.

## §. 3.

Durch diese Transformation sind nun die hydrodynamischen Gleichungen in der That auf Gleichungen der ersten Ordnung zurückgeführt. Allerdings ist dabei scheinbar die Zahl der unbekannten Functionen und der Differential-

gleichungen um eins vermehrt. Beachtet man aber, dass bei den incompressiblen Flüssigkeiten die Function $p$ in den Gleichungen (3.), (2.) gar nicht vorkommt, und dass selbst bei Gasen diese Function mittelst der Gleichung (4.) aus (2'.) eliminirt werden kann, so erkennt man, dass die Gleichungen (3.), (2.) oder (2'.) für sich integrirt werden können, und dass dann nachträglich die Function $p$ aus der Gleichung (4.) bestimmt wird. In den Fällen, wo die Function $p$ an einem Theil der Oberfläche oder an der ganzen Oberfläche gegeben ist, kann die Gleichung (4.) oder (4'.) unmittelbar auf den Theil der Grenze angewandt werden, wo $p$ gegeben ist, und enthält dann nur noch die unbekannten Functionen $x\ y\ z$ und $\lambda$. Sie vertritt in diesen Fällen die Stelle einer Grenzbedingung für diese Functionen und dient zur vollständigen Bestimmung derselben. Es ist also in der That, was die Integration anlangt, die Anzahl der unbekannten Functionen nicht vermehrt worden.

In dieser Form der hydrodynamischen Gleichungen lässt sich nun leicht auch die Voraussetzung eines Geschwindigkeitspotentials einführen.

Man hat nur anzunehmen, dass die Functionen $u_0\ v_0\ w_0$ die partiellen Differentialquotienten einer Function $\mu$ nach $a\ b\ c$ sind.

Man kann dann in den Gleichungen (3.) die Function $\mu$ mit $\lambda$ vereinigen, wodurch dieselben die Gestalt annehmen:

$$\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial a} = \frac{\partial \lambda}{\partial a},$$

$$\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial b}+\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial b}+\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial b} = \frac{\partial \lambda}{\partial b},$$

$$\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial c}+\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial c}+\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial c} = \frac{\partial \lambda}{\partial c}.$$

Die Function $\lambda$ ist dann so zu bestimmen, dass sie zur Zeit $t=0$ nicht verschwindet, sondern $\mu$ wird. Dadurch sind also die Functionen $u_0\ v_0\ w_0$ aus den Differentialgleichungen entfernt und in die Bedingungen des Anfangszustandes verlegt, wodurch eine wesentliche Erleichterung des Problems der Integration der partiellen Differentialgleichungen herbeigeführt wird.

Heidelberg, im October 1867.

---

# Ueber Kegelschnitte, die einer gewissen Bedingung genügen.

(Von Herrn *G. Bauer* in München.)

Seien $U=0$ und $V=0$ die Gleichungen zweier Kegelschnitte, also $U+\lambda V=0$ die Gleichung eines Kegelschnitts, der durch die Durchschnittspunkte von $U$ und $V$ geht; sei ferner $\delta$ die Discriminante von $U+\lambda V$, so hat man

$$\delta = \Delta+\lambda\Theta+\lambda^2\Theta'+\lambda^3\Delta',$$

wo $\Delta$, $\Delta'$ die Discriminanten von $U$ und $V$ sind, $\Theta$, $\Theta'$ aber Invarianten des Systems der beiden Kegelschnitte. Ist

$$U=(a,b,c,d,e,f)(x,y,z),\qquad V=(a',b',c',d',e',f')(x,y,z),$$

so ist

$$\Delta=abc+2def-ad^2-be^2-cf^2,\qquad \Delta'=a'b'c'+\cdots,$$

$$\Theta = a'\frac{\partial\Delta}{\partial a}+b'\frac{\partial\Delta}{\partial b}+\cdots+f'\frac{\partial\Delta}{\partial f}$$

$$=a'(bc-d^2)+b'(ca-e^2)+c'(ab-f^2)+2d'(ef-ad)+2e'(fd-be)+2f'(de-cf),$$

und $\Theta'$ ergiebt sich aus $\Theta$ durch Vertauschung der Coefficienten von $U$ und $V$.

Wie Herr *Salmon* gezeigt hat, ist $\Theta=0$ die Bedingung, dass der Kegelschnitt $V$ einem zu $U$ conjugirten Dreieck umschrieben ist. Dieselbe Bedingung $\Theta=0$ ist auch erfüllt, wenn die Seiten eines zu $V$ conjugirten Dreiecks den Kegelschnitt $U$ berühren *).

Da $\Theta$ vom ersten Grade ist in Bezug auf die Coefficienten von $V$, so giebt es in der Schaar von Kegelschnitten, welche durch vier Punkte gehen, nur einen Kegelschnitt $W$, der einem conjugirten Dreieck eines gegebenen Kegelschnitts $S$ umschrieben ist. Betrachtet man die Schaar von Kegelschnitten, welche durch die Durchschnittspunkte von $U$ und $V$ gehen, so dass $W$ von der Form $U+\lambda V$ ist, und bezeichnet man mit $\Theta_{W,S}$ diejenige Invariante von $W$ und $S$, in welche die Coefficienten von $W$ im ersten, die von $S$ im zweiten Grade eingehen, so ergiebt sich aus der Bedingung $\Theta_{W,S}=0$, sogleich

$$\lambda = -\frac{\Theta_{U,S}}{\Theta_{V,S}},$$

und mithin ist die Gleichung des Kegelschnitts $W$, der einem zu $S$ conjugirten

---

*) *Salmon*, Conics übers. v. *Fiedler*. Note VI.

Dreieck umschrieben ist,

$$(1.)\quad \Theta_{V,S}.U - \Theta_{U,S}.V = 0.$$

Die Gleichungen von $U$ und $V$ können unter die Form gebracht werden

$$(2.)\quad U = y^2 - z^2 + a(x^2 - z^2) = 0, \qquad V = y^2 - z^2 + a'(x^2 - z^2) = 0,$$

wo $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ die Gleichungen der Seiten des Dreiecks sind, welches den Durchschnittspunkt der Diagonalen und die Durchschnittspunkte der Gegenseiten des Vierecks $(U, V)$ zu Ecken hat. Ist $S$ ein demselben Viereck umschriebener Kegelschnitt, und

$$(3.)\quad y^2 - z^2 + k(x^2 - z^2) = 0$$

seine Gleichung, so ergiebt sich die Gleichung von $W$ nach Entfernung des Factors $(a'-a)(1+2k)$ in der Form

$$(4.)\quad y^2 - z^2 + K(x^2 - z^2) = 0,$$

wo $K = -\frac{(2+k)k}{1+2k}$.

Während nun in der Schaar der Kegelschnitte $U+\lambda V$ jedem Kegelschnitte $S$ ein Kegelschnitt $W$ entspricht, entsprechen jedem Kegelschnitt $W$ zwei Kegelschnitte $S$, $S_1$, welche conjugirte Dreiecke haben, die dem $W$ eingeschrieben sind. Die Parameter $k$, $k_1$ derselben ergeben sich aus dem Werthe von $K$

$$(5.)\quad \left.\begin{matrix} k \\ k_1 \end{matrix}\right\} = -(1+K) \pm \sqrt{1+K+K^2};$$

dieselben sind mithin immer reell, wenn $K$ es ist; auch ersieht man, dass

$$(6.)\quad kk_1 = K, \qquad k_1 = -\frac{2+k}{1+2k}.$$

Um nun die Gleichung der beiden Kegelschnitte $S$, $S_1$ zu finden, welche dem Kegelschnitt $W$ entsprechen, ersetze man in Gleichung (1.) $U$ durch $S$, so geht dieselbe, da $\Theta_{S,S} = 3\Delta$ wird, wenn $\Delta$ die Discriminante von $S$ bezeichnet, über in

$$(7.)\quad 3\Delta.V - \Theta_{V,S}.S = 0.$$

Sind $V$, $S$, $W$ in der Form (2.), (3.), (4.) ausgedrückt, so wird

$$3\Delta.V - \Theta.S = (a'-k)(1+2k)W,$$

wo $\Delta = -k(1+k)$, $\Theta = -(a'+2k+2a'k+k^2)$. Setzt man in dieser Gleichung $k_1$ statt $k$, so geht $S$ in $S_1$ über, während $V$ und $W$ ungeändert bleiben. Aus beiden Gleichungen ergiebt sich sodann, wenn man für $k$ und $k_1$ ihre Werthe in $K$ substituirt

$$-3(a'-K)^2 SS_1 = \alpha.V^2 + \beta.2VW + \gamma.W^2,$$

wo

$$\alpha = -9K(1+K) = 9\nabla, \quad \text{wenn } \nabla \text{ die Discriminante von } W,$$
$$\beta = 3(a'+2K+2a'K+K^2) = -3\Theta_{V,W},$$
$$\gamma = -3(K+2a'+2a'K+a'^2) = +3\Theta'_{V,W}$$

gefunden wird. Es ist also allgemein die Gleichung der beiden Kegelschnitte $S$, $S_1$, welche durch die Durchschnittspunkte von $V$ und $W$ gehen und conjugirte Dreiecke haben, welche $W$ inscribirt sind,

$$(8.)\qquad 3\nabla . V^2 - \Theta_{V,W} . 2V . W + \Theta'_{V,W} . W^2 = 0.$$

Ist $\nabla = 0$, d. h. zerfällt $W$ in zwei Gerade $A$, $B$, so zerfällt die Gleichung (8.) in die Gleichung $W=0$ und folgende

$$(9.)\qquad 2\Theta_{V,W} V - \Theta'_{V,W} . W = 0;$$

einer der Kegelschnitte $S$, $S_1$ fällt also mit $W$ zusammen, der andere, durch Gleichung (9.) dargestellt, ist derjenige Kegelschnitt, der durch die Durchschnittspunkte von $V$ mit $A$ und $B$ geht, und für welchen der Pol der einen Geraden auf der andern liegt. Ist die Gerade $B$ die unendlich entfernte Gerade, so ist der Kegelschnitt (9.) mit $V$ ähnlich und ähnlich liegend und hat die auf $A$ fallende Sehne von $V$ zum Durchmesser.

Lässt man hingegen in (8.) $V$ mit dem Kegelschnitt $S$ zusammenfallen, so wird $\Theta'_{V,W} = \Theta_{W,S} = 0$ und die Gleichung (8.) giebt sodann den Kegelschnitt $S_1$ ausgedrückt durch $S$ und $W$ in der Form

$$(10.)\qquad 3\nabla S - \Theta_{S,W} . 2W = 0.$$

Diese Gleichung giebt zu irgend einem Kegelschnitt $S$ den entsprechenden $S_1$ mit Hülfe des Kegelschnitts $W$, der durch Gleichung (7.) bestimmt ist. Man kann aber auch $S_1$ ohne Hülfe von $W$, unmittelbar in der Form $S+\lambda V$ ausgedrückt erhalten. Man hat hierzu nur zu bemerken, dass, wenn $S_1 = S+\lambda V$ ist, die Substitution von $S+\lambda V$ an die Stelle von $S$ die Gleichung (7.) des Kegelschnitts $W$ nicht ändern darf. Durch diese Substitution wird aber Gleichung (7.)

$$3\delta V - \vartheta(S+\lambda V) = 0,$$

wo $\delta$, $\vartheta$ das bedeuten, was $\triangle$, $\Theta_{V,S}$ werden, wenn man $S+\lambda V$ statt $S$ setzt. Die Vergleichung dieser Gleichung mit (7.) giebt

$$\frac{3\delta - \vartheta . \lambda}{3\triangle} = \frac{\vartheta}{\Theta}.$$

Nun ist aber

$$\delta = \triangle + \Theta . \lambda + \Theta' . \lambda^2 + \triangle' . \lambda^3, \qquad \vartheta = \Theta + 2\Theta' . \lambda + 3\triangle' . \lambda^2.$$

Die Substitution dieser Werthe giebt für die Bestimmung von $\lambda$ die Gleichung

$$\lambda[2(\Theta^2 - 3\triangle\Theta') + (\Theta\Theta' - 9\triangle\triangle')\lambda] = 0.$$

Die Wurzel $\lambda = 0$ entspricht dem Kegelschnitt $S$; die andere Wurzel ent-

spricht dem $S_1$. Die gesuchte Gleichung von $S_1$ wird demnach

$$(11.)\qquad (\Theta\Theta'-9\triangle\triangle')S-2(\Theta^2-3\triangle\Theta')V = 0$$

$\triangle$, $\triangle'$ sind hier die Discriminanten von $S$ und $V$; $\Theta$ und $\Theta'$ stehen für $\Theta_{r,s}$ und $\Theta'_{r,s}$.

Setzt man in dieser Gleichung $W$ an die Stelle von $V$, so ist $\Theta=0$. $\triangle'$ geht in $\nabla$ über und man erhält die Gleichung (10.).

Setzt man endlich in (11.) $S_1$ statt $V$, so muss, da die Gleichung sich auf $S_1=0$ reduciren soll,

$$(12.)\qquad \Theta\Theta'-9\triangle\triangle_1 = 0$$

sein, wo $\triangle_1$ die Discriminante von $S_1$ ist, und $\Theta$, $\Theta'$ für $\Theta_{s,s_1}$, $\Theta'_{s,s_1}$ stehen. Dies ist mithin die Bedingung, dass zwei Kegelschnitte $S$, $S_1$ conjugirte Dreiecke haben, welche demselben durch die Durchschnittspunkte von $S$ und $S_1$ gehenden Kegelschnitt eingeschrieben sind.

Diese Bedingungsgleichung (12.) ergiebt sich auch sogleich aus Gleichung (7.), wenn man darin $S_1$ statt $V$ setzt und bemerkt, dass die Gleichung denselben Kegelschnitt darstellt, wenn man $S$ und $S_1$ vertauscht.

Als Beispiel seien die beiden Kreise

$$x^2+y^2-2mx-k^2=0, \qquad x^2+y^2-2m_1x-k^2=0$$

gegeben, welche die Axe der $y$ zur Radikalaxe haben. Dieselben stehen in dem Verhältniss von $S$ und $S_1$ zueinander, wenn $mm_1=3k^2$, da in diesem Falle $\Theta\Theta'-9\triangle\triangle_1=(m-m_1)^2(2mm_1-6k^2)$ gefunden wird. Der zugehörige Kegelschnitt $W$ ergiebt sich sodann aus (7.)

$$x^2+y^2+(m+m_1)x-k^2 = 0,$$

ein Kreis, dessen Lage zu den beiden ersten Kreisen ersichtlich ist.

München, im Mai 1867.

---

## Inhaltsverzeichniss des acht und sechzigsten Bandes dritten Hefts.

# Journal

für die

# reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Als Fortsetzung des von

A. L. Crelle

gegründeten Journals

herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

**Schellbach, Kummer, Kronecker, Weierstrass**

von

**C. W. Borchardt.**

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preussischer Behörden.

---

**Acht und sechzigster Band.**

Viertes Heft.

Mit zwei Figurentafeln.

---

Berlin, 1868.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

# Recherches sur les polyèdres.

**(Second mémoire.)**

(Par M. *Camille Jordan* à Paris.)

---

## Théorie des aspects rétrogrades.

### I°.

### Généralités.

Dans un précédent mémoire, nous avons défini d'une manière précise les ***aspects***, tant ***directs*** que ***rétrogrades*** des polyèdres, et nous avons assigné dans quelles circonstances plusieurs des aspects directs que présente un même polyèdre peuvent devenir semblables entre eux. Pour compléter cette théorie, il nous reste à traiter des aspects rétrogrades, et à les comparer, soit entre eux, soit avec les aspects directs.

La comparaison mutuelle des aspects rétrogrades résulte immédiatement de celle des aspects directs. En effet, un seul aspect, soit direct, soit rétrograde, étant donné, suffit pour déterminer l'enchainement des faces, et par suite tous les autres aspects, tant directs que rétrogrades.

Cela posé, on voit aisément que *la similitude de deux aspects directs entraine celle des aspects rétrogrades, correspondant aux mêmes sommets et arêtes, et réciproquement.* En effet, soient par exemple $A$, $A'$ deux aspects directs semblables entre eux. De l'aspect $A$ on déduira sans ambiguïté l'aspect rétrograde A correspondant au même sommet et à la même arête: de l'aspect $A'$ on déduira de la même façon l'aspect rétrograde correspondant A'. Les deux aspects $A$, $A'$, qui sont les données à partir desquelles se fait cette déduction, étant semblables, les résultats seront les mêmes de part et d'autre. Les deux aspects A, A' seront donc semblables.

Il ne reste donc plus qu'à chercher dans quel cas un polyèdre est tel que quelqu'un de ses aspects directs $A$ soit semblable à l'un de ses aspects rétrogrades A. Si cette circonstance se présente, soient $c$ un élément ou arête de ce polyèdre: $\gamma$ l'élément ou l'arête qui porte relativement à l'aspect A le même numéro que $c$ dans l'aspect $A$: nous dirons que $\gamma$ est *l'homologue inverse* de $c$ relativement aux deux aspects $A$ et A.

Un élément ou arête $\gamma$ est dit *inverse* à un autre élément ou arête $c$, si l'on peut déterminer deux aspects, l'un direct $A$, l'autre rétrograde A, relativement auxquels $\gamma$ soit l'homologue inverse de $c$.

*Si $\gamma$ est inverse à $c$, réciproquement $c$ sera inverse à $\gamma$.* En effet, supposons que l'aspect $A$ soit pris par rapport au sommet $a$ et à l'arête $ab$; l'aspect A par rapport au sommet $\alpha$ et à l'arête $\alpha\beta$. L'aspect direct $A$ étant connu, on en déduira sans ambiguïté l'ordre de succession des faces, et par suite l'aspect rétrograde $\mathrm{A}_1$ relatif à $a$ et à $ab$, ainsi que le numéro de $c$ dans ce nouvel aspect. De même, l'aspect rétrograde A étant connu, on en déduira l'aspect direct $A_1$ relatif à $\alpha$ et $\alpha\beta$, et le numéro de $\gamma$ sous ce dernier aspect. Les deux aspects $A$ et A sont semblables: d'ailleurs la déduction se fera de même dans l'un et l'autre cas: car l'aspect rétrograde A devient, comme nous l'avons vu dans le 1^er^ mémoire, un aspect direct pour un observateur qui se placerait sur la surface intérieure du polyèdre. L'aspect rétrograde $\mathrm{A}_1$ est donc semblable à l'aspect direct $A_1$, et $c$ est homologue inverse de $\gamma$ relativement à ces deux aspects.

Théorème. *Soient $A$ et A deux aspects semblables, l'un direct, l'autre rétrograde, d'un même polyèdre: $a$ un sommet quelconque de ce polyèdre, $ab$ une arête qui y passe, $c$ une arête ou élément quelconque, $\alpha$, $\alpha\beta$, $\gamma$ les homologues inverses de $a$, $ab$, $c$ par rapport aux aspects $A$ et A. L'aspect direct $A_1$ du polyèdre relatif à $a$, $ab$, sera semblable à l'aspect rétrograde $\mathrm{A}_1$ relatif à $\alpha$, $\alpha\beta$, et $\gamma$ sera l'homologue inverse de $c$ relativement à ces deux nouveaux aspects.*

En effet, l'aspect direct $A$ étant connu, l'enchainement des faces du polyèdre sera complètement déterminé. On en déduira donc sans ambiguïté, et l'aspect direct $A_1$ relatif à $a$, $ab$, et le numéro que portera $c$ dans ce nouvel aspect. De l'aspect rétrograde A on déduira de la même manière et sans ambiguïté l'aspect rétrograde $\mathrm{A}_1$ relatif à $\alpha$, $\alpha\beta$, et le numéro que portera $\gamma$ sous ce nouvel aspect. Les données à partir desquelles se fait la déduction étant exactement les mêmes de part et d'autre, les résultats devront être les mêmes. Les deux aspects $A_1$ et $\mathrm{A}_1$ seront donc semblables, et en outre $c$ et $\gamma$ y auront respectivement les mêmes numéros.

Ce théorème fournit immédiatement le corollaire suivant:

*Si un aspect direct d'un polyèdre est semblable à l'un de ses aspects rétrogrades, chacun de ses aspects directs sera semblable à quelqu'un des aspects rétrogrades.*

Théorème. *Deux éléments ou arêtes $E$, $E'$, inverses à un troisième* E *sont pareils entre eux.*

En effet, comparons entre eux les aspects $A$, A relativement auxquels E est l'homologue inverse de $E$: soient $\alpha\beta$ une arête quelconque du polyèdre, $ab$ l'arête dont $\alpha\beta$ est l'homologue inverse relativement aux deux aspects $A$, A: l'aspect rétrograde $\mathrm{A}_1$ relatif à $\alpha$, $\alpha\beta$ est semblable à l'aspect direct $A_1$ relatif à $a$, $ab$: et E est l'homologue inverse de $E$ relativement à ces deux nouveaux aspects.

On voit de même qu'il existe un aspect direct $A_1'$ semblable à l'aspect rétrograde $\mathrm{A}_1$ et tel que E soit l'homologue inverse de $E'$.

Les deux aspects $A_1$, $A_1'$, tous deux semblables à $\mathrm{A}_1$, sont semblables entre eux. D'ailleurs $E$, $E'$ portent respectivement sous ces deux aspects un même numéro, celui que porte E sous l'aspect $\mathrm{A}_1$. $E$ et $E'$ sont donc pareils entre eux.

Théorème. *Réciproquement, si deux éléments ou arêtes $E$,* E *sont inverses l'un de l'autre, tout élément ou arête pareil à $E$ est inverse à* E.

En effet soient $\alpha$, $\alpha\beta$ et $a$, $ab$ les sommets et arêtes par rapport auxquels sont pris les aspects A et $A$ relativement auxquels E est l'homologue inverse de $E$. Si nous comparons entre eux les aspects $B$ et $B'$ relativement auxquels $E'$ est l'homologue de $E$, $a$ et $ab$ auront pour homologues un autre sommet et une autre arête $a'$ et $a'b'$. L'aspect $A'$ relatif à $a'$ et $a'b'$ doit être semblable à l'aspect $A$ relatif à $a$ et $ab$, et $E'$ sera l'homologue de $E$ relativement à ces deux aspects (1er mémoire). Les deux aspects A et $A'$ seront donc semblables, et E inversement homologue de $E'$ relativement à ces aspects: car les numéros qu'ils y portent sont les mêmes, chacun d'eux étant le même que porte $E$ dans l'aspect $A$.

Corollaire. *Tout élément ou arête inverse à l'un de ses homologues est inverse à lui-même.*

Théorème. *Si un élément $E$ présente une symétrie de rotation d'ordre $k$, tout élément* E *inverse à celui-là présentera également une symétrie de rotation d'ordre $k$.*

En effet, si l'élément $E$ est un sommet, il existe $k$ arêtes $Ea$, $Eb$, $Ec$, ... partant de ce point et relativement auxquelles l'aspect du polyèdre est le même. Cela posé, comparons les deux aspects A et $A$ relativement auxquels $E$ a pour homologue inverse E: les arêtes $Ea$, $Eb$, $Ec$ auront respectivement pour homologues inverses des arêtes $\mathrm{E}\alpha$, $\mathrm{E}\beta$, $\mathrm{E}\gamma$, ... issues de E: les aspects

rétrogrades respectivement relatifs à E et E$\alpha$, E et E$\beta$ etc. sont tous semblables entre eux: car ils sont respectivement semblables aux aspects directs relatifs à $E$ et $Ea$, à $E$ et $Eb$ etc. qui sont semblables entre eux, par hypothèse. D'ailleurs les aspects directs respectivement relatifs à E et E$\alpha$, à E et E$\beta$ etc. se déduisent chacun sans ambiguïté de l'aspect inverse correspondant. Ils sont donc semblables entre eux, ce qui démontre le théorème.

Si l'élément $E$ est une face, les aspects relatifs à $k$ arêtes $ab$, $cd$, ... etc. bordant cette face, sont semblables entre eux. Si l'on compare entre eux les deux aspects A et $A$, $ab$, $cd$, ... auront respectivement pour homologues inverses des arêtes $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, ... etc. bordant E: et les aspects rétrogrades relatifs à ces dernières arêtes, et par suite les aspects directs correspondants seront semblables entre eux.

Théorème. *Si une arête ab présente la symétrie de retournement, son inverse $\alpha\beta$ présentera la même symétrie.*

En effet comparons entre eux les deux aspects A et $A$ relativement auxquels $\alpha\beta$ est l'homologue inverse de $ab$, $\alpha$ étant l'homologue inverse de $a$, et par suite $\beta$ l'homologue inverse de $b$. Les deux aspects directs $a$, $ab$ et $b$, $ba$ relatifs à l'arête $ab$ sont semblables par hypothèse: les deux aspects rétrogrades $\alpha$, $\alpha\beta$ et $\beta$, $\beta\alpha$ respectivement semblables aux précédents, seront semblables entre eux. Les aspects directs correspondants seront donc évidemment aussi semblables entre eux.

Théorème. *Si S est un sommet inverse à lui-même, soit k l'ordre de la symétrie par rotation que présente ce sommet: parmi les arêtes et les faces qui se croisent en S, il en existe 2k qui sont inversement homologues à elles-mêmes par rapport à des aspects relativement auxquels S est également inversement homologue à lui-même.*

*Réciproquement, si 2k arêtes ou faces, issues du sommet S, jouissent de cette propriété, il y aura une rotation d'ordre k autour de S.*

Soit en effet $Sa$ une arête arbitrairement choisie parmi celles qui sont issues du point $S$. Imaginons, qu'un observateur, situé sur cette arête, dans les environs du point $S$, se mette à tourner dans le sens direct autour de ce point en cheminant sur la surface extérieure du polyèdre; il traversera successivement les arêtes et les faces qui aboutissent en $S$. Donnons le numéro 0 à l'arête initiale $Sa$, le numéro 1 à la première face que l'on traverse, le numéro 2 à la seconde arête, le numéro 3 à la seconde face, etc. Les arêtes successives auront ainsi la série des numéros pairs, et les faces qui les séparent,

la série des numéros impairs. Enfin, si $K$ est le nombre des arêtes issues de $S$, la série des numéros s'arrêtera à $2K-1$, le numéro $2K$ retombant sur la 1ère arête, déjà marquée du numéro 0, le numéro $2K+1$ sur la 1ère face, qui a déjà le numéro 1, etc.

Soit $Sb$ la première arête pareille à $Sa$ que l'on rencontre en tournant autour de $S$; soit $2\mu$ son numéro: $Sb$ est la $\mu^{\text{ième}}$ arête que l'on rencontre après $Sa$ dans ce mouvement de rotation. Si l'on compare entre eux les deux aspects semblables respectivement relatifs à $S$, $Sa$ et à $S$, $Sb$ on voit que la première arête pareille à $Sb$ (ou à $Sa$), que l'on rencontrera ensuite, sera la $\mu^{\text{ième}}$ à partir de $Sb$, soit la $2\mu^{\text{ième}}$ à partir de $Sa$; puis viendra la $\mu^{\text{ième}}$ à partir de cette dernière, qui sera la $3\mu^{\text{ième}}$ à partir de $Sa$, etc. On aura ainsi une succession d'arêtes pareilles à $Sa$, et dont les numéros sont respectivement ceux de la suite

$$(\Sigma) \quad 0 \quad 2\mu \quad 4\mu \quad \ldots \quad 2n\mu \quad \text{etc.}$$

Le nombre $\mu$ est un diviseur de $K$. En effet, posons $K = m\mu + \nu$, $\nu$ étant un entier inférieur à $\mu$. L'arête dont le numéro est $2(m+1)\mu$, ou en retranchant les multiples de $2K$, $2(\mu-\nu)$, est pareille à $Sa$. Et cette arête serait, contrairement à notre hypothèse, plus voisine de $Sa$ que ne l'est $Sb$, si $\nu$ n'était pas nul. On a donc simplement $K = m\mu$: d'ailleurs la série $(\Sigma)$ contient $m$ arêtes distinctes pareilles à $Sa$

$$0 \quad 2\mu \quad 4\mu \quad \ldots \quad 2(m-1)\mu.$$

Le nombre de ces arêtes étant $k$, par hypothèse, on a $m = k$, d'où $K = k\mu$.

Cela posé, comparons entre eux les deux aspects relativement auxquels $S$ est supposé inversement homologue à lui-même: l'arête $Sa$ aura pour homologue inverse une autre arête $S\alpha$, également issue de $S$: soit $2\lambda$ le numéro de cette arête. Les $k$ arêtes issues de $S$ et pareilles à celle-là seront celles dont les numéros appartiennent à la série

$$(\Sigma') \quad 2\lambda \quad 2\mu+2\lambda \quad 4\mu+2\lambda \quad \ldots \quad 2n'\mu+2\lambda \quad \ldots \quad \text{etc.}$$

Soient $Sd$, $S\delta$ deux arêtes choisies arbitrairement l'une dans la série $\Sigma$, l'autre dans la série $\Sigma'$: $2n\mu$ et $2n'\mu+2\lambda$ leurs numéros respectifs. Il existe une face ou arête dont le numéro est $(n+n')\mu+\lambda$; c'est la $(n'-n)\mu+\lambda^{\text{ième}}$ que l'on rencontre après $Sd$ en tournant dans le sens direct autour de $S$: c'est de même la $(n'-n)\mu+\lambda^{\text{ième}}$ que l'on rencontre après $S\delta$, en tournant dans le sens rétrograde autour de $S$. L'aspect direct relatif à $S$, $Sd$ étant semblable à l'aspect rétrograde relatif à $S$, $S\delta$, cette face ou arête sera inversement homologue à elle-même relativement à ces deux aspects.

Les entiers $n$, $n'$ étant arbitraires, on pourra donner successivement à $n+n'$ chacune des $2k$ valeurs $0, 1 \ldots p, \ldots 2k-1$: on aura ainsi $2k$ faces ou arêtes essentiellement distinctes

$$\lambda \quad \mu+\lambda \quad 2\mu+\lambda \ldots p\mu+\lambda \ldots (2k-1)\mu+\lambda$$

et dontchacune est inverse à elle-même.

Remarquons que *ces faces ou arêtes sont opposées deux à deux dans l'angle polyèdre $S$.* En effet, soit $p\mu+\lambda$ le numéro de l'une d'entre elles: son opposée, ayant pour numéro $K+p\mu+\lambda=(p+k)\mu+\lambda$, fait partie de la suite $\lambda$, $\mu+\lambda \ldots$ etc.

Supposons réciproquement que parmi les arêtes ou faces aboutissant en $S$, il en existe $2k$ qui soient inverses à elles-mêmes: il existera autour de $S$ une symétrie de rotation d'ordre $k$.

En effet, numérotons comme précédemment les arêtes et faces qui aboutissent en $S$, en leur donnant la suite des numéros $0, 1, \ldots 2K-1$. Soient $n, n', \ldots n^{2k-1}$ les numéros d'ordre des faces et arêtes qui sont inverses à elles-mêmes, rangés par ordre de grandeur. Les différences successives de ces nombres

$$n'-n, \quad n''-n', \quad \ldots \quad n-n^{2k-1}+2K$$

sont en nombre $2k$ et leur somme est évidemment égale à $2K$. L'une d'elles au moins est donc égale ou inférieure à $\frac{2K}{2k}$.

Soit donc, par exemple, $n'-n=\mu \leqq \frac{2K}{2k}$: et supposons en premier lieu que l'un des deux numéros, $n$ par exemple, représente une arête. Comparons ensemble les deux aspects relativement auxquels la face ou arête $n'$ est inversement homologue à elle-même. L'arête dont le numéro est $n=n'-\mu$ étant la $\mu^{\text{ième}}$ des faces et arêtes que l'on rencontre après celle dont le numéro est $n'$, lorsque on tourne dans le sens rétrograde autour de $S$, sera l'homologue inverse d'une autre arête, qui sera la $\mu^{\text{ième}}$ rencontrée après $n'$ en tournant dans le sens direct, et dont le numéro sera par suite $n'+\mu$. L'aspect direct relatif à cette dernière arête sera semblable à l'aspect rétrograde relatif à l'arête $n$: d'ailleurs, par hypothèse, ce dernier aspect est semblable à l'aspect direct correspondant à la même arête $n$: donc les aspects directs relatifs aux arêtes dont les numéros sont respectivement $n$ et $n'+\mu=n+2\mu$, sont semblables entre eux. On en déduit successivement que les aspects directs relatifs à toutes les arêtes de la série

$$n \quad n+2\mu \quad n+4\mu \quad \text{etc.}$$

sont semblables entre eux. Le nombre $\mu$ étant $\leqq \frac{2K}{2k}$ les $k$ premiers termes au moins de cette série seront incongrus par rapport au module $2K$. On aura donc une rotation d'un ordre au moins égal à $k$. Mais cet ordre ne peut dépasser $k$: car alors, d'après la première partie de la démonstration, le nombre des faces ou arêtes inverses à elles-mêmes surpasserait $2k$.

Supposons en second lieu que les deux numéros $n$, $n'$ désignent tous les deux des faces, $F$ et $F'$. Comparons ensemble les deux aspects relativement auxquels $F'$ est inversement homologue à elle-même: $F$ étant la $\mu^{\text{ième}}$ des faces et arêtes que l'on rencontre après $F'$ en tournant dans le sens rétrograde, sera l'homologue inverse d'une autre face $F_1$, qui sera la $\mu^{\text{ième}}$ que l'on rencontre après $F'$ en tournant dans le sens direct, et portera le numéro $n'+\mu = n+2\mu$.

Soient $Sa$, $Sb$ les deux arêtes qui limitent la face $F$ (Fig. 1). L'arête $Sa$ portera le numéro $n+1$, l'arête $Sb$ le numéro $n-1$, et leurs homologues inverses $Sa_1$, $Sb_1$, qui bordent la face $F_1$, porteront respectivement les numéros $n+2\mu-1$, $n+2\mu+1$. L'aspect direct relatif à l'arête $Sa_1$ est semblable à l'aspect rétrograde relatif à son homologue inverse $Sa$. D'autre part, si nous comparons ensemble les deux aspects relativement auxquels la face $F$ est inversement homologue à elle-même, les arêtes $Sa$, $Sb$ seront respectivement homologues inverses l'une de l'autre: l'aspect direct relatif à $Sb$ est donc semblable à l'aspect rétrograde relatif à $Sa$, et par suite à l'aspect direct relatif à $Sa_1$. Les numéros de $Sb$, $Sa_1$ étant respectivement $n-1$, $n-1+2\mu$, on verra comme tout à l'heure que les aspects directs relatifs à toutes les arêtes de la série

$$n-1 \quad n-1+2\mu \quad n-1+4\mu \quad \ldots \quad \text{etc.}$$

sont semblables entre eux. La quantité $\mu$ étant $\leqq \frac{2K}{2k}$ cette série contiendra au moins $k$ termes différents. D'ailleurs elle ne peut en contenir davantage: car alors le nombre des faces ou arêtes inverses à elles-mêmes dépasserait $2k$.

On démontre d'une manière analogue le théorème suivant:

Théorème: *Si $F$ est une face inverse à elle-même, soit $k$ l'ordre de la symétrie par rotation que présente cette face: parmi les arêtes et les sommets situés sur le contour de $F$ il en existe $2k$ qui sont inversement homologues à eux-mêmes par rapport à des aspects relativement auxquels $F$ est inversement homologue à elle-même.*

*Réciproquement si $2k$ arêtes ou sommets, situés sur le contour de $F$, jouissent de cette propriété, il y aura une rotation d'ordre $k$ autour de $F$.*

Soit en effet $a$ un sommet arbitrairement choisi parmi ceux qui sont situés sur le contour de $F$. Imaginons qu'un observateur d'abord placé en ce sommet se mette à tourner dans le sens direct autour de $F$. Il rencontrera successivement les arêtes et sommets qui bordent cette face. Donnons aux sommets successifs la suite des numéros pairs $0, 2, 4, \ldots 2K-2$, aux arêtes successives la suite des numéros impairs $1, 3, \ldots 2K-1$, $K$ désignant le nombre des côtés de la face. Les numéros suivants $2K$, $2K+1$, etc. retomberont sur les sommets et arêtes déjà marqués des numéros $0, 1, \ldots$ etc.

Comparons entre eux les divers aspects relativement auxquels $F$ est sa propre homologue: $a$ aura pour homologues $k$ sommets distincts situés sur le contour de $F$. Soit $a_1$ le premier de ces sommets que l'on rencontre après $a$, $2\mu$ son numéro. Comparons spécialement entre eux les deux aspects relativement auxquels $a_1$ est l'homologue de $a$. La première arête $ab$, issue de $a$ et bordant sur sa droite la face $F$ a pour homologue $a_1 b_1$, qui est issue de $a_1$, et laisse également $F$ à sa droite: $b$ aura donc pour homologue $b_1$; $bc$ aura pour homologue $b_1 c_1$ etc.; $a_1$ aura donc pour homologue un nouveau sommet $a_2$, dont le numéro d'ordre est $4\mu$, etc. On aura ainsi une succession de sommets pareils à $a$, et dont les numéros sont ceux de la suite

$$(\Sigma) \quad 0 \quad 2\mu \quad 4\mu \quad \ldots \quad 2n\mu \quad \text{etc.}$$

On verra comme dans le théorème précédent que l'on a $K = k\mu$.

Cela posé, comparons entre eux les deux aspects relativement auxquels $F$ est inversement homologue à elle-même. Le sommet $a$ aura pour homologue inverse un autre sommet $\alpha$ également situé sur le contour de $F$: soit $2\lambda$ le numéro d'ordre de ce nouveau sommet. Les $k$ sommets situés sur le contour de $F$ et pareils à celui-là seront ceux dont les numéros appartiennent à la série

$$(\Sigma') \quad 2\lambda \quad 2\mu+2\lambda \quad 4\mu+2\lambda \quad \ldots \quad 2n'\mu+2\lambda \quad \ldots\ldots$$

Soient $a_n$, $\alpha_{n'}$ deux sommets quelconques, pris arbitrairement l'un dans la suite $\Sigma$, l'autre dans la suite $\Sigma'$: soient $2n\mu$, $2n'\mu+2\lambda$ leurs numéros respectifs. Comparons entre eux les aspects relativement auxquels $a_n$ a pour homologue inverse $\alpha_{n'}$, $F$ restant inversement homologue à elle-même.

Un observateur tournant dans le sens direct autour du sommet $2n\mu$ entre sur la face $F$ en traversant l'arête $2n\mu+1$: il en sort au contraire en traversant l'arête $2n\mu-1$. De même un observateur tournant dans le sens rétrograde autour du sommet $2n'\mu+2\lambda$ entre sur $F$ en traversant l'arête $2n'\mu+2\lambda-1$ et en sort par l'arête $2n'\mu+2\lambda+1$. L'arête $2n\mu+1$ a donc pour homologue inverse l'arête $2n'\mu+2\lambda-1$. Son extrémité $2n\mu+2$ aura

donc pour homologue inverse le sommet $2n'\mu+2\lambda-2$, extrémité de l'arête $2n'\mu+2\lambda-1$. De même l'arête $2n\mu+3$ aura pour homologue inverse l'arête $2n'\mu+2\lambda-3$ etc. Donc enfin l'arête ou sommet dont le numéro est $2n\mu+(n'-n)\mu+\lambda = 2n'\mu+2\lambda-\{(n'-n)\mu+\lambda\} = (n+n')\mu+\lambda$ sera inversement homologue à lui-même.

Les entiers $n$, $n'$ étant arbitraires, on pourra donner successivement à $n+n'$ chacune des $2k$ valeurs $0, 1, \ldots p, \ldots 2k-1$. On aura ainsi $2k$ sommets ou arêtes essentiellement distincts

$$\lambda \quad \mu+\lambda \quad 2\mu+\lambda \quad \ldots \quad p\mu+\lambda \quad \ldots \quad (2k-1)\mu+\lambda$$

et dont chacun est inverse à lui-même.

Remarquons que *ces sommets ou arêtes sont opposés deux à deux dans le polygone $F$.* En effet, soit $p\mu+\lambda$ le numéro de l'un d'entre eux: son opposé, ayant pour numéro $K+p\mu+\lambda = (p+k)\mu+\lambda$, fait partie de la suite $\lambda$, $\mu+\lambda \ldots$ etc.

Supposons réciproquement que parmi les sommets ou arêtes situés sur le contour de $F$ il en existe $2k$ dont chacun soit inversement homologue à lui-même relativement à des aspects par rapport auxquels $F$ soit également inversement homologue à elle-même. Il existera autour de $F$ une symétrie de rotation d'ordre $k$.

En effet, numérotons comme précédemment les sommets et arêtes du contour en leur donnant la suite des numéros $0, 1, \ldots 2K-1$. Soient $n, n', \ldots n^{2k-1}$ les numéros d'ordre des sommets et arêtes qui sont inverses à eux-mêmes, rangés par ordre de grandeur. Les différences successives de ces nombres

$$n'-n, \quad n''-n', \quad \ldots \quad n-n^{2k-1}+2K$$

sont en nombre $2k$, et leur somme est évidemment égale à $2K$. L'une d'elles au moins est donc égale ou inférieure à $\frac{2K}{2k}$.

Soit donc, par exemple, $n'-n = \mu \leqq \frac{2K}{2k}$: trois cas sont à distinguer:

1°. Si les deux numéros $n$, $n'$ désignent des sommets, comparons ensemble les deux aspects relativement auxquels $n'$ est inversement homologue à lui-même. L'arête $n'+1$ par laquelle un observateur tournant dans le sens direct autour de $n'$ entre dans la face $F$ aura pour homologue inverse l'arête $n'-1$ par laquelle ce même observateur entre dans la face $F$ en tournant dans le sens rétrograde. Le sommet $n'+2$ aura pour homologue inverse le sommet $n'-2$ etc. Donc enfin le sommet $n = n'-\mu$ sera l'homologue inverse

du sommet $n'+\mu$, et l'arête $n'-\mu-1$ sera l'homologue inverse de l'arête $n'+\mu+1$.

L'aspect direct relatif au sommet $n'+\mu$ et à l'arête $n'+\mu+1$ sera donc semblable à l'aspect rétrograde relatif au sommet $n'-\mu$ et à l'arête $n'-\mu-1$: mais ce dernier est semblable à l'aspect direct relatif au sommet $n'-\mu$ et à l'arête $n'-\mu+1$, puisque nous supposons que le sommet $n'-\mu=n$ est inverse à lui-même. Donc les aspects directs relatifs à $n$, $n+1$ d'une part, et à $n'+\mu=n+2\mu$, $n+2\mu+1$ d'autre part, sont semblables entre eux. On en déduit successivement que les aspects directs relatifs à

$$n \text{ et } n+1, \quad n+2\mu \text{ et } n+2\mu+1, \quad n+4\mu \text{ et } n+4\mu+1, \quad \text{etc.}$$

sont semblables entre eux. Le nombre $\mu$ étant $\leqq \frac{2K}{2k}$, les $k$ premiers termes de cette série seront différents par rapport au module $2K$. D'ailleurs la face $F$ étant située immédiatement à la droite de chacune des arêtes $n+1$, $n+2\mu+1$ etc. sera sa propre homologue sous tous ces aspects. Il existe donc autour de cette face une symétrie de rotation d'un ordre au moins égal à $k$: mais cet ordre ne peut dépasser $k$; car, d'après la première partie de la démonstration, le nombre des faces ou arêtes inverses à elles-mêmes dépasserait $2k$.

2°. Supposons en second lieu que l'un des deux numéros $n$, $n'$, $n'$ par exemple, représente une arête. Comparons entre eux les deux aspects relativement auxquels $n'$ est sa propre homologue inverse: le sommet $n'+1$ aura pour homologue inverse $n'-1$. En effet un observateur tournant dans le sens direct autour de $n'+1$ sort de la face $F$ en traversant l'arête $n'$. Un observateur tournant dans le sens rétrograde autour du sommet qui est l'homologue inverse de $n'+1$ doit donc sortir de la face $F$ (inversement homologue à elle-même) en traversant l'arête $n'$ (inversement homologue à elle-même). Ce sommet cherché n'est donc pas $n'+1$: c'est donc $n'-1$.

On déduit de là que $n'-2$, $n'-3$, ... enfin $n=n'-\mu$ sont respectivement les homologues inverses de $n'+2$, $n'+3$, ... $n'+\mu$. La démonstration s'achève comme tout à l'heure.

3°. Supposons enfin que $n$, $n'$, soient deux arêtes. Comparons entre eux les deux aspects relativement auxquels $n'$ est sa propre homologue inverse: $n-1$, $n$, $n+1$ seront respectivement les homologues inverses des sommets et arêtes suivants: $n'+\mu+1=n+2\mu+1$, $n+2\mu$, $n+2\mu-1$. L'aspect direct relatif au sommet $n+2\mu-1$ et à l'arête $n+2\mu$ est donc semblable à l'aspect rétrograde relatif au sommet $n+1$ et à l'arête $n$. Mais l'arête $n$ étant inverse

à elle-même, l'aspect rétrograde relatif à $n+1$ et $n$ est semblable à l'aspect direct relatif à $n-1$, $n$. Ce dernier est donc semblable à l'aspect direct relatif à $n+2\mu-1$ et $n+2\mu$. La démonstration s'achève encore comme dans le premier cas.

Théorème. *Si un élément jouissant d'une symétrie de rotation d'ordre $k$ est inverse à lui-même, on pourra déterminer à partir de cet élément $k$ zônes distinctes formées chacune d'une suite de faces et d'arêtes toutes inverses à elles-mêmes, qui se relient les unes aux autres par des sommets et des arêtes également inverses à eux-mêmes.*

*Chacune de ces zônes fait le tour du polyèdre, et le divise en deux moitiés, inverses l'une de l'autre, et contenant chacune le même nombre d'éléments et d'arêtes.*

Supposons, pour fixer les idées, que l'élément considéré soit un sommet $S$ (Fig. 2). Il existera $2k$ faces ou arêtes issues de ce point, et inverses à elles-mêmes. Soit $B$ l'une d'elles choisie arbitrairement: nous supposerons encore, pour fixer les idées, que $B$ est une arête $Sb$.

Comparons entre eux les deux aspects $A$ et A l'un direct, l'autre rétrograde, relativement auxquels $S$ et $B$ sont simultanément inversement homologues à eux-mêmes. L'autre extrémité de $B$, $b$ est évidemment son propre homologue inverse.

Le point $b$ est le sommet d'un angle polyèdre dans lequel il existera une face ou arête $C$, opposée à $B$, et qui sera évidemment sa propre homologue inverse. Car en désignant par $2K$ le nombre total des faces et arêtes qui se coupent en $b$, $C$ est celle que l'on rencontre la $K^{\text{ième}}$ en tournant autour du point $b$, soit dans le sens direct, soit dans le sens rétrograde, à partir de $bS$, qui est sa propre homologue inverse.

Supposons que $C$ soit une arête $bc$: son extrémité $c$ sera sa propre homologue inverse, et le point $c$ est le sommet d'un angle polyèdre dans lequel il existera une face ou arête $D$, opposée à $C$, et qui sera sa propre homologue inverse.

Supposons cette fois que $D$ soit une face. Les deux arêtes $c\alpha$, $c\alpha'$, qui la bordent, sont inversement homologues l'une de l'autre: car si l'on désigne par $2K$ le nombre total des arêtes et faces qui se coupent en $c$, $c\alpha$ est celle que l'on rencontre la $K-1^{\text{ème}}$ en tournant autour du point $c$ dans le sens direct, à partir de $cb$: et $c\alpha'$ est celle que l'on rencontre la $K-1^{\text{ème}}$ en tournant dans le sens rétrograde. L'arête $c\alpha$ ayant pour homologue inverse

$c\alpha'$, $\alpha$ aura pour homologue inverse $\alpha'$: l'arête suivante $\alpha\beta$ parmi celles qui bordent $D$ aura pour homologue inverse $\alpha'\beta'$: $\beta$ aura pour homologue inverse $\beta'$ etc. On arrivera enfin à un sommet ou à une arête unique $d$ opposé à $c$, et qui sera son propre homologue inverse.

Supposons, pour fixer les idées, que $d$ soit une arête $mm'$: il existe une face $E$ contiguë à $D$ suivant l'arête $d$, et qui sera évidemment sa propre homologue inverse, puisque $D$ et $d$ sont chacune leur propre homologue inverse: d'ailleurs $m'$ étant l'homologue inverse de $m$, l'homologue inverse de $m\gamma$ sera $m'\gamma'$, celui de $\gamma$ sera $\gamma'$ etc. On arrivera enfin à un sommet ou à une arête unique $e$, opposé à $d$, et qui sera son propre homologue inverse.

Supposons cette fois que $e$ soit un sommet: les deux arêtes $e\gamma$, $e\gamma'$, qui y aboutissent, sont homologues inverses l'une de l'autre. Le point $e$ est le sommet d'un angle polyèdre dans lequel il existera une face ou arête $F$, opposée à $E$, et qui sera évidemment sa propre homologue inverse. Car en désignant par $2K$ le nombre total des faces et arêtes qui se coupent en $e$, $F$ est celle que l'on rencontre la $K-1^{\text{ème}}$ en tournant autour de $e$, soit dans le sens direct, à partir de $e\gamma$, soit dans le sens rétrograde, à partir de $e\gamma'$, homologue inverse de $e\gamma$.

En poursuivant ainsi, on détermine une chaine continue de faces et d'arêtes $B, C, D, E, F, \ldots$ dont chacune est sa propre homologue inverse, et qui se rattachent les unes aux autres par des sommets et arêtes $b, c, d, e, \ldots$ dont chacun est également son homologue inverse. Une telle suite ne pouvant être illimitée, il faudra nécessairement que l'on retombe au bout d'un certain temps sur les faces et arêtes déjà trouvées.

Supposons donc qu'après une suite de faces et d'arêtes toutes différentes $B, C, D, E, F, \ldots$ on arrive à une dernière face ou arête $\varphi$ à partir de laquelle on retombe sur l'une des précédentes. C'est nécessairement sur $B$ qu'on retombera. En effet, supposons qu'on retombe sur $D$. La face $\varphi$ doit se relier à la suivante $D$ par un sommet ou une arête qui soit son propre homologue inverse. Mais parmi les sommets et arêtes qui bordent $D$, deux seulement, $c$ et $d$, sont inversement homologues à eux-mêmes. Cela posé, si $\varphi$ était contiguë à $D$ suivant l'arête $d$, elle se confondrait avec $E$, contrairement à notre hypothèse. D'autre part $\varphi$ ne peut aboutir en $c$: car parmi les faces et arêtes qui aboutissent en $c$, $D$ et $C$ sont les seules inversement homologues à elles-mêmes: $\varphi$ devrait donc se confondre avec $C$, contrairement à notre hypothèse.

Il résulte de là 1° que $\varphi$ se relie nécessairement à la première arête ou face $B$; 2° que la liaison se fait au sommet $S$, ce sommet étant le seul de $B$ qui soit inversement homologue à lui-même ($b$ excepté); 3° que $\varphi$ n'est autre que la face ou arête opposée à $B$ dans l'angle polyèdre $S$, cette dernière face ou arête étant la seule inversement homologue à elle-même parmi toutes celles qui aboutissent en $S$: 4° et par conséquent qu'en continuant à partir de $\varphi$ la série d'opérations par laquelle on a déterminé successivement $B, C, D, E, F, \ldots \varphi$, on retombera sur la même suite. Ces faces et arêtes forment donc une zône continue $Z$, ceignant le polyèdre.

Deux portions quelconques $P$ et $P'$ de cette zône ne peuvent se traverser mutuellement: en effet, cela ne pourrait se faire que de quatre manières différentes:

1°. $P$ et $P'$ auraient une face commune $F$, suivant laquelle se ferait l'intersection. Cette hypothèse doit être rejetée, les faces et arêtes successives $B, C, D, \ldots \varphi$ devant être essentiellement distinctes les unes des autres.

2°. $P$ contiendrait une arête $mn$ (fig. 3), laquelle servirait d'intersection entre deux faces consécutives de $P'$, $M$ et $N$. Ce cas est impossible: car si l'on compare entre eux les deux aspects $A$ et $\mathrm{A}$, chacun des points $m$, $n$ étant son propre homologue inverse, la face $M$ qui est la première rencontrée par un observateur situé en $mn$ et tournant dans le sens direct autour de $n$, aurait pour homologue inverse la face située de l'autre côté de l'arête $mn$, cette dernière face étant la première que rencontre un observateur situé en $mn$ et tournant autour de $n$ dans le sens rétrograde. La face $M$ ne pourrait donc être sa propre homologue inverse, comme elle doit l'être.

3°. $P'$ contiendrait une des arêtes $mn$ qui séparent deux faces consécutives de $P$, $M$ et $N$. Ce cas est évidemment identique au précédent, sauf le changement de $P$ en $P'$.

4°. Enfin $P$ et $P'$ se croiseraient (fig. 4) en un sommet $\sigma$, qui servirait à la fois de point de contact entre deux faces ou arêtes successives de $P$, $M$ et $N$, et entre deux faces ou arêtes successives de $P'$, $M'$ et $N'$. Ce cas est impossible encore: car nous avons vu que parmi toutes les faces et arêtes aboutissant en $\sigma$, $M$ et $N$ sont les seules qui soient inversement homologues à elles-mêmes. $M'$ ne pourrait donc être sa propre homologue inverse, comme elle doit l'être.

La zône $Z$, ne se coupant elle-même nulle part, ainsi que nous venons de le démontrer, partage le polyèdre en deux régions $R$ et $R'$ nettement dis-

tinctes. La zône $Z$ étant sa propre homologue inverse, chacune des régions $R$, $R'$ sera, ou sa propre homologue inverse, ou l'homologue inverse de l'autre région. Pour le décider, considérons une arête quelconque $\alpha\beta$ parmi celles qui bordent la zône $Z$, et son homologue inverse $\alpha'\beta'$ (fig. 5). Un observateur, tournant dans le sens direct autour de $\alpha$, sortira de la région $R$ en traversant l'arête $\alpha\beta$. Au contraire, un observateur tournant dans le sens rétrograde autour de $\alpha'$ sortira de la région $R'$ en traversant l'arête $\alpha'\beta'$: donc $R'$ est l'homologue inverse de $R$.

Chaque élément ou arête de l'une des régions $R$, $R'$ aura donc dans l'autre région un homologue inverse essentiellement différent de lui-même. Les deux régions contiennent donc le même nombre de faces, arêtes et sommets.

Nous avons vu que parmi les arêtes et faces qui se croisent en $S$, il y en a $2k$, opposées deux à deux, qui sont inverses à elles-mêmes. Chaque zône contenant un couple d'arêtes et faces opposées telles que $B$ et $\varphi$, on pourra déterminer à partir du point $S$, $k$ zônes différentes.

Le théorème est donc démontré dans toutes ses parties.

Nous avons supposé, pour fixer les idées, que l'élément considéré était un sommet $S$. Le cas où ce serait une face $F$ ne peut plus présenter de difficulté après les développements dans lesquels nous sommes entrés. En effet, il existe sur le contour de $F$ $2k$ sommets ou arêtes dont chacun est inverse à lui-même, et qui sont opposés deux à deux. A partir de chacun d'eux on pourra déterminer de proche en proche d'après la méthode ci-dessus décrite une suite de faces et d'arêtes formant une zône, qui viendra rejoindre la face initiale $F$ par le sommet ou l'arête opposé à celui duquel on est parti.

Théorème. *Si une arête ab est inverse à elle-même, on pourra déterminer à partir de cette arête une zône analogue à celle du théorème précédent.*

*Si l'arête ab présente en même temps une symétrie par retournement, on pourra déterminer deux zônes distinctes à partir de cette arête.*

Comparons en effet les deux aspects $A$ et A relativement auxquels $ab$ est sa propre homologue inverse: deux cas pourront se présenter:

1^er^ cas. Chacun des points $a$, $b$ est inversement homologue à lui-même. On pourra déterminer une zône $Z$ à partir du point $a$ et de l'arête $ab$ (théorème précédent).

2^ème^ cas. $a$ est inversement homologue de $b$, et réciproquement. Soit $F$ l'une des faces que borde l'arête $ab$. Elle est sa propre homologue inverse:

car c'est la première face que rencontre un observateur situé sur *ab*, soit qu'il tourne dans le sens direct autour de *a*, soit qu'il tourne dans le sens rétrograde autour de *b*, homologue inverse de *a*. La face *F* étant sa propre homologue inverse, ainsi que l'arête *ab*, on pourra déterminer une zône $Z'$ à partir de *F* et de *ab* (théorème précédent).

Ces deux zônes coexistent, si l'arête *ab* présente une symétrie par retournement. Soient en effet *c* et *cd* le sommet et l'arête relativement auxquels est pris l'aspect direct *A*. Prenons successivement les aspects directs *B*, $B'$ relatifs à *a* et *ab*, *b* et *ba*. Ces deux aspects sont semblables par hypothèse. Soient respectivement $c'$, $c'd'$ le sommet et l'arête homologues de *c*, et *cd* relativement aux aspects *B* et $B'$. D'après un théorème démontré dans notre 1[er] mémoire, l'aspect $A'$ relatif à $c'$ et $c'd'$ est semblable à l'aspect *A* relatif à *c*, *cd:* et *b*, *ba* seront respectivement homologues de *a* et *ab* relativement aux deux aspects *A* et $A'$.

Cela posé, comparons successivement l'aspect rétrograde A avec les deux aspects semblables *A* et $A'$. Dans chacune de ces comparaisons l'arête *ab* sera sa propre homologue inverse: si d'ailleurs *a* est homologue inverse de *b* dans l'une d'elles, il sera son propre homologue inverse dans l'autre, et réciproquement. Le théorème est donc démontré.

Remarque. L'une des deux zônes, $Z'$, contient les deux faces *F*, *G* que sépare l'arête *ab*, ce que ne fait pas l'autre zône *Z*. Pour distinguer l'une de l'autre ces deux natures de zônes, nous dirons que la zône $Z'$ est *transversale*, et la zône *Z* *longitudinale* à l'arête *ab*.

Théorème: *Deux zônes quelconques Z, Z' de la nature de celles que nous venons de déterminer se coupent toujours mutuellement au moins deux fois.*

En effet, la zône *Z* partage le polyèdre en deux régions *R*, $R'$, qui doivent contenir chacune le même nombre d'éléments et d'arêtes. Si la zône *Z* était contenue toute entière dans l'une de ces régions *R*, elle partagerait le polyèdre en deux régions $R_1$ et $R'_1$ dont l'une contiendrait tous les éléments et arêtes de $R'$ et une partie de ceux de *R:* et l'autre une partie seulement de ceux de *R:* les deux régions $R_1$ et $R'_1$ ne pourraient donc renfermer le même nombre d'éléments et d'arêtes, comme cela doit être.

D'ailleurs les zônes *Z*, $Z'$ étant des contours fermés se coupent nécessairement un nombre pair de fois.

Cette intersection peut se faire, de trois manières différentes, comme nous l'avons déjà vu.

1°. L'intersection se fait suivant une face $F$, commune aux deux zônes $Z$ et $Z'$ (fig. 6).

2°. Elle se fait suivant une arête $mn$, à laquelle une des zônes $Z$ est longitudinale, et l'autre transversale (fig. 7).

3°. Elle se fait en un sommet $\sigma$ qui sert en même temps de point de contact entre deux faces ou arêtes successives de $Z$, $M$ et $N$, et entre deux faces ou arêtes successives de $Z'$, $M'$ et $N'$ (fig. 8).

Théorème. *Si $k$ zônes distinctes se croisent en un même sommet $\sigma$, ce sommet est doué d'une symétrie de rotation d'ordre $k$.*

Car il existe $2k$ faces ou arêtes, passant par ce point, et qui sont inverses à elles-mêmes.

Théorème. *Si $k$ zônes distinctes se croisent en aboutissant toutes à une face commune $F$, cette face est douée d'une symétrie de rotation d'ordre $k$.*

Car cette face se rattache aux deux faces voisines de chacune des $k$ zônes par des sommets ou arêtes dont chacun est inverse à lui-même, et dont le nombre total est $2k$.

Théorème. *Si deux zônes se croisent suivant une arête $ab$, cette arête est douée de la symétrie de retournement.*

En effet, comparons entre eux les deux aspects relativement auxquels $Z$ est inversement homologue à elle-même: $a$ et $ab$ sont leurs propres homologues inverses. L'aspect direct relatif à $a$, $ab$ est donc semblable à l'aspect rétrograde correspondant. Comparons d'autre part les deux aspects relativement auxquels $Z'$ est sa propre homologue inverse: $a$ et $b$ sont réciproquement homologues inverses l'un de l'autre. L'aspect direct relatif à $b$, $ba$ est donc semblable à l'aspect rétrograde relatif à $a$, $ab$, et par suite à l'aspect direct correspondant. Il y a donc symétrie de retournement.

Il est d'ailleurs évident qu'il ne peut se couper plus de deux zônes suivant une arête donnée. Car pour qu'une zône contienne $ab$, il faut évidemment 1° ou qu'elle contienne une des faces que cette arête sépare, et qu'ainsi elle coupe $Z'$ suivant une face, et non suivant une simple arête, 2° ou qu'elle renferme l'une des arêtes ou faces qui se coupent en $a$. Cette arête ou face devant être opposée à l'arête $ab$, appartiendra à $Z$, avec laquelle la zône cherchée se confondra dans son entier.

Théorème. *Si l'on trace sur le polyèdre toutes les zônes possibles $Z$, $Z'$, ... elles diviseront la surface du polyèdre en une série de régions*

*R, R', ... etc. Deux régions contiguës quelconques R et R', sont inverses l'une de l'autre.*

Soient $Z$ la zône qui sépare $R$ de $R'$, $A$ et A les aspects relativement auxquels les éléments et arêtes de $Z$ sont chacun son propre homologue inverse. Tout élément ou arête inverse à lui-même aura pour homologue inverse un autre élément ou arête jouissant de cette même propriété. Le système des zônes $Z, Z_1, \ldots$ formées par les éléments et arêtes de cette nature sera donc son propre homologue inverse. Chaque région $R$ comprise entre ces zônes aura donc pour homologue inverse une région de même nature.

Cette homologue inverse sera précisément $R'$: car soient $ab$ une arête quelconque de $Z$ prise dans la partie de cette zône qui sépare $R$ de $R'$, $\alpha\beta$ son homologue inverse (fig. 9). Un observateur tournant dans le sens direct autour de $a$ sortira de $R$ en franchissant l'arête $ab$. De même un observateur tournant dans le sens rétrograde autour de $\alpha$ sortira de $R'$ en franchissant l'arête $\alpha\beta$. Donc $R'$ est homologue inverse de $R$.

Corollaire. Deux régions contiguës à une troisième sont pareilles entre elles comme inverses à une même région. La série $R, R', \ldots$ ne contient donc que deux espèces différentes de régions, inverses l'une de l'autre.

## IIº.

## Solution du problème.

Nous allons appliquer les théorèmes précèdents à la solution générale du problème que nous nous sommes posé plus haut. Nous traiterons successivement des diverses classes de polyèdres que nous avons distinguées dans notre premier mémoire.

### 1ère classe.

Polyèdres dissymétriques.

Supposons qu'un polyèdre $P$, dont tous les aspects directs diffèrent entre eux, présente deux aspects semblables $A$ et A, l'un direct, l'autre rétrograde. Deux cas pourront se présenter.

1er cas. *Il existe un élément ou arête inverse à lui-même.*

On pourra déterminer à partir de cet élément ou de cette arête, une zône $Z$, dont les éléments et arêtes seront inverses à eux-mêmes. Elle partage le polyèdre en deux régions $R$ et $R'$: à chaque élément ou arête de

l'une de ces régions correspond un élément ou arête inverse dans l'autre région. D'ailleurs à un élément ou arête donné ne peut correspondre qu'un seul élément ou arête inverse: car s'il y en avait deux, ils seraient pareils entre eux, et le polyèdre ne serait plus de la 1[ère] classe. Les éléments et arêtes de $Z$ sont donc les seuls qui soient inverses à eux-mêmes.

2[ème] cas. *Il n'existe aucun élément ou arête inverse à lui-même.*

A chaque sommet correspond un sommet inverse, et un seul. Soit $a$ l'un de ceux dont la distance à son inverse $\alpha$ est un minimum $\delta$. Soient $L$ une ligne géodésique tracée entre $a$ et $\alpha$, $\Lambda$ son homologue inverse relativement aux deux aspects $A$ et A. La ligne $L$ issue de $a$ aboutit à un point $\alpha$ inverse de $a$. Son inverse $\Lambda$ issue de $\alpha$ aboutira donc en un point $a_1$ inverse à $\alpha$. Le point $a$ étant le seul qui soit inverse à $\alpha$, $\Lambda$ aboutira nécessairement en $a$.

Soit $a, b, c, \ldots$ la suite des sommets que l'on rencontre en parcourant la ligne $L$ de $a$ à $\alpha$: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ la suite des sommets inverses des précédents que l'on rencontre en parcourant la ligne $\Lambda$ de $\alpha$ en $a$. La distance mutuelle de deux quelconques de ces sommets inverses sera précisément $\delta$. En effet, par hypothèse, cette distance ne peut être inférieure à $\delta$. D'autre part, soit $c$ un quelconque de ces sommets, $d$ sa distance à $a$. La distance à $\alpha$ est $\delta - d$, celle de $\alpha$ au point $\gamma$ inverse de $c$ est $d$: et la distance de $c$ à $\gamma$ est au plus égale à la somme $\delta$ de ces deux distances partielles.

La longueur commune $\delta$ des deux lignes $L$ et $\Lambda$ est $> 1$: car si l'on avait $\delta = 1$, ces deux lignes se confondraient en une seule arête $a\alpha$, qui serait inverse à elle-même, contrairement à notre hypothèse. D'autre part $L$ et $\Lambda$ ne peuvent avoir aucun sommet commun. Supposons en effet qu'un sommet $c$ de $L$, situé à la distance $d$ de $a$, coïncidât avec un sommet de $\Lambda$, situé à la distance $d'$ de $\alpha$. Le sommet $\gamma$ inverse de $c$, situé sur $\Lambda$ à la distance $d$ de $\alpha$, serait à une distance de son inverse égale à $\pm(d-d')$ et par suite inférieure à $\delta$, contrairement à notre hypothèse.

Les lignes $L$ et $\Lambda$ forment ainsi un contour continu qui partage le polyèdre en deux régions $R$ et $R'$. Ces deux régions sont respectivement inverses l'une de l'autre. En effet, soit $R$ celle de ces deux régions dans laquelle un observateur tournant dans le sens direct autour de $a$ pénètre en traversant l'arête $ab$: un observateur tournant dans le sens rétrograde autour de $\alpha$ pénétrera dans l'autre région $R'$ au moment où il traverse l'arête $\alpha\beta$ inverse de $ab$: la région $R'$ est donc l'inverse de la région $R$.

La classe que nous venons de considérer fournit donc deux types de polyédres.

1er type. Il existe des éléments et arêtes inverses à eux-mêmes; ces éléments et arêtes sont tous situés sur une zône $Z$ qui fait le tour du polyèdre et le partage en deux régions, inverses l'une de l'autre.

2ème type. Il n'existe ni élément ni arête inverses à eux-mêmes. On peut tracer autour du polyèdre un contour fermé inverse à lui-même, et qui partage le polyèdre en deux régions inverses l'une de l'autre.

## 2ème classe.

### Symétrie de rotation.

On sait que les polyèdres de cette classe présentent deux éléments $S$ et $T$ uniques chacun de son espèce, les autres, ainsi que les arêtes, étant $k$ fois répétés. L'élément $S$ présentant une symétrie par rotation d'ordre $k$, il en sera de même de son homologue inverse relativement aux deux aspects $A$ et $\mathrm{A}$: ce sera donc ou $S$ ou $T$: d'ailleurs les éléments $S$ et $T$ n'étant pas pareils, ne peuvent être simultanément inverses à un même élément $S$: on a donc deux cas seulement à considérer, suivant que $S$ est inverse à lui-même, ou inverse à $T$.

1er cas. *L'élément S est inverse à lui-même.* Il existera $k$ zônes partant de cet élément. Deux quelconques de ces zônes doivent se croiser au moins une fois en dehors de $S$: et l'intersection doit se faire, ou suivant une arête qui présentera la symétrie de retournement, ou suivant un élément qui présentera une symétrie de rotation. Or aucune arête n'offre la symétrie de retournement, et l'élément $T$ est le seul autour duquel il y ait symétrie de rotation. Donc les $k$ zônes passeront par $T$. Il n'existera d'ailleurs aucune autre zône: car elle devrait couper deux fois au moins chacune des autres: et ces intersections ne pourraient avoir lieu, comme nous venons de le voir, qu'en $S$ et $T$. Mais la symétrie de rotation dont ces points sont doués étant d'ordre $k$ seulement, il ne peut passer plus de $k$ zônes en chacun d'eux.

Les $k$ zônes ainsi déterminées partagent le polyèdre en $2k$ fuseaux.

2ème cas. *L'élément S est inverse de T et réciproquement.* Soient $L$ une ligne géodésique arbitraire menée de $S$ à $T$; $L, L_1, \ldots L_{k-1}$ les $k$ lignes pareilles issues de $S$; $\Lambda, \Lambda_1, \ldots \Lambda_{k-1}$ les $k$ lignes inverses issues de $T$. On peut supposer que ces lignes ne se traversent mutuellement nulle part.

En effet, on sait (1er mémoire), que deux quelconques des lignes $L, L_1, \ldots L_{k-1}$ ne peuvent avoir aucun point commun autre que $S$ et $T$. Il

en sera de même des lignes $\Lambda$, $\Lambda_1$, ... $\Lambda_{k-1}$ qui sont également pareilles entre elles. Donc trois quelconques des lignes $L$, ... $L_{k-1}$, $\Lambda$, ... $\Lambda_{k-1}$ ne peuvent se rencontrer toutes en un même point: car sur ces trois lignes, deux au moins appartiendraient ou à la série $L$, ... $L_{k-1}$, ou à la série $\Lambda$, ... $\Lambda_{k-1}$.

Supposons maintenant que quelques unes des lignes $L$, ... $L_{k-1}$ puissent rencontrer quelques unes des lignes $\Lambda$, ... $\Lambda_{k-1}$. Soit en particulier $u$ le point de la ligne $L$ le plus rapproché de son milieu parmi ceux où elle rencontre les lignes $\Lambda$, ... $\Lambda_{k-1}$ (fig. 10). Soient $\delta$ la distance de $S$ à $T$, $d$ la distance de $u$ à $S$: on peut supposer $d \leqq \frac{1}{2}\delta$: car, si l'on avait $d > \frac{1}{2}\delta$, on n'aurait qu'à considérer, au lieu de l'élément $S$, l'élément $T$, dont la distance $\delta - d$ à $u$ serait $< \frac{1}{2}\delta$. Nous diviserons par la pensée la ligne $L$ en trois tronçons: le premier $l$, de longueur $d$, compris entre $S$ et $u$, le dernier $l'$, de même longueur, pris à partir de $T$: enfin un tronçon médian $m$, dont la longueur $\delta - 2d$ peut d'ailleurs se réduire à zéro. Soit maintenant $\Lambda$ celle des lignes $\Lambda$, ... $\Lambda_{k-1}$ qui rencontre $L$ au point $u$. $\Lambda$ étant géodésique ainsi que $L$, la distance de $u$ à $S$ sera la même sur l'une ou l'autre de ces deux lignes, et l'on pourra décomposer $\Lambda$ en trois tronçons, l'un $\lambda$, de longueur $\delta$, pris à partir de $T$, le dernier $\lambda'$, de même longueur, compris entre $u$ et $S$: enfin un tronçon médian $\mu$.

Considérons maintenant la ligne géodésique $L'$ formée de la succession des tronçons $\lambda'$, $m$, $l'$: elle se confond avec une de ses inverses dans chacun des deux tronçons $\lambda'$ et $l'$. En effet, comparons ensemble les deux aspects relativement auxquels $L$ a pour homologue inverse $\Lambda$. $L'$, qui contient $l'$, dernier tronçon de $L$, aura pour homologue inverse une ligne $\Lambda'$, contenant $\lambda'$, dernier tronçon de $\Lambda$. D'autre part, $L'$, dont le premier tronçon $\lambda'$ se confond avec le dernier tronçon de son homologue inverse $\Lambda'$, sera elle-même l'homologue inverse d'une autre ligne $\Lambda'_1$ issue de $T$, et dont le premier tronçon devra se confondre avec le dernier de son homologue inverse $L'$.

Chacune des lignes $L'$, $L'_1$, ... $L'_{k-1}$, pareilles à $L'$, coïncidera évidemment de même avec quelqu'une des lignes inverses $\Lambda'$, $\Lambda'_1$, ... $\Lambda'_{k-1}$ dans chacun de ses tronçons extrêmes. On le voit immédiatement en comparant entre eux les deux aspects relativement auxquels l'une d'elles, $L'_n$ par exemple, est l'homologue de $L'$.

En dehors de ces coïncidences, les lignes $L'$, ... $L'_{k-1}$, $\Lambda'$, ... $\Lambda'_{k-1}$ ne se rencontreront en aucun point. En effet ce point ne peut être sur les

tronçons extrêmes où ces lignes sont déjà confondues deux à deux: car on aurait trois lignes se coupant en un même point, ce qui est impossible. Il ne peut être non plus sur les tronçons médians, qui sont les mêmes que ceux des lignes $L, \ldots L_{k-1}$, $\Lambda, \ldots \Lambda_{k-1}$, dont nous avons supposé que les tronçons médians ne se rencontrent pas.

Deux cas pourront ici se présenter:

1^er^ sous-cas. *La ligne $L'$ se confond avec une de ses inverses $\Lambda'$, dans toute son étendue.* Cette ligne présente alors un sommet médian ou une arête médiane, suivant que $\delta$ est pair ou impair. Si l'on compare entre eux les deux aspects relativement auxquels cette ligne est sa propre homologue inverse, ce sommet ou cette arête sera également son propre homologue inverse. Chacune des lignes $L'_1, \ldots L'_{k-1}$ présentera de même en son milieu un sommet ou une arête inverse à lui-même. Par chacun de ces sommets ou arêtes passera une zône de la nature de celles que nous avons appris à déterminer. Toutes ces zônes se confondent en une seule $Z$ passant par tous les sommets ou arêtes médians. Car s'il y en avait deux, elles se couperaient nécessairement suivant des arêtes qui présenteraient la symétrie de retournement, ou suivant des éléments donés d'une symétrie de rotation. Or d'une part il n'existe aucune arête douée de la symétrie de retournement, et d'autre part nous avons supposé que les éléments $S$ et $T$, les seuls autour desquels ait lieu une symétrie de rotation, ne sont pas inverses à eux-mêmes.

2^ème^ sous-cas. *La ligne $\Lambda'$ est distincte de $L'$ dans toute son étendue, ou du moins s'en sépare après s'être confondue avec elle sur une longueur d.* Soit $u$ le point où les deux lignes se séparent (fig. 11). Imaginons un observateur situé sur $uS$ dans le voisinage du point $u$, et se mettant à tourner dans le sens direct autour de ce point: supposons, pour fixer les idées, que parmi les deux lignes $L'$ et $\Lambda'$, $L'$ soit la première dont il rencontre le prolongement. Soit $L'_1$ celle des lignes pareilles à $L'$ qu'on rencontre la première après $L'$ en tournant dans le sens direct autour de $S$: le fuseau F contenu entre ces deux lignes renfermera en entier la ligne $\Lambda'$, puisque cette ligne ne peut traverser nulle part ni $L'$ ni $L'_1$.

La ligne $\Lambda'$, se confondant avec une de ses inverses $L'$ dans son premier tronçon $Su$, devra également se confondre avec une autre de ses inverses dans son dernier tronçon $Tv$. Cette autre inverse ne pourra être que l'une des deux lignes $L'$, $L'_1$ entre lesquelles $\Lambda'$ est comprise. D'ailleurs ce ne peut être $L'$. En effet, supposons (fig. 12) que $\Lambda'$, après s'être séparée

de $L'$, se réunisse de nouveau à cette ligne en $v$. Comparons ensemble les deux aspects relativement auxquels $\varLambda'$ est homologue inverse de $L'$; $\varLambda'$ contenant le premier tronçon $Su$ de $L'$, aura réciproquement pour homologue inverse une ligne pareille à $L'$ et contenant le premier tronçon $Tv$ de $\varLambda'$: ce sera donc précisément $L'$. Cela posé, $L'$ étant rencontrée avant $\varLambda'$ par un observateur tournant dans le sens direct autour de $u$ à partir de $uS$, son inverse $\varLambda'$ devra être rencontrée avant $L'$, homologue inverse de $\varLambda'$, par un observateur tournant dans le sens rétrograde autour de $v$ et à partir de $vT$, résultat dont la vue de la figure montre l'absurdité.

Le point $v$ sera donc situé sur la ligne $L'_1$, à la distance $d$ du point $T$ (fig. 11): et si l'on compare ensemble les deux aspects relativement auxquels $\varLambda'$ est l'homologue inverse de $L'$, l'homologue inverse de $\varLambda'$ sera $L'_1$, qui est rencontrée après $\varLambda'$, ainsi que cela doit être, par un observateur tournant dans le sens rétrograde autour de $v$ à partir de $vT$.

La ligne $\varLambda'$ divise le fuseau F en deux régions $\varrho$ et $\varrho_1$ inverses l'une à l'autre: car la région $\varrho$ comprise entre les lignes $L'$ et $\varLambda'$ a pour homologue inverse la région $\varrho_1$ comprise entre leurs homologues inverses $\varLambda'$ et $L'_1$. Aucun élément ni arête n'est inverse à lui-même. En effet soit $E$ un élément ou arête quelconque situé dans la région $\varrho$. La région $\varrho_1$ contient un élément ou arête E inverse à $E$: si $E$ était inverse à lui-même il serait semblable à E: le même fuseau F contiendrait donc deux éléments ou arêtes pareils $E$ et E, ce qui ne peut être.

La classe que nous venons de considérer fournit donc trois types de polyèdres:

1^er^ type. Chacun des éléments $S$ et $T$ est inverse à lui-même. On peut tracer autour du polyèdre $k$ zônes *méridiennes*, se coupant aux deux *pôles* $S$ et $T$.

2^ème^ type. $S$ est l'inverse de $T$ et réciproquement. Il existe des éléments ou arêtes inverses à eux-mêmes, et formant autour du polyèdre une zône *équatoriale*.

3^ème^ type. $S$ est l'inverse de $T$ et réciproquement. Il n'existe ni élément ni arête inverse à lui-même: $k$ lignes géodésiques pareilles $L', \ldots L'_{k-1}$, convenablement tracées entre $S$ et $T$, découpent la surface du polyèdre en $k$ fuseaux pareils, partagés chacun en deux régions inverses l'une de l'autre par l'une des lignes $\varLambda', \ldots \varLambda'_{k-1}$ inverses de $L', \ldots L'_{k-1}$.

### 3ème classe.

Symétrie de rotation et retournement.

Ce cas n'étant qu'un cas particulier du précédent, un peu modifié, se traite exactement de même.

L'élément autour duquel a lieu la rotation binaire, étant le seul qui jouisse de cette propriété, sera nécessairement son propre inverse. Il part donc de cet élément deux zônes méridiennes, qui se croisent suivant l'arête à retournement, qui est également unique. L'une d'elles est transversale, l'autre longitudinale par rapport à cette arête.

### 4ème classe.

Symétrie de retournement.

Ce cas se traite encore exactement de même que celui des polyèdres de la seconde classe.

Si l'on désigne par $S$ et $T$ les deux arêtes à retournement, deux cas pourront se présenter:

1er cas. *Chacune des deux arêtes $S$, $T$ est sa propre inverse.* Il existe alors deux zônes méridiennes $Z$, $Z'$ se croisant suivant ces deux arêtes: et deux cas pourront se présenter: 1° Celui où l'une des zônes $Z$ est transversale aux deux arêtes $S$ et $T$, l'autre $Z'$ étant longitudinale à toutes deux. 2° Celui où chacune des deux zônes $Z$, $Z'$ est transversale à l'une des arêtes $S$, $T$ et longitudinale à l'autre.

2ème cas. *L'arête $S$ est inverse de $T$ et réciproquement.* Soient $L'$, $L'_1$, $\Lambda'$, $\Lambda'_1$ des lignes géodésiques tracées entre $S$ et $T$ de la manière indiqnée plus haut: on pourra distinguer deux sous-cas.

1er sous-cas. Si la ligne $L'$ se confond dans toute son étendue avec l'une de ses inverses $\Lambda'$, il existe des éléments ou arêtes inverses à eux-mêmes et formant une zône équatoriale autour du polyèdre.

2ème sous cas. Si les lignes $L'$ et $\Lambda'$ se séparent en tout ou partie de leur étendue, il n'existe ni élément ni arête inverse à lui-même: et les deux lignes $L'$, $L'_1$ partagent le polyèdre en deux régions pareilles, subdivisées chacune en deux régions inverses l'une de l'autre par l'une des lignes $\Lambda'$, $\Lambda'_1$.

On a donc ici trois types de polyèdres correspondant à ceux que fournit la seconde classe: et de plns le premier de ces types pourrait à la riguenr être subdivisé en deux sous-types, comme nous l'avons indiqué.

### 5ème classe.

Symétrie par rotation et renversement.

On sait qu'il existe deux éléments $S$ et $T$ pareils entre eux et doués d'une symétrie de rotation d'ordre $k$, et deux autres systèmes remarquables, formés chacun de $k$ éléments pareils doués de rotation binaire, ou de $k$ arêtes pareilles, douées de retournement.

Nous laissons expressément ici de côté le cas où $k=2$, que nous traiterons en même temps que celui des polyèdres de la 6ème classe.

Chacun des deux éléments extrêmes, $S$ et $T$, sera inverse à lui-même. En effet, comparons ensemble un aspect direct quelconque et l'aspect rétrograde qui lui est semblable. L'homologue inverse de $S$, étant doué d'une symétrie de rotation d'ordre $k$, sera ou $S$ lui-même, ou $T$. Mais même dans ce dernier cas, $S$ étant pareil à $T$, sera inverse à lui-même.

Il existe donc $k$ zônes passant par $S$, et $k$ zônes passant par $T$: ces dernières zônes se confondront toutes avec les premières. Supposons en effet que l'une des zônes passant par $S$, que nous désignerons par $Z$, ne passe pas par $T$. Comparons entre eux les $k$ aspects directs relativement auxquels $S$ est son propre homologue: $Z$ aura successivement pour homologues les autres zônes $Z_1, \dots Z_{k-1}$ qui passent par $S$: aucune de ces zônes ne passera en $T$: car $Z$ n'y passe pas, et $T$ reste son propre homologue sous tous les aspects considérés. Comparons maintenant l'un des aspects précédents avec l'un de ceux relativement auxquels $S$ est homologue de $T$, et réciproquement: les zônes $Z, Z_1, \dots Z_{k-1}$ auront pour homologues des zônes $Z', \dots Z'_{k-1}$, passant par $T$ et ne passant pas par $S$. Chacune de ces nouvelles zônes traverse chacune des zônes $Z, \dots Z_{k-1}$ suivant deux éléments ou arêtes au moins. D'ailleurs tous ces éléments ou arêtes sont distincts: car si plus de deux zônes se croisaient suivant un élément, cet élément présenterait une symétrie de rotation plus que binaire, ce qui ne peut être. Le nombre des intersections distinctes serait donc au moins égal à $2k^2$: mais chacune d'elles doit correspondre à un élément doué de rotation binaire, ou à une arête douée de retournement: résultat absurde, puisque le nombre total de ces éléments et arêtes est de $2k$ seulement.

Deux cas pourront se présenter ici:

1er cas. *Parmi les $2k$ éléments ou arêtes remarquables, il n'en existe aucun qui soit situé sur les zônes $Z, \dots Z_{k-1}$.*

Deux zônes quelconques se coupant toujours suivant des éléments ou arêtes remarquables, aucune des zônes $Z, \dots Z_{k-1}$ ne pourra être traversée par une autre zône ailleurs qu'en $S$ et $T$. Donc 1° Les zônes $Z, \dots Z_{k-1}$ ne se traverseront mutuellement nulle part ailleurs qu'en $S$ et $T$. 2° Il n'existera aucune autre zône $Y$ différente de celles-là. Car cette zône ne peut passer ni en $S$ ni en $T$: car la rotation en chacun de ces points étant d'ordre $k$, il n'y peut passer plus de $k$ zônes. $Y$ couperait donc nécessairement chacune des zônes $Z, \dots Z_{k-1}$ en deux points, différents de $S$ et $T$, ce qui est impossible.

Cela posé, considérons en particulier l'une des zônes $Z$. Elle dessine autour du polyèdre un contour fermé, que les éléments $S$ et $T$ qui y sont situés divisent en deux parties $\zeta$ et $\zeta'$. Soient $\zeta$ l'une d'elles choisie à volonté, $\zeta, \zeta_1, \dots \zeta_{k-1}$ les demi-zônes successivement homologues de $\zeta$ relativement à tous les aspects directs $A, A_1, \dots A_{k-1}$ par rapport auxquels chacun des éléments $S$, $T$ est son propre homologue. Comparons maintenant l'aspect $A$ aux aspects directs semblables $\mathrm{A}, \mathrm{A}_1, \dots \mathrm{A}_{k-1}$ relativement auxquels $T$ est l'homologue de $S$ et réciproquement: $\zeta$ aura pour homologues successives $k$ demi-zônes nouvelles $\eta, \eta_1, \dots \eta_{k-1}$. Ce nouveau système de $k$ demi-zônes issues de $T$ est essentiellement différent du système $\zeta, \zeta_1, \dots \zeta_{k-1}$ des demi-zônes issues de $S$. Soit en effet $\eta = \zeta_1$. Comparons entre eux les deux aspects $A_1$ et $\mathrm{A}$. $S$ y sera l'homologue de $T$, $\eta = \zeta_1$ restant sa propre homologue. La première face ou arête de $\zeta_1$ (en appelant ainsi celle qui touche à $S$) aura donc pour homologue la dernière, qui touche à $T$: la seconde aura pour homologue l'avant dernière etc. Si le nombre des faces ou arêtes est impair, on aura une face ou arête médiane qui sera homologue à elle-même: s'il est pair, on aura finalement deux faces ou arêtes homologues et se réunissant par un sommet ou une arête médians, qui sera son propre homologue. Dans l'un et l'autre cas, on aurait donc, contrairement à notre supposition, au milieu de la demi-zône $\zeta_1$, un élément doué de rotation ou une arête douée de retournement.

Les $k$ demi-zônes $\zeta, \zeta_1, \dots \zeta_{k-1}$, ne se traversant nulle part mutuellement, découperont la surface du polyèdre en $k$ fuseaux. Les demi-zônes $\eta, \eta_1, \dots \eta_{k-1}$ étant distinctes des premières, et ne pouvant les traverser, chacune d'elles sera contenue dans un des fuseaux. D'ailleurs chaque fuseau en contiendra une. En effet supposons que les demi-zônes $\zeta, \zeta_1, \dots \zeta_{k-1}$ soient écrites dans l'ordre où les rencontre un observateur tournant dans le

sens direct autour de $S$: comparons ensemble les aspects relativement auxquels $\zeta$ a pour homologue l'une quelconque d'entre elles, $\zeta_\mu$: $\zeta_1$ aura évidemment pour homologue $\zeta_{\mu+1}$ etc. Le fuseau F compris entre $\zeta$ et $\zeta_1$ aura pour homologue le fuseau $F_\mu$ compris entre $\zeta_\mu$ et $\zeta_{\mu+1}$. Les fuseaux $F \ldots F_\mu \ldots F_{k-1}$ sont donc tous pareils entre eux: si donc l'un deux, F par exemple, contient la demi-zône $\eta$, chacun d'eux contiendra une des demi-zônes pareilles $\eta, \eta_1, \ldots \eta_{k-1}$.

Les $2k$ demi-zônes $\zeta, \ldots \zeta_{k-1}, \eta, \ldots \eta_{k-1}$, jointes ensemble, reproduiront dans leur entier les $k$ zônes $Z, \ldots Z_{k-1}$; elles partagent la surface du polyèdre en $2k$ régions, bordées chacune par deux demi-zônes pareilles à $\zeta$, et qui sont issues l'une de $S$, l'autre de $T$. Parmi ces $2k$ régions, il y en a $k$ qui sont à la droite d'un observateur qui se mouvrait sur l'une quelconque des demi-zônes qui les bordent, en s'éloignant de l'élément d'où elle est issue. Les $k$ autres régions resteraient à gauche de cet observateur. Chacun de ces systèmes de régions sera évidemment son propre homologue relativement à tous les aspects directs semblables entre eux. Chacun de ces systèmes étant formé de $k$ régions pareilles, et le nombre des aspects directs semblables à un aspect donné étant $2k$, chaque région sera sa propre homologue relativement à deux de ces aspects et contiendra ainsi ou un élément à rotation binaire, ou une arête à retournement. D'ailleurs chaque région est inverse à celles qui lui sont contiguës.

Remarquons enfin que les deux systèmes d'éléments ou d'arêtes remarquables étant inverses l'un de l'autre, seront tous deux à la fois formés de sommets, ou de faces, ou d'arêtes.

2ème cas. Supposons maintenant que *parmi les $2k$ éléments ou arêtes remarquables, il y en ait un au moins, $a$, sur l'une des zônes $Z, Z_1, \ldots Z_{k-1}$.* Admettons par exemple qu'il soit situé sur la demi-zône $\zeta$: il sera nécessairement situé au milieu de cette demi-zône.

1°. En effet, supposons en premier lieu que l'élément remarquable dont il s'agit soit un sommet. Soient $F, G, \ldots$ les faces et arêtes successives de $\zeta$ par l'intermédiaire desquelles $a$ se trouve relié à $S$, $F_1, G_1, \ldots$ celles par lesquelles il se trouve relié à $T$. Le sommet $a$ jouissant de la rotation binaire, le nombre des faces qui s'y croisent sera pair, et chacune de ces faces sera pareille à son opposée: de même pour les arêtes qui les séparent.

Si donc nous comparons ensemble les deux aspects directs relativement auxquels $a$ est son propre homologue, la face ou arête $F$ aura pour homologue

son opposée $F_1$: si le nombre des côtés de $F$ est impair, l'arête $bc$ opposée à $a$ dans $F$ aura pour homologue une arête $b_1c_1$ opposée à $a$ dans $F_1$: la face $G$, contiguë à $F$ suivant $bc$, aura donc pour homologue $G_1$, contiguë à $F_1$ suivant $b_1c_1$. Si le nombre des côtés de $F$ est pair, soient $b$ le sommet opposé à $a$, $b_1$ son homologue dans $F_1$. La face ou arête suivante $G$, opposée à $F$ dans l'angle polyèdre $b$, aura pour homologue $G_1$, opposée à $F_1$ dans l'angle polyèdre $b_1$. Donc dans tous les cas $G$ aura pour homologue $G_1$. La face ou arête $H$, qui suit $G$, aura pour homologue $H_1$, qui suit $G_1$, etc. On arrivera enfin à une face ou arête $I$ aboutissant à $S$. La face homologue $I_1$ aboutira nécessairement à $T$, homologue de $S$. Le nombre des faces $F, G, \ldots I$, comprises entre $a$ et $S$, est donc égal au nombre des faces homologues $F_1$, $G_1, \ldots I_1$ comprises entre $a$ et $T$, ce qu'il fallait démontrer.

2°. En second lieu, si l'élément remarquable, dont il s'agit, est une face $a$, soient $F, G, \ldots$ les faces ou arêtes successives qui la relient à $S$, $F_1, G_1, \ldots$ celles qui la relient à $T$. La face $a$ jouissant de la rotation binaire, le nombre de ses côtés sera pair, et chaque côté ou sommet sera pareil à son opposé.

Comparons ensemble les deux aspects relativement auxquels $a$ est sa propre homologue. $F$ contiguë à $a$ suivant $bc$ (fig. 13), ou opposée à $a$ dans l'angle polyèdre $d$ (fig. 14), aura pour homologue $F_1$ contiguë à $a$ suivant l'arête $b_1c_1$, opposée et homologue à $bc$ ou opposée à $a$ dans l'angle polyèdre formé au point $d_1$, homologue de $d$. La face ou arête $G$, qui suit $F$, aura pour homologue $G_1$, qui suit $F_1$ etc. La démonstration s'achève comme tout à l'heure.

3°. Si $a$ est une arête à laquelle $\zeta$ soit longitudinale, comparons ensemble les deux aspects relativement auxquels ses deux sommets $b$ et $b_1$ sont respectivement homologues. $F$, opposée à $a$ en $b$, aura pour homologue $F_1$, opposée à $a$ en $b_1$, homologue de $b$, etc.

4°. Enfin si $a$ est une arête à laquelle $\zeta$ soit transversale, comparons encore ensemble les deux aspects relativement auxquels ses deux extrémités $b$ et $b_1$ sont respectivement homologues. La face $F$, dans l'intérieur de laquelle pénètre un observateur tournant dans le sens direct autour de $b$, au moment où il franchit l'arête $a$, a pour homologue la face $F_1$, dans laquelle pénètre un observateur tournant dans le sens direct autour de $b_1$, au moment où il franchit l'arête $a$. La démonstration s'achève encore comme tout à l'heure.

*Tous les éléments ou arêtes remarquables sont inverses à eux-mêmes.* En effet, $a$ étant inverse à lui-même, chacun des $k$ éléments ou arêtes pareils

$a, a_1, \ldots a_{k-1}$ le sera également. Si d'autre part nous comparons entre eux les deux aspects $A$ et A relativement auxquels $a$ est son propre homologue inverse, les éléments ou arêtes pareils $a, a_1, \ldots a_{k-1}$ seront homologues inverses les uns des autres. Les autres éléments ou arêtes remarquables $a' \ldots a'_{k-1}$ sont donc homologues inverses les uns des autres. Comme ils sont tous pareils entre eux, chacun d'eux sera inverse à lui-même.

Ces préliminaires posés, on voit aisément que les $2k$ éléments ou arêtes remarquables sont tous situés aux milieux des demi-zônes $\zeta, \zeta_1, \ldots \zeta_{k-1}, \eta \ldots \eta_{k-1}$, et qu'il passe par ces points une zône équatoriale unique $Y$.

En effet, si l'un de ces éléments, $a'$, n'était pas situé sur les demi-zônes, il passerait par ce point deux zônes nouvelles $Y, Y'$, coupant chacune les $k$ précédentes suivant $2k$ éléments ou arêtes au moins. Ces $4k$ éléments ou arêtes seraient tous distincts: car si trois zônes se coupaient suivant un même élément, cet élément présenterait une rotation ternaire, ce qui ne peut être. On aurait donc, non pas $2k$, mais au moins $4k$ arêtes ou éléments remarquables, ce qui est également impossible.

Les éléments et arêtes remarquables étant en nombre $2k$, et tous situés sur les milieux des $2k$ demi-zônes $\zeta \ldots \zeta_{k-1}, \eta \ldots \eta_{k-1}$ ces milieux devront être tous différents les uns des autres. Comme il doit passer deux zônes par chacun de ces éléments ou arêtes remarquables, il y aura au moins une zône équatoriale $Y$. Nous venons de voir d'ailleurs qu'il ne peut y en avoir deux distinctes: car le nombre des éléments et arêtes remarquables surpasserait $2k$.

Si l'un des systèmes remarquables est formé par des arêtes, on pourra distinguer deux cas, suivant que la zône équatoriale $Y$ est longitudinale ou transversale à ces arêtes. Si les deux systèmes remarquables sont formés d'arêtes, $Y$ pourra être longitudinale à tous deux, longitudinale à l'un et transversale à l'autre, ou transversale à tous deux.

Nous remarquerons enfin que les zônes $Z, Z_1, \ldots Z_{k-1}, Y$, ne pouvant se couper que suivant des éléments ou arêtes remarquables, n'auront pas d'intersections autres que celles que nous avons déterminées. Il en résulte que la surface du polyèdre se trouve partagée en $4k$ régions distinctes.

La 5ème classe fournit donc deux types de polyèdres:

1er type. Les deux systèmes d'éléments à rotation binaire ou d'arêtes à retournement sont réciproquement inverses l'un de l'autre. Il existe $k$ zônes méridiennes, partageant la surface du polyèdre en $2k$ régions, dont chacune contient un élément ou arête remarquable.

2ème type. Chacun des éléments ou arêtes remarquables est inverse à lui-même. Il existe $k$ zônes méridiennes et une zône équatoriale, partageant la surface du polyèdre en $4k$ régions distinctes.

### 6ème classe.

Symétrie par retournement et renversement.

Nous traiterons ici à la fois des polyèdres de la 6ème classe, et de ceux de la 5ème classe pour lesquels $k=2$, cas dont l'examen a été réservé.

On sait que ces polyèdres présentent trois systèmes distincts d'éléments ou arêtes remarquables; chaque système étant formé de deux éléments à rotation binaire ou de deux arêtes à retournement. L'un au moins de ces systèmes sera inverse à lui-même. Supposons en effet le premier inverse au second: le troisième ne pourra être inverse ni au premier, car il serait pareil au second, ni au second, car il serait pareil au premier. Il est donc inverse à lui-même.

Soient $S$ et $T$ les deux éléments ou arêtes que contient ce système. On voit comme dans la discussion relative à la 5ème classe qu'il existe deux zônes méridiennes $Z$, $Z'$ se coupant mutuellement en $S$ et $T$. Ce point établi, si $S$ et $T$ sont des éléments, on pourra appliquer sans aucune observation nouvelle les raisonnements employés dans la suite de la discussion relative à la 5ème classe.

Le cas où $S$ et $T$ sont des arêtes $ab$ et $a_1 b_1$ ne présente guère plus de difficulté. Deux cas sont à distinguer.

1er cas. *Le système $S$, $T$ est le seul des trois systèmes remarquables qui soit son propre inverse.*

Les deux autres systèmes remarquables étant inverses l'un de l'autre, sont tous deux à la fois formés de sommets, d'arêtes ou de faces.

Deux zônes quelconques devant se couper suivant des éléments ou arêtes remarquables qui soient inverses à eux-mêmes, les deux zônes $Z$ et $Z'$ ne se traverseront nulle part ailleurs qu'en $S$ et $T$, et il n'existera aucune autre zône différente de celles-là.

Celle des deux zônes $Z$, $Z'$ qui est longitudinale à $S$ est transversale à $T$ et réciproquement. Supposons en effet que la zône $Z$ soit à la fois longitudinale à $ab$ et à $a_1 b_1$. Soit $\zeta$ une des moitiés de $Z$ comprise entre $a$ et $a_1$. Comparons ensemble les deux aspects relativement auxquels $a_1$ est homologue de $a$. La première face ou arête de $\zeta$, $F$, étant opposée à $ab$

dans l'angle polyèdre $a$, aura pour homologue la dernière face ou arête de $\zeta$, $F_1$ opposée à $a_1b_1$ dans l'angle polyèdre $a_1$. La seconde, $G$, aura pour homologue l'avant dernière, $G_1$ etc. enfin l'élément ou arête médian sera son propre homologue: c'est donc un élément ou arête remarquable, qui ferait partie de $\zeta$, et par suite serait inverse à lui-même, contrairement à notre supposition.

Les deux zônes $Z$, $Z'$ divisent le polyèdre en quatre régions. Deux de ces régions sont à la droite d'un observateur qui se mouvrait sur l'une quelconque des demi-zônes qui les bordent, en s'éloignant de l'arête à laquelle cette demi-zône est longitudinale. Les deux autres seraient situées à gauche de cet observateur. Les deux régions de chacun de ces systèmes sont évidemment pareilles entre elles, et chacune d'elles est sa propre homologue relativement à deux aspects distincts. Enfin les deux systèmes de régions seront inverses l'un de l'autre.

2ème cas. *Chacun des trois systèmes remarquables est inverse à lui-même.*

Tous ces éléments ou arêtes remarquables sont situés sur les zônes $Z$, $Z'$. Supposons en effet que l'un d'eux, $c$, soit situé en dehors de ces zônes. Il passerait par $c$ deux zônes nouvelles, qui couperaient $Z$ et $Z'$ suivant huit éléments ou arêtes essentiellement différents: car s'ils n'étaient pas tous différents, on aurait des éléments suivant lesquels plus de deux zônes se couperaient, et qui jouiraient d'une rotation plus que binaire, ce qui ne peut être. Mais il n'y a en tout que 6 éléments ou arêtes remarquables. Cette hypothèse est donc impossible.

Ces éléments ou arêtes remarquables sont situés aux milieux des quatre demi-zônes $\zeta$, $\zeta_1$, $\eta$, $\eta_1$, dans lesquelles $Z$ et $Z'$ sont partagées par les deux arêtes $S$ et $T$. En effet, soit $c$ l'un d'entre eux, situé par exemple sur $\zeta$. Soient $F, G, H, \ldots I$ les faces ou arêtes par lesquelles il se relie à $ab$, $F_1, G_1, \ldots I_1$ celles par lesquelles il se relie à $a_1b_1$. Si l'on compare ensemble les deux aspects relativement auxquels $c$ est son propre homologue, $F, G, \ldots I$ auront respectivement pour homologue $F_1, G_1, \ldots I_1$: enfin $I$ aura pour homologue $I_1$. Le nombre des faces $F, G, \ldots I$ est donc égal au nombre des faces $F_1, G_1, \ldots I_1$.

Si $\zeta$ est longitudinale à l'arête $ab$, $I$ contiendra un seul des sommets $a$ de $ab$: $I_1$ contiendra une seule des extrémités de $a_1b_1$, à savoir $a_1$ homologue de $a$: au contraire, si $\zeta$ est transversale à $ab$, $I$ contient cette arête, et $I_1$ contiendra $a_1b_1$: $\zeta$ sera donc longitudinale ou transversale à $a_1b_1$ en même temps qu'à $ab$.

On voit maintenant comme dans la discussion relative à la 5ème classe

1° qu'il existe une zône équatoriale $Y$ passant par les quatre éléments ou arêtes remarquables qui restent, 2° que les trois zônes $Z, Z', Y$ partagent le polyèdre en huit régions, qui se répartissent en deux systèmes inverses l'un de l'autre, et formés chacun de quatre régions pareilles.

Remarquons encore qu'on peut supposer que les trois systèmes remarquables sont formés chacun d'arêtes: car si l'un d'eux était formé d'éléments, $S'$ et $T'$, on pourrait prendre pour point de départ ce système d'éléments au lieu du système $S$, $T$ et l'on retomberait ainsi sur le cas déjà discuté (page 325). Cela posé, on pourra établir dans le nouveau type de polyèdres ainsi défini deux subdivisions:

1ère subdivision. Chacune des trois zônes $Z, Z', Y$ est longitudinale à l'un des deux systèmes d'arêtes remarquables qu'elle contient et transversale à l'autre.

2ème subdivision. L'une de ces zônes $Z$ est longitudinale aux deux systèmes d'arêtes remarquables qu'elle contient: la seconde $Z'$ est transversale aux deux systèmes qu'elle contient: la troisième $Y$ est longitudinale à l'un des deux systèmes qu'elle contient et transversale à l'autre.

D'après la discussion qui précède, la classe 6 et le cas réservé de la classe 5 fournissent deux types nouveaux de polyèdres.

1er type. Un système de deux arêtes à retournement, $S$ et $T$, inverse à lui-même: deux autres systèmes, inverses l'un de l'autre, d'éléments à rotation binaire ou d'arêtes à retournement. Il existe deux zônes méridiennes dont chacune est longitudinale à l'une des arêtes $S$ et $T$, et transversale à l'autre. Ces zônes divisent la surface du polyèdre en 4 régions dont chacune renferme un élément ou arête remarquable.

2ème type. Trois systèmes d'arêtes à retournement: chacune de ces systèmes est inverse à lui-même. Il existe trois zônes passant chacune par deux systèmes d'arêtes remarquables, et qui partagent la surface du polyèdre en huit régions.

### 7ème classe.

#### Symétrie tétraédrique.

Il existe dans cette classe trois systèmes remarquables. Deux d'entre eux sont composés chacun de quatre éléments à rotation ternaire, et le troisième, de six éléments à rotation binaire, ou de six arêtes à retournement. Les éléments ou arêtes de ce dernier système sont évidemment inverses à eux-mêmes. Car soit $E$ l'un de ces éléments ou arêtes, E son homologue

inverse relativement à deux aspects semblables $A$ et A, l'un pareil, l'autre rétrograde: l'élément ou arête E, devant présenter la même symétrie que $E$, appartiendra nécessairement au troisième système: $E$ étant ainsi pareil à son homologue inverse E sera inverse à lui-même. Quant aux systèmes d'éléments à rotation ternaire, deux cas pourront se présenter: 1° *Les deux systèmes sont inverses l'un de l'autre.* 2° *Chacun d'eux est inverse à lui-même.*

1^er^ cas. Par chaque élément ou arête $E$ du troisième système passent deux zônes. Supposons-les toutes tracées sur la surface du polyèdre. Aucune d'elles ne contiendra d'élément à rotation ternaire, ces éléments n'étant pas inverses à eux-mêmes. Chacune d'elles partage le polyèdre en deux moitiés, qui sont homologues inverses l'une de l'autre relativement aux aspects par rapport auxquels elle est sa propre homologue inverse. Les éléments ou arêtes du 3ème système étant inverses les uns des autres, chacune des deux moitiés du polyèdre devra en contenir le même nombre dans son intérieur. Le nombre de ces éléments ou arêtes non situés sur la zône considérée Z sera donc pair: et leur nombre total étant six, le nombre de ceux situés sur Z sera donc égal à 2, 4 ou 6.

1°. Ce nombre ne peut être égal à 2. En effet, supposons que la zône $Z$ passe seulement par deux éléments ou arêtes $E_1$ et $E_2$ du 3ème système. Soit $E_3$ un autre élément du système. Comparons ensemble les aspects relativement auxquels $E_3$ est homologue à $E_1$. $Z$ aura pour homologue une zône $Z'$ passant par $E_3$ homologue de $E_1$, par un autre élément ou arête $E_4$ homologue de $E_2$, et ne contenant aucun autre élément ni arête remarquable. Ce résultat est absurde: car la zône $Z'$ coupe nécessairement $Z$ suivant deux éléments ou arêtes remarquables, qui, joints à $E_3$, forment au moins trois éléments ou arêtes remarquables situés sur $Z'$.

2°. Ce nombre ne peut être égal à 6. Supposons en effet que $Z$ passe par les six éléments ou arêtes $E_1$, $E_2$, $E_3$, $E_4$, $E_5$, $E_6$. Il ne pourrait exister qu'une seconde zône $Z'$, laquelle passerait également par les six éléments ou arêtes $E$.

En effet, s'il existait deux zônes $Z'$, $Z''$ elles devraient nécessairement se couper suivant des éléments ou arêtes remarquables, appartenant par conséquent au système $E$: ces éléments ou arêtes remarquables seraient donc sur $Z$, et il s'y couperait trois zônes, ce qui est impossible, la symétrie dont ils sont doués étant seulement binaire.

Cela posé, comparons entre eux les douze aspects semblables relativement

auxquels le polyèdre est pareil à lui-même. Le système des deux zônes $Z$, $Z'$, formé des éléments et arêtes inverses à eux-mêmes sera évidemment son propre homologue. Chacune des zônes $Z$, $Z'$ sera donc sa propre homologue sous 6 aspects différents, si elles sont pareilles l'une à l'autre: sous 12 aspects différents, si elles ne sont pas pareilles.

La zône $Z$ divise le polyèdre en deux régions $R$, $R_1$. Si ces deux régions n'étaient pas pareilles, chacune d'elles serait, ainsi que $Z$ elle-même, homologue à elle-même sous 6 ou 12 aspects différents, et présenterait ainsi un élément avec rotation d'ordre 6 ou 12, ce qui est inadmissible. De même, si $Z$ n'était pas pareille à $Z'$, chacune des régions $R$, $R_1$ même supposées pareilles entre elles, serait sa propre homologue sous 6 aspects différents. Enfin dans le cas où les zônes $Z$, $Z'$ seraient pareilles entre elles et les régions $R$, $R_1$ également, $R$ serait sa propre homologue relativement à trois aspects. Elle présenterait donc un seul élément à rotation ternaire, tous les autres étant trois fois répétés. Ces mêmes éléments seraient encore trois fois répétés dans la région pareille $R_1$: tous les éléments, à l'exception d'un seul, servaient donc au moins 6 fois répétés, résultat absurde: car nous savons qu'il doit exister deux systèmes d'éléments quatre fois répétés.

Il est donc démontré que chacune des zônes doit passer par *quatre* éléments ou arêtes du 3ème système. Ces éléments ou arêtes étant au nombre de six, et le nombre des zônes qui passent par chacune étant de deux, le nombre total des zônes sera $\frac{6.2}{4} = 3$.

Ces trois zônes sont pareilles entre elles: car si l'une d'elles $Z$ n'était pareille à aucune des deux autres, elle devrait rester sa propre homologue sous 12 aspects directs distincts, ce qui est impossible.

Deux quelconques de ces zônes ne peuvent se couper suivant plus de deux éléments ou arêtes. Car si $Z$ et $Z'$ se coupaient suivant trois éléments $E_1$, $E_2$, $E_3$, la troisième zône $Z''$, qui contient quatre des six éléments $E$ contiendrait nécessairement un de ceux-là. On aurait ainsi trois zônes passant par un même élément, résultat absurde.

Les trois zônes $Z$, $Z'$, $Z''$ divisent la surface du polyèdre en 8 régions. En effet, la zône $Z$, considérée isolément, partage le polyèdre en deux régions distinctes. En y joignant $Z'$, qui coupe $Z$ en deux points, chacune de ces régions sera évidemment partagée en deux. Enfin la troisième zône $Z''$ coupe les deux précédentes en 4 points en tout, qui la partagent en quatre tronçons.

Chacun de ces tronçons traverse une des régions précédentes, qu'il coupe en deux. Si donc on le supprime par la pensée, on diminuera d'une unité le nombre des régions. En supprimant les quatre tronçons, il resterait 4 régions: il y en a donc huit.

Dans le cas où les $E$ seraient des arêtes, les zônes $Z, Z', Z''$ étant pareilles entre elles, chacune d'elles devra être longitudinale à deux des quatre arêtes qu'elle contient, et transversale aux deux autres. Il y aura deux cas à distinguer suivant que les deux arêtes auxquelles $Z$ est longitudinale sont consécutives ou non pour un observateur faisant le tour de $Z$.

2ème cas. *Supposons maintenant que chacun des systèmes d'éléments à rotation ternaire soit inverse à lui-même.* Si nous traçons toutes les zônes possibles à la surface du polyèdre, elles se croiseront suivant 14 éléments ou arêtes remarquables formant deux systèmes d'éléments quatre fois répétés, et un système d'éléments ou d'arêtes six fois répété. Ces zônes découperont la surface en régions, limitées chacune par un certain nombre de tronçons de zônes, qui dessinent autour d'elle un contour fermé. Les intersections mutuelles de ces tronçons se font suivant des éléments ou arêtes remarquables.

Chacune de ces régions est ou pareille, ou inverse à l'une quelconque d'entre elles prise arbitrairement: les contours qui les bordent sont donc tous pareils ou inverses les uns aux autres. D'autre part, un élément ou arête remarquable ne peut avoir pour homologue ou pour inverse qu'un autre élément ou arête du même système. Si donc nous comparons entre elles deux régions quelconques, le nombre des éléments remarquables de chaque système situés sur leur contour sera le même pour chacune d'elles.

On déduit aisément de ce qui précède le nombre des régions et leur disposition mutuelle.

En effet, imaginons que nous formions, à côté du polyèdre proposé $P$, un autre polyèdre plus simple $\pi$ de la manière suivante: à chaque arête ou élément remarquable $a$ de $P$ faisons correspondre un point $\alpha$ pris arbitrairement dans l'espace: à chaque tronçon de zône joignant deux arêtes ou éléments remarquables $a$ et $b$, faisons correspondre une arête $\alpha\beta$ joignant ensemble les deux points $\alpha$, $\beta$ correspondants à $a$ et $b$: enfin, à chaque région $R$ comprise entre un certain nombre de tronçons de zônes $ab$, $bc$, ... etc., faisons correspondre une face $\varrho$, plane ou gauche, limitée par les arêtes correspondantes $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ etc.

Parmi les éléments remarquables de $P$, il en est huit, répartis en deux

systèmes; $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, $b_1$, $b_2$, $b_3$, $b_4$, où se croisent trois zônes, donnant chacune deux tronçons: le nombre des arêtes de $\pi$ aboutissant à chacun des sommets correspondants $\alpha_1$, $\alpha_2$, ... etc. sera donc égal à six. Dans les 6 autres éléments ou arêtes remarquables de $P$, $c_1$, $c_2$, $c_3$, $c_4$, $c_5$, $c_6$, il se croise deux zônes, formant quatre tronçons. Le nombre des arêtes de $\pi$ aboutissant à chacun des sommets correspondants $\gamma_1$, $\gamma_2$, ... $\gamma_6$ sera donc égal à 4.

Cela posé, chacune des régions $R$, $R'$ etc. contenant sur son contour un même nombre $m$ d'éléments remarquables du 1er système $a$, un même nombre $n$ d'éléments remarquables du second système $b$, un même nombre $p$ d'éléments ou d'arêtes du 3ème système $c$, chacune des faces correspondantes $\varrho$, $\varrho'$, ... passera par $m$ sommets $\alpha$, $n$ sommets $\beta$, et $p$ sommets $\gamma$. On déduit de là immédiatement par le théorème d'*Euler*, et le nombre des faces $\varrho$, et le nombre $m+n+p$ des sommets que contient chacune d'elles.

En effet, le nombre des sommets est de 14. Pour avoir le nombre des faces, il faudra faire le compte de toutes les faces passant par chacun des sommets, puis diviser par $m+n+p$ pour éviter les répétitions, chaque face passant par $m+n+p$ sommets. Or il y a 8 sommets où aboutissent 6 faces, et 6 où aboutissent 4 faces: le total est 72: le nombre des faces est donc $\frac{72}{m+n+p}$.

On opérera de même pour les arêtes: il y a 8 sommets où aboutissent 6 arêtes, et 6 où aboutissent 4 arêtes: total 72: mais comme chaque arête passe par deux sommets, ce nombre se réduit à $\frac{72}{2} = 36$.

Le théorème d'*Euler* donne maintenant l'équation

$$14 + \frac{72}{m+n+p} = 36+2,$$

d'où $m+n+p=3$, $\frac{72}{m+n+p} = 24$.

Ainsi les faces $\varrho$ sont triangulaires, et en nombre 24. D'ailleurs aucun des nombres $m$, $n$, $p$ ne peut être nul: car si l'on avait, par exemple, $m=0$, aucune face de $\pi$ ne devrait aboutir à un sommet de l'espèce $\alpha$, ce qui est absurde, car quel que soit le sommet que l'on considère, il doit y aboutir quelques faces. On a donc $m=n=p=1$ et chaque face $\varrho$ aura trois sommets, appartenant respectivement aux trois systèmes $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

Chacune des faces de $\pi$ aboutissant à l'un des quatre sommets $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\alpha_4$ et à un seul, ces faces peuvent être partagées en quatre groupes, en réunissant

ensemble les six faces qui aboutissent à chacun de ces sommets. Le contour qui limite chacun de ces groupes passera par trois sommets d'espèce $\beta$. En effet, soient $\varrho$, $\varrho_1$, ... $\varrho_5$ les 6 faces de l'un de ces groupes aboutissant toutes à un même sommet $\alpha_1$ (fig. 15). La première $\varrho$ aboutira à trois sommets $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ appartenant respectivement à chacun des trois systèmes $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. La face $\varrho_1$ contiguë à celle-là suivant $\alpha_1\gamma_1$ aura pour sommets $\alpha_1$, $\gamma_1$ et un autre sommet $\beta_2$ du système $\beta$. La face suivante $\varrho_2$ contiguë à $\varrho_1$ suivant $\alpha_1\beta_2$ aura pour sommets $\alpha_1$, $\beta_2$, et un autre sommet $\gamma_2$ du même système que $\gamma_1$. Continuant ainsi, on voit que les six arêtes issues de $\alpha_1$ aboutissent alternativement à des sommets du système $\beta$ et à des sommets du système $\gamma$. Les sommets successifs du contour qui limite le groupe des faces $\varrho$, ... $\varrho_5$ seront donc $\beta_1$, $\gamma_1$, $\beta_2$, $\gamma_2$, $\beta_3$, $\gamma_3$.

Les trois points $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$ partagent ce contour en trois sections $\beta_1\gamma_1\beta_2$, $\beta_2\gamma_2\beta_3$, $\beta_3\gamma_3\beta_1$. Chacune de ces sections sert de séparation entre les faces du groupe considéré et celles d'un autre groupe. Considérons par exemple la section $\beta_1\gamma_1\beta_2$. Il existe quatre faces passant par le sommet $\gamma_1$. Deux d'entre elles $\varrho$, $\varrho_1$ font partie du groupe considéré. La troisième $\varrho'$ est contiguë à $\varrho$ suivant $\beta_1\gamma_1$, et son dernier sommet $\alpha_2$ devra être du système $\alpha$. Enfin la quatrième, $\varrho_1'$ doit être contiguë à $\varrho_1$ suivant $\gamma_1\beta_2$ et à $\varrho'$ suivant $\gamma_1\alpha_2$. Les deux faces $\varrho'$, $\varrho_1'$ aboutissant toutes deux au sommet $\alpha_2$ appartiendront à un même groupe, qui sera contigu au groupe considéré dans toute l'étendue de la section $\beta_1\gamma_1\beta_2$.

Enfin trois groupes distincts aboutiront à chacun des sommets du système $\beta$. En effet, on voit comme tout à l'heure que les six arêtes issues d'un même sommet $\beta$ aboutissent alternativement à des sommets du système $\alpha$ et à des sommets du système $\gamma$. Il y aura donc trois de ces arêtes aboutissant à des sommets $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ du système $\alpha$. Les deux faces qui bordent chacune de ces trois arêtes appartiennent évidemment à un même groupe, et celles qui bordent deux arêtes différentes appartiennent à des groupes différents.

Cela posé, imaginons que les faces de chacun des groupes soient supposées liées invariablement entre elles de manière à former une face composée rigide: que d'autre part les sections de leur contour suivant lesquelles deux groupes quelconques sont contigus soient supposées former également une arête polygonale rigide: nous aurons un nouveau solide $\psi$ plus simple que $\pi$, car il sera composé de quatre faces seulement, chacune triangulaire, et se coupant trois à trois en quatre sommets $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$, $\beta_4$. Ce sera donc un tétraèdre.

Le solide $\pi$ n'est donc qu'un tétraèdre, dont les faces auraient été remplacées chacune par une pyramide à base hexagonale.

Cherchons en dernier lieu quel est le nombre des zônes distinctes qu'on peut tracer sur le polyèdre $P$, et dans quel ordre se succèdent sur chacune d'elles les éléments ou arêtes remarquables qu'elle contient.

Pour cela, considérons (fig. 16) le polyèdre $\pi$, formé comme nous venons de le dire, en remplaçant chacune des faces du tétraèdre $\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4$ par un système de six faces concourantes. Parmi les six arêtes émanées de $\beta_1$, nous avons vu qu'il y en a trois aboutissant à des sommets du système $\alpha$. Soit $\beta_1\alpha_1$ l'une d'elles. Il existe dans le polyèdre $P$ un tronçon de zône $b_1a_1$ correspondant à $\beta_1\alpha_1$. Cette zône $Z$, et les deux autres, $Z'$, $Z''$, qui se traversent mutuellement en $a_1$, donnent autour de ce point 6 tronçons: et le second tronçon de la zône $Z$ sera évidemment celui qui est opposé à $b_1a_1$: il aura pour correspondant dans $\pi$ l'arête opposée à $\beta_1\alpha_1$ au point $\alpha_1$. La figure 16 montre que cette arête aboutit en un sommet $\gamma_1$ du système $\gamma$. On voit de même que le tronçon suivant de la même zône aura pour correspondante l'arête $\gamma_1\alpha_2$, opposée à $\alpha_1\gamma_1$ au point $\gamma_1$: de même le tronçon suivant aura pour correspondante l'arête $\alpha_2\beta_4$ opposée à $\gamma_1\alpha_2$ au point $\alpha_2$; puis viendra l'arête $\beta_4\gamma_2$ et enfin l'arête $\gamma_2\beta_1$, à partir de laquelle on retombe sur l'arête primitive $\beta_1\alpha_1$.

Le contour total $\beta_1\alpha_1\gamma_1\alpha_2\beta_4\gamma_2\beta_1$ correspondant à la zône $Z$ est ainsi formé de six arêtes. La zône $Z$ contient donc six tronçons distincts, et les éléments ou arêtes remarquables $b_1a_1c_1a_2b_4c_2$ que l'on rencontrera sur son contour sont successivement des systèmes $b$, $a$, $c$, $a$, $b$, $c$. Sur les six tronçons que contient cette zône $Z$, il n'y en a que deux, $b_1a_1$ et $a_2b_4$, qui joignent un élément du système $b$ à un élément du système $a$.

Si nous comparons entre eux les 12 aspects relativement auxquels le polyèdre est pareil à lui-même, la zône $Z$ ne peut être sa propre homologue sous plus de deux aspects différents. En effet, soient $A$ et $A'$ deux aspects relativement auxquels $Z$ soit sa propre homologue.

L'homologue du tronçon $b_1a_1$ sera un autre tronçon de $Z$, joignant un élément du système $b$ à un point du système $a$ à un élément du système $b$. Ce sera donc nécessairement ou $b_1a_1$ ou $a_2b_4$.

Cela posé, s'il existait plus de deux aspects relativement auxquels $Z$ fût sa propre homologue, il existerait au moins deux de ces aspects relativement auxquels l'un des tronçons $b_1a_1$, $a_2b_4$ serait homologue à lui-même.

Mais cela est impossible. Supposons en effet que $b_1 a_1$ soit homologue à lui-même, ainsi que $Z$, relativement à deux aspects $A$ et $A'$. L'élément $b_1$ étant le seul de son espèce dans le tronçon $b_1 a_1$, sera son propre homologue. Les faces et arêtes successives du tronçon, $F$, $G$, $H$, ... par lesquelles $b_1$ se relie à $a_1$ sont chacune sa propre homologue. Chaque arête et chaque sommet contenus dans ces faces est également son propre homologue. Les faces contiguës à celles-là suivant leurs diverses arêtes sont elles-mêmes leurs propres homologues etc. En continuant ainsi, on voit que tout élément ou arête du polyèdre est homologue à lui-même: les deux aspects $A$ et $A'$ ne seraient donc pas distincts comme nous l'avons supposé.

La zône $Z$ ne pouvant être sa propre homologue que sous deux aspects au plus, et le nombre des aspects directs semblables étant de 12, il y aura au moins six zônes distinctes pareilles à $Z$. D'ailleurs ces six zônes, contenant chacune six tronçons, contiendront les 36 tronçons qui correspondent aux 36 arêtes de $\pi$. Il existe donc en tout six zônes distinctes, pareilles entre elles.

Dans le cas où les $c$ sont des arêtes, les six zônes étant pareilles entre elles, chacune d'elle est longitudinale à l'une des arêtes $c$ qu'elle contient et transversale à l'autre. Car si l'une d'elles était longitudinale, par exemple, aux deux arêtes qu'elle contient, elle ne pourrait être pareille à celle qui est transversale à l'une de ces arêtes. Les éléments $a$ et $b$ étant chacun quatre fois répétés, il est indifférent que l'arête $c$ à laquelle la zône est longitudinale soit celle qui est comprise entre les deux sommets $a$, ou celle qui est comprise entre les deux sommets $b$.

La 7ème classe fournit donc deux types nouveaux de polyèdres.

1er type. Les deux systèmes d'éléments à symétrie ternaire sont inverses l'un de l'autre. Les éléments ou arêtes à symétrie binaire sont inverses à eux-mêmes. Il existe trois zônes pareilles se coupant deux à deux suivant ces éléments ou arêtes, et divisant le polyèdre en 8 régions.

2ème type. Tous les éléments et arêtes remarquables sont inverses à eux-mêmes. Il existe six zônes pareilles entre elles et divisant le polyèdre en 24 régions.

Les détails circonstanciés dans lesquels nous venons d'entrer vont nous permettre de glisser rapidement sur le cas des solides dérivés des autres polyèdres réguliers, cas qui se traite exactement de la même manière que celui-ci.

## 8ème classe.

### Symétrie cuboctaédrique.

Il existe: 1° Un système unique d'éléments remarquables $a$ à rotation quaternaire, et six fois répétés. 2° Un système unique d'éléments remarquables $b$ à rotation ternaire, et 8 fois répétés. 3° Un système unique d'éléments à rotation binaire ou d'arêtes à retournement $c$, 12 fois répétés. Chacun de ces systèmes sera évidemment inverse à lui-même.

Le polyèdre $\pi$ aura 6 sommets à 8 faces, 8 à 6 faces et 12 à 4 faces. D'où, en désignant par $m$, $n$, $p$ les nombres respectifs de sommets de chaque espèce que contient chaque face, le nombre $N$ des faces sera égal à $\frac{6.8+8.6+12.4}{m+n+p} = \frac{144}{m+n+p}$: celui des arêtes sera $\frac{6.8+8.6+12.4}{2} = 72$.

Le théorème d'*Euler* donnera

$$26 + \frac{144}{m+n+p} = 72+2,$$

d'où $m+n+p=3$, $\frac{144}{m+n+p} = 48$.

Ainsi les faces sont en nombre 48, et triangulaires: chacune d'elles passera d'ailleurs par un sommet de chacun des trois systèmes $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

En groupant ensemble les huit faces qui aboutissent à un même sommet d'espèce $\alpha$ on partagera les 48 faces en 6 groupes: le contour de chaque groupe contient 4 sommets du système $\beta$, qui le partagent en quatre sections, dont chacune sert de séparation entre les faces du groupe considéré et celles d'un autre groupe. Enfin trois groupes concourent à chacun des sommets du système $\beta$. Le solide $\pi$ n'est donc qu'un cube dont chaque face aurait été remplacée par une pyramide à base octogonale (fig. 17).

On voit de même que $\pi$ pourrait également être considéré comme un octaèdre pareil au régulier, dont les faces auraient été remplacées par des pyramides à base hexagonale.

Il reste à déterminer le nombre des zônes distinctes qu'on peut tracer sur $P$, et l'ordre dans lequel se succèdent sur chacune d'elles les éléments ou arêtes remarquables.

Soit $\alpha_1$ un sommet quelconque du premier système dans $\pi$: les arêtes issues de ce point sont de deux sortes, les unes allant à un point du système $\gamma$, tel que $\gamma_1$, les autres à un point du système $\beta$, tel que $\beta_1$.

Considérons en premier lieu l'arête $\alpha_1\gamma_1$. La zône $Z$ qui contient le tronçon $a_1c_1$ correspondant contiendra successivement les tronçons correspondants: à l'arête $\gamma_1\alpha_2$ opposée à $\alpha_1\gamma_1$ au point $\gamma_1$: à l'arête $\alpha_2\gamma_2$ opposée à $\gamma_1\alpha_2$ en $\alpha_2$: aux arêtes $\gamma_2\alpha_3$, $\alpha_3\gamma_3$, $\gamma_3\alpha_4$, $\alpha_4\gamma_4$, $\gamma_4\alpha_1$. Ainsi cette zône contiendra huit tronçons distincts, joignant des sommets qui sont alternativement des systèmes $a$ et $c$. Cette zône ne pouvant être sa propre homologue sous plus de 8 aspects, et le nombre des aspects directs semblables étant de 24, il y aura au moins trois zônes pareilles, $Z$, $Z'$, $Z''$.

Considérons en second lieu l'arête $\alpha_1\beta_1$. La zône $Y$ qui contient le tronçon $a_1b_1$ correspondant à $\alpha_1\beta_1$ contiendra successivement les tronçons correspondants à $\alpha_1\beta_1$, $\beta_1\gamma_5$, $\gamma_5\beta_6$, $\beta_5\alpha_3$, $\alpha_3\beta_7$, $\beta_7\gamma_7$, $\gamma_7\beta_3$, $\beta_3\alpha_1$. Ainsi cette zône contient 8 tronçons, joignant entre eux des sommets ou éléments remarquables, appartenant à des systèmes qui se succèdent dans l'ordre indiqué à la fig. 18.

Sur ces huit tronçons, quatre seulement joignent un élément $a$ à un élément $b$. La zône $Y$ ne peut donc être pareille à elle-même sous plus de quatre aspects différents: il existe donc au moins six zônes pareilles à $Y$.

Les six zônes $Y$, réunies aux trois zônes $Z$, forment en tout neuf zônes, contenant les 72 tronçons qui correspondent aux 72 arêtes de $\pi$. Il n'existe donc pas d'autres zônes que celles-là.

Remarquons encore que si les $c$ sont des arêtes, toutes les trois zônes $Z$, $Z'$, $Z''$ doivent être à la fois longitudinales ou transversales à toutes les arêtes $c$ qu'elles contiennent. Supposons en effet que la zône $Z$ fût transversale à $c_1$ et longitudinale à $c_2$. Le tronçon $a_1c_1$ et le tronçon $a_2c_2$ seraient essentiellement dissemblables, et la zône $Z$ ne pourrait être pareille à elle-même sous 8 aspects différents, comme cela est nécessaire. D'autre part, si $Z$ était transversale aux arêtes $c$ qu'elle contient et $Z'$ longitudinale à celles qu'elle contient, $Z'$ ne pourrait être pareille à $Z$.

Il y aura à distinguer ici deux cas suivant que les zônes $Z$, $Z'$, $Z''$ sont transversales ou longitudinales aux $c$.

La 8ème classe ne fournit donc qu'un type nouveau de polyèdres.

Tous les éléments ou arêtes remarquables y sont inverses à eux-mêmes. Il existe deux systèmes de zônes, l'un formé de 3 zônes pareilles entre elles, l'autre formé de six zônes pareilles entre elles: ils divisent le polyèdre en 48 régions.

## 9ème classe.

### Symétrie icosidodécaédrique.

Il existe un système unique d'éléments remarquables $a$ à rotation d'ordre 5 et 12 fois répétés, un autre d'éléments $b$ à rotation ternaire et 20 fois répétés: enfin un autre d'éléments à rotation binaire ou d'arêtes à retournement 30 fois répétés, $c$. Chacun de ces systèmes sera évidemment inverse à lui-même.

Le polyèdre $\pi$ aura 12 sommets à 10 faces, 20 à 6 faces et 30 à 4 faces. On en déduit comme tout à l'heure le nombre de ses arêtes, 180, et celui de ses faces, 120. Chacune de ces faces est triangulaire et passe par un sommet de chacun des systèmes $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

En groupant ensemble les 10 faces qui aboutissent à un même sommet $\alpha$, on voit que le solide $\pi$ n'est qu'un dodécaèdre pareil au régulier, dont les faces auraient été remplacées par des pyramides à base décagone. Il pourrait être également considéré comme dérivant d'un icosaèdre pareil au régulier, dont les faces auraient été remplacées par des pyramides à base hexagonale.

L'une ou l'autre de ces définitions permet de se représenter nettement le polyèdre $\pi$. On en déduit le nombre des zônes distinctes que l'on peut tracer sur $P$ et l'ordre dans lequel se succèdent sur chacune d'elles les éléments ou arêtes remarquables.

Soit en effet $\alpha_1$ (fig. 19) *) un sommet du premier système $\alpha$: parmi les arêtes issues de ce point, il y en a qui aboutissent à des points du système $\gamma$: soit $\alpha_1\gamma_1$ l'une d'elles.

La zône $Z$ qui contient le tronçon $a_1 c_1$ correspondant à $\alpha_1\gamma_1$ contiendra successivement les tronçons correspondants aux arêtes successives $\alpha_1\gamma_1$, $\gamma_1\alpha_2$, $\alpha_2\beta_1$, $\beta_1\gamma_2$, $\gamma_2\beta_2$, $\beta_2\alpha_3$, $\alpha_3\gamma_3$, $\gamma_3\alpha_4$, $\alpha_4\beta_3$, $\beta_3\gamma_4$, $\gamma_4\beta_4$, $\beta_4\alpha_1$. Elle contient donc 12 tronçons distincts joignant entre eux des éléments ou arêtes remarquables, appartenant à des systèmes qui se succèdent dans l'ordre indiqué à la fig. 20.

Sur ces 12 tronçons, 4 seulement joignent un élément $a$ à un élément $b$. La zône $Z$ ne peut donc être sa propre homologue sous plus de 4 aspects.

Le nombre total des aspects semblables étant de 60, il y aura au moins 15 zônes pareilles. Ces 15 zônes, réunies ensemble, contiennent les 180

*) Pour éviter la confusion des lignes, on n'a tracé sur la figure que l'icosaèdre dont $\pi$ est dérivé, et celles des arêtes de $\pi$ qui correspondent à une même zône $Z$.

tronçons qui correspondent aux 180 arêtes de $\pi$. Il n'existe donc pas d'autres zônes que celles-là.

La 9ème classe ne fournit donc qu'un type nouveau de polyèdres.

Tous les éléments ou arêtes remarquables y sont inverses à eux-mêmes. Il existe un système de 15 zônes pareilles, divisant le polyèdre en 120 régions.

Remarque. Considérons spécialement le cas où les $c$ sont des arêtes. Parmi les quatre arêtes de cette espèce que contient la zône $Z$, il y en a deux qui se trouvent comprises entre deux éléments de l'espèce $a$, et deux au contraire qui se trouvent comprises entre deux éléments $b$ (voir le tableau de la page précédente): soient $c_1$, $c_2$ les deux premières arêtes, $c'_1$, $c'_2$ les deux suivantes. Si la zône $Z$ est longitudinale ou transversale à $c_1$, elle sera longitudinale ou transversale à $c_2$: au contraire elle sera transversale ou longitudinale à $c'_1$, $c'_2$. En effet si la zône $Z$ était longitudinale à $c_1$, par exemple, et transversale à $c_2$, les tronçons qui aboutissent en $c_1$ ne pourraient être pareils à ceux qui aboutissent en $c_2$, et par suite $Z$ ne pourrait être sa propre homologue sous quatre aspects différents, comme cela doit être. D'autre part supposons que $Z$ soit longitudinale à $c_1$ et à $c'_1$: elle le serait à $c_2$, comme nous venons de le voir: on verrait de même qu'étant longitudinale à $c'_1$ elle le sera à $c'_2$: elle le sera donc à toutes les arêtes qu'elle contient: cela posé, soit $Z'$ celle des zônes qui est transversale à $c_1$: elle ne pourrait être pareille à $Z$ comme cela doit être.

On n'aura donc à distinguer que deux cas différents, celui où $Z$ est longitudinale à $c_1$ et celui où elle lui est transversale.

## III°.

## Démonstration d'un dernier théorème.

Deux polyèdres seront dits *inverses* l'un de l'autre si les aspects directs de l'un des polyèdres sont respectivement semblables aux aspects inverses de l'autre.

Soient $P$, $P'$ deux polyèdres symétriques l'un de l'autre relativement à un point ou à un plan donné. On sait que les faces des deux polyèdres sont respectivement égales, mais enchaînées dans un ordre précisément inverse. Les deux polyèdres sont donc inverses l'un de l'autre.

Deux polyèdres inverses à un troisième étant évidemment pareils entre eux, tout polyèdre inverse à $P$ sera pareil à $P'$, et réciproquement.

Théorème. *Soit $P$ un polyèdre inverse à lui-même, et qui de plus peut être pareil à lui-même sous certains aspects directs, en nombre $p$; on pourra déterminer d'une infinité de manières un polyèdre $\Pi$, à faces planes ou gauches, pareil à $P$, superposable à lui-même sous les $p$ aspects relativement auxquels $P$ est pareil à lui-même, et qui sera, de plus, symétrique à lui-même par rapport à un plan ou à un point donné.*

Nous allons démontrer successivement ce théorème pour les classes 2, 5 et 7: les constructions que nous donnerons s'appliquent d'ailleurs aux autres cas, par une analogie évidente.

## Seconde classe.

1er type. *Solides présentant $k$ zônes méridiennes pareilles entre elles.*

Ces $k$ zônes se coupant à leurs extrémités, se partageront mutuellement en $2k$ demi-zônes: soient $Q, Q_1, \ldots Q_{2k-1}$ ces tronçons de zônes, écrits dans l'ordre où les rencontre un observateur tournant dans le sens direct autour de l'un des éléments extrêmes $S$: soient $R, R_1, \ldots R_{2k-1}$ les régions qu'ils laissent respectivement entre eux. Deux régions successives étant inverses l'une de l'autre, les régions de rang pair $R, R_2, \ldots R_{2k-2}$ sont pareilles entre elles: les demi-zônes $Q, Q_2, \ldots Q_{2k-2}$ de rang pair, qui les bordent respectivement sur la gauche, sont donc pareilles entre elles: de même pour les demi-zônes de rang impair $Q_1, \ldots Q_{2k-1}$.

Cela posé, imaginons une sphère quelconque: soient $\sigma, \tau$ deux points situés à l'extrémité d'un même diamètre, $\chi, \chi_1, \ldots \chi_{2k-1}$, $2k$ demi grands cercles ayant $\sigma$ et $\tau$ pour extrémités, et formant entre eux des angles égaux. Faisons correspondre par la pensée la suite de ces demi-cercles à celle des demi-zônes $Q, Q_1, \ldots Q_{2k-1}$: aux régions successives $R, R_1, \ldots R_{2k-1}$ correspondront les fuseaux $\varrho, \varrho_1, \ldots \varrho_{2k-1}$ respectivement compris entre $\chi$ et $\chi_1$, $\chi_1$ et $\chi_2$ etc.

Si l'un des éléments extrêmes du polyèdre, $S$ et $T$, ou tous deux, sont des sommets, nous prendrons pour leur correspondre les pôles $\sigma$ et $\tau$. Si une demi-zône, $Q$ par exemple, contient un sommet $a$ qui soit inverse à lui-même, les $k$ demi-zônes pareilles $Q, Q_2, \ldots Q_{2k-2}$ contiendront chacune un sommet pareil à $a$: nous choisirons, pour correspondre respectivement à ces points $a, a_1, \ldots a_{k-1}$ une série de points $\alpha, \alpha_1 \ldots \alpha_{k-1}$ situés sur les méridiens $\chi, \chi_2, \ldots \chi_{2k-2}$ et tous situés à la même distance de $\sigma$, cette distance restant arbitraire.

Enfin soient $b, c \ldots$ les divers sommets de la région $R$, non inverses

à eux-mêmes: prenons pour leur correspondre des points $\beta$, $\gamma$, ... arbitrairement choisis dans le fuseau $\varrho$. La région voisine $R_1$ a ses sommets $b'$, $c'$ respectivement inverses de $b$, $c$, ...: nous prendrons pour leur correspondre les points $\beta'$, $\gamma'$, ... situés dans $\varrho_1$ et respectivement symétriques de $\beta$, $\gamma$, ... par rapport au plan du méridien $\chi_1$.

Faisons maintenant tourner le système de ces deux régions autour de l'axe $\sigma\tau$, d'un angle $\frac{2\pi}{k}$, puis encore de $\frac{2\pi}{k}$, puis encore de $\frac{2\pi}{k}$ etc. Les fuseaux $\varrho$ et $\varrho_1$ viendront successivement occuper la place de $\varrho_2$ et $\varrho_3$, de $\varrho_4$ et $\varrho_5$ etc. et le système des deux points conjugués $\beta$, $\beta'$ occupera successivement $k$ positions différentes $\beta$ et $\beta'$, $\beta_1$ et $\beta'_1$, $\beta_2$ et $\beta'_2$ etc.: nous prendrons ces $2k$ points pour correspondre respectivement aux sommets $b, b', b_1, b'_1$ ... etc. alternativement pareils et inverses à $b$, et situés respectivement dans les régions $R$, $R_1$, $R_2$, ....

Supprimons maintenant les méridiens $\chi$, $\chi_1$ etc. qui ont servi à la construction, et faisons correspondre à chaque arête $mn$ de $P$, un arc de grand cercle $\mu\nu$ joignant ensemble les deux points $\mu$, $\nu$ respectivement correspondants à $m$ et à $n$. Nous aurons obtenu un réseau sphérique évidemment pareil à $P$, et qui, en vertu de sa construction même, sera superposable à lui-même par une rotation d'un angle $\frac{2\pi}{k}$ autour de $\sigma\tau$. En effet, soit $\mu\nu$ un arc quelconque, joignant deux sommets situés dans le fuseau $\varrho$ par exemple: cet arc correspond à une arête $mn$ située dans la région $R$: la région pareille $R_2$ contient une arête pareille $m_1 n_1$ à laquelle correspond un arc de cercle $\mu_1\nu_1$ dans le fuseau $\varrho_2$. Si le réseau tourne de l'angle $\frac{2\pi}{k}$, $\mu$ succédera à $\mu_1$, $\nu$ à $\nu_1$ et $\mu\nu$ à $\mu_1\nu_1$.

Le réseau jouit enfin de la propriété d'être son propre symétrique par rapport à l'un quelconque des plans méridiens tracés ci-dessus: au plan du méridien $\chi_1$ par exemple. Soit en effet $\beta$ un sommet quelconque de la région $\varrho$: on voit aisément que les $2k$ sommets $\beta$, $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$ etc. sont respectivement symétriques des sommets $\beta'$, $\beta'_1$, ... etc. Car tous ces points sont situés sur un même parallèle $\Psi$. Prenons le plan de ce parallèle pour plan de la figure 21. Le méridien $\chi_1$, perpendiculaire à ce plan, se projette suivant une ligne droite $O\theta$ qui coupe le parallèle au point $\theta$, milieu de $\beta\beta'$, puisque, par construction, ces deux points sont symétriques par rapport au plan méridien. Cela posé, si nous prenons le rayon du parallèle pour unité, l'arc compris

entre le point $\beta$ et l'un des points pareils $\beta_\lambda$ est égal à $\lambda\cdot\frac{2\pi}{k}$: on a donc

$$\text{arc}\,\theta\beta_\lambda = \lambda\cdot\frac{2\pi}{k} - \text{arc}\,\beta\theta.$$

De même l'arc compris entre $\beta'_{k-1-\lambda}$ et $\beta'$ étant égal à $\lambda\cdot\frac{2\pi}{k}$ on aura

$$\text{arc}\,\beta'_{k-1-\lambda}\theta = \lambda\cdot\frac{2\pi}{k} - \text{arc}\,\theta\beta' = \text{arc}\,\theta\beta_\lambda.$$

Les deux points $\beta_\lambda$ et $\beta'_{k-1-\lambda}$ sont donc symétriques l'un de l'autre.

Joignons maintenant chaque point de la sphère au centre: prenons sur ce rayon une longueur arbitraire, mais la même pour chaque système de $2k$ points conjugués tels que $\beta$, $\beta'$, $\beta_1$, $\beta'_1$ etc. Les points ainsi déterminés formeront un polyèdre $\Pi$ évidemment superposable à lui-même par une rotation d'un angle $\frac{2\pi}{k}$ et symétrique à lui-même par rapport au plan $\chi_1$.

2ème type. *Solides à zône équatoriale.*

La zône équatoriale $Z$ divise le polyèdre en deux régions inverses $R$, $R'$. Nous tracerons sur la sphère un grand cercle $\zeta$, qui la divise en deux moitiés, $\varrho$, $\varrho'$, respectivement correspondantes à $R$ et $R'$.

Chaque sommet $b$ de la région $R$ a $k$ sommets pareils $b, b_1, \ldots b_{k-1}$ dans cette région, et $k$ inverses $b', b'_1, \ldots b'_{k-1}$ dans l'autre. Soient $\beta$ un point arbitraire de la région $\varrho$: $\beta, \beta_1, \ldots \beta_{k-1}$ les $k$ positions que ce point occupe successivement lorsque on fait tourner la sphère, autour de la droite $\sigma\tau$ qui passe par les pôles de $\zeta$, des angles $\frac{2\pi}{k}, \frac{4\pi}{k} \cdots (k-1)\frac{2\pi}{k}$; enfin soient $\beta', \beta'_1, \ldots \beta'_{k-1}$ les points symétriques de ceux-ci par rapport à l'équateur $\zeta$. Nous prendrons pour correspondre respectivement aux points $b, b_1, \ldots b', b'_1, \ldots$ ceux-ci $\beta, \beta_1, \ldots \beta', \beta'_1, \ldots$ etc.

Si la région $R$ contient un sommet $S$ pareil à lui-même, on prendra pour lui correspondre le pôle $\sigma$, et pour correspondre à son inverse $T$, le pôle $\tau$. S'il existe sur $Z$ des sommets $a$ qui soient inverses à eux-mêmes. on prendra leurs correspondants $\alpha$ sur l'équateur.

A chaque arête $mn$ du polyèdre, faisons correspondre un arc de grand cercle $\mu\nu$ joignant les points $\mu$ et $\nu$ respectivement correspondants à $m$ et à $n$. Le réseau ainsi déterminé sera évidemment pareil à $P$, superposable à lui-même par une rotation d'un angle $\frac{2\pi}{k}$, et symétrique à lui-même par rapport au plan de l'équateur $\zeta$. On en déduit comme tout à l'heure l'existence d'un polyèdre $\Pi$ jouissant des mêmes propriétés.

3ème type. *Aucun élément n'est son propre inverse.*

Soient $b$ un sommet quelconque, $b_1, \dots b_{k-1}$ les sommets pareils, $b', b'_1, \dots b'_{k-1}$ leurs inverses. On prendra pour leur correspondre respectivement un point $\beta$ choisi arbitrairement sur la sphére, les points $\beta_1, \dots \beta_{k-1}$ avec lesquels ce point vient successivement coïncider par des rotations d'angle $\frac{2\pi}{k}$, $\frac{4\pi}{k}$ etc. effectuées autour d'un diamètre déterminé $\sigma\tau$: enfin les points $\beta', \beta_1, \dots \beta'_{k-1}$ symétriques de ceux-ci par rapport au centre de la sphère. S'il existe un sommet $S$ pareil à lui-même, on prendra pour lui correspondre le point $\sigma$. Son inverse $T$ aura pour correspondant $\tau$.

Le réseau formé sur les sommets ainsi déterminés sera évidemment pareil à $P$, superposable à lui-même par une rotation d'un angle $\frac{2\pi}{k}$, enfin symétrique à lui-même par rapport au centre de la sphère. On en déduit comme tout à l'heure un polyèdre $\Pi$ jouissant des mêmes propriétés.

## Cinquième classe.

1er type. *Solides présentant k zônes méridiennes, sans zône équatoriale.*

Les $k$ zônes méridiennes partagent la surface du polyèdre en $2k$ régions $R, R_1, \dots R_{2k-1}$, comme pour la seconde classe, premier type. Mais il y a cette différence dans le cas actuel que le solide étant symétrique par renversement, chaque région est sa propre homologue sous deux aspects différents: elle contient ainsi un élément à rotation binaire, ou une arête à retournement: tous ses autres éléments seront pareils deux à deux.

Nous choisirons les sommets du réseau sphérique correspondant au polyèdre $P$ de la même manière que pour les solides de la 2ème classe, 1er type, avec cette seule différence que nous aurons soin de choisir pour correspondre à chaque couple de sommets pareils $b$, $B$ pris dans la région $R$, deux points $\beta$, B du fuseau $\varrho$ symétriquement placés par rapport au point $I'$, centre de ce fuseau. Si l'élément doué de rotation binaire que renferme $R$ est un sommet, on prendra pour lui correspondre le point $I'$ lui-même.

En observant cette précaution, le réseau pareil à $P$ que l'on obtiendra par la méthode décrite (pages 339—341) sera non seulement superposable à lui-même par une rotation d'un angle $\frac{2\pi}{k}$ et symétrique à lui-même par rapport à un plan: mais il sera encore superposable à lui-même par renversement. En effet, faisons tourner le réseau de 180° autour du diamètre qui passe par $I'$ (fig. 22). Les sommets pareils $\beta$ et B se remplaceront réciproque-

ment: les deux méridiens $\chi$, $\chi_1$ se remplaceront également l'un l'autre. Le point B', symétrique de B par rapport à $\chi_1$, remplacera donc $\beta_{k-1}$ symétrique de $\beta$ par rapport à $\chi$, et réciproquement. Le parallèle P du point B viendra remplacer le parallèle $\varpi$ du point $\beta$ et réciproquement. Le point $B_1$ situé sur P à une distance de B égale à la $k^{\text{ième}}$ partie de la longueur totale de ce parallèle, viendra donc remplacer le point $\beta_{k-1}$, situé sur $\varpi$ et à la même distance de $\beta$. De même pour tous les autres points. Chaque point étant ainsi permuté avec un autre point pareil, le réseau tout entier sera superposé à lui-même.

2ème type. *Solides à zône équatoriale et à k zônes méridiennes.*

Les $k$ zônes méridiennes, considérées isolément, partagent la surface du polyèdre en $2k$ régions $R$, $R_1$, ... $R_{2k-1}$ etc. alternativement inverses et pareilles à la première $R$. Chacune de ces régions, telle que $R$, étant divisée par la zône équatoriale en deux régions inverses l'une de l'autre, les sommets qu'elle contient se grouperont par couples de deux sommets réciproquement inverses $b$ et $B$. Quelques sommets $c$ pourront d'ailleurs être leurs propres inverses: ils seront situés sur la zône équatoriale.

Nous choisirons ici encore les sommets du réseau sphérique correspondant à $P$ de la même manière que pour la seconde classe, 1er type, sauf cette différence que l'on aura soin de prendre, pour correspondre à chaque couple de sommets inverses l'un de l'autre, $b$, $B$ pris dans la région $R$, deux points $\beta$, B du fuseau $\varrho$ symétriqnement placés par rapport à l'équateur $\zeta$ de la sphère. Si $R$ présente quelque sommet $c$ inverse à lui-même, on prendra son correspondant sur l'équateur.

En observant cette précaution, le réseau pareil à $P$ que l'on formera par la méthode ci-dessus indiquée sera non seulement superposable à lui-même par une rotation d'angle $\frac{2\pi}{k}$, et symétrique à lui-même par rapport à un plan: mais il sera superposable à lui-même par retournement. En effet, soit $d$ le point d'intersection de l'équateur avec le méridien $\chi_1$, qui sépare les deux régions $\varrho$ et $\varrho_1$ (fig. 23) faisons tourner le système de 180° autour du diamètre qui passe par ce point. Le point $\beta$ sera évidemment permuté avec le point B', symétrique de B par rapport à $\chi_1$. Ce point B' fait partie du réseau par construction: il est inverse à B et par suite pareil à $\beta$. De même le point $\beta'$, inverse de $\beta$ sera permuté avec le sommet B qui lui est pareil. De même pour les autres points. Donc enfin le réseau sera superposé à lui-même.

## Septième classe.

1er type. *Les éléments à rotation ternaire ne sont pas inverses à eux-mêmes. Il existe trois zônes Z, Z', Z'' divisant le polyèdre en 8 régions R, $R_1$, etc.*

Traçons à la surface d'une sphère trois grands cercles rectangulaires $\zeta$, $\zeta'$, $\zeta''$ respectivement correspondants à $Z$, $Z'$, $Z''$: ils partageront la surface de la sphère en 8 triangles trirectangles $\varrho$, $\varrho_1$, ... etc. respectivement correspondants à $R$, $R_1$, etc.

Soit $b$ un sommet quelconque de $R$. Cette région étant homologue à elle-même sous trois aspects distincts, contiendra trois sommets pareils $b$, $b'$, $b''$: on prendra pour leur correspondre trois points $\beta$, $\beta'$, $\beta''$ pris dans la région $\varrho$ et choisis de telle sorte qu'ils se permutent entre eux lorsque on fait tourner le triangle de l'angle $\frac{2\pi}{3}$ autour de son centre $\gamma$. $R$ contient un élément $c$ qui est homologue à lui-même sous ces trois aspects: si c'est un sommet, on prendra le point $\gamma$ pour lui correspondre. Si un sommet de $R$ est inverse à lui-même, il sera situé sur la zône de séparation de $R$ et d'une région contiguë $R'$. On prendra pour lui correspondre un point situé sur l'arc de cercle qui limite les deux régions $\varrho$ et $\varrho_1$. Enfin, si un sommet de $R$ est à la fois inverse à lui-même et doué de rotation binaire, il sera situé à la rencontre de deux des zônes qui limitent $R$. On prendra pour lui correspondre celui des sommets de $\varrho$ qui se trouve situé à l'intersection des cercles correspondants à ces zônes.

Sur les huit régions de $P$, il en existe quatre pareilles à $R$: ces régions étant nécessairement non contiguës, sont celles qui répondent au triangle $\varrho$ et aux trois triangles $\varrho_1$, $\varrho_2$, $\varrho_3$ qui lui sont opposés par le sommet. A chaque système de sommets $b$, $b'$, $b''$ de $R$ correspond un système de sommets homologues dans $R_1$. Nous prendrons pour lui correspondre un système de points choisis dans $\varrho_1$ de telle sorte qu'il se confonde avec le système des points $\beta$, $\beta'$, $\beta''$ lorsque on transporte le triangle $\varrho_1$ sur le triangle $\varrho$ pour les faire coïncider ensemble. Nous ferons de même pour $\varrho_2$ et $\varrho_3$.

Les quatre autres régions, $R'$, $R'_1$, $R'_2$, $R'_3$ ont leurs sommets inverses des précédents. Les triangles correspondants $\varrho'$, $\varrho'_1$, $\varrho'_2$, $\varrho'_3$ sont respectivement symétriques de $\varrho$, $\varrho_1$, $\varrho_2$, $\varrho_3$ par rapport au centre de la sphère: et l'on prendra pour correspondre respectivement aux sommets de $R'$, $R'_1$, etc. les

points de la sphère symétriques des points précédemment marqués par rapport au centre de la sphère.

Sur les points ainsi déterminés nous pourrons former un réseau, qui par construction, sera son propre symétrique par rapport au centre de la sphère *). Il sera en outre superposable à lui-même de 12 manières différentes. En effet, si l'on fait tourner le réseau de manière à amener un quelconque des quatre triangles $\varrho$, $\varrho_1$, $\varrho_2$, $\varrho_3$ à la place occupée primitivement par $\varrho$, les quatre triangles se remplaceront évidemment les uns les autres: dès lors, en vertu de notre construction, tous les sommets $a$, $b$, etc. contenus dans chacun d'eux remplaceront les sommets homologues $a_1$, $b_1$, etc. de celui qui occupait précédemment la même place. Les points symétriques de $a$, $b$, ... par rapport au centre de la sphère viendront donc à la place qu'occupaient les points symétriques de $a_1$, $b_1$, etc. Tous les sommets seront donc remplacés par leurs homologues, et le réseau sera superposé à lui-même.

Si maintenant on fait tourner le réseau autour du diamètre qui passe par $\gamma$, on pourra superposer le triangle $\varrho$ à lui-même de trois manières différentes. Les triangles $\varrho_1$, $\varrho_2$, $\varrho_3$ seront permutés entre eux, et d'après ce qui précède, le réseau sera encore superposé à lui-même. On peut donc le faire coïncider avec lui-même de $4.3 = 12$ manières différentes.

2ème type. ***Tous les éléments et arêtes remarquables sont inverses à eux-mêmes. Il existe six zônes pareilles, découpant le polyèdre en 24 régions.***

Traçons à la surface de la sphère quatre arcs de cercle, joignant les sommets d'un tétraèdre régulier. Par le centre de chacun des quatre triangles sphériques ainsi formés, menons 6 arcs de grand cercle, aboutissant aux sommets du triangle et aux milieux de ses côtés. Nous aurons décomposé la surface de la sphère en 24 triangles rectangles. Deux quelconques de ces triangles contigus entre eux sont évidemment symétriques l'un de l'autre. Deux triangles contigus à un troisième sont donc superposables. Les 24 triangles se partagent donc en deux systèmes, formés chacun de 12 triangles égaux.

Nous pouvons établir une correspondance entre ces triangles et les régions du polyèdre $P$, qui s'enchainent les unes aux autres de la même manière, ainsi que nous l'avons vu. Soient $R$ une de ces régions, $\varrho$ le triangle correspondant. A chaque sommet $b$ de $R$, faisons correspondre un point

*) On verrait aisément qu'il est également symétrique à lui-même par rapport au plan de chacun des trois cercles $\zeta$, $\zeta'$, $\zeta''$.

$\beta$ de $\rho$. Si un sommet $c$ est inverse à lui-même, il est situé sur la limite de $R$ et d'une autre région $R'$. On prendra pour lui correspondre un point situé sur l'arc de cercle qui sépare les triangles correspondants $\rho$ et $\rho'$. Enfin si ce point est à l'intersection de plusieurs zônes, on prendra pour lui correspondre l'intersection des arcs correspondants.

A chaque sommet $b$ de $R$ correspond un sommet pareil dans chacune des régions pareilles $R_1$, $R_2$, etc. On prendra pour lui correspondre les points des triangles correspondants $\rho_1$, $\rho_2$, ... qui viennent coïncider avec $b$ lorsque on déplace $\rho_1$, $\rho_2$, ... pour les superposer à $\rho$. Aux autres régions $R'$, $R'_1$ etc. inverses des précédentes, correspondent des triangles $\rho'$, $\rho'_1$, ... symétriques des précédents par rapport au centre de la sphère. En effet, les sommets du tétraèdre ont pour symétriques les milieux de ses faces: les milieux des arêtes sont symétriques les uns des autres. Le triangle $\rho$ ayant trois de ces points pour sommets, le triangle symétrique par rapport au centre de la sphère aura encore trois de ces points pour sommets. Ce sera donc l'un de ceux de la série $\rho'$, $\rho'_1$, ... etc. Ce triangle, que nous désignerons par $\rho'$, correspondra à l'une des régions inverses de $R$: cette région $R'$ contient un sommet $b'$ inverse à $b$: Nous prendrons pour lui correspondre le point $\beta'$ symétrique de $\beta$ par rapport au centre de la sphère.

Le réseau pareil à $P$ que nous formons ainsi est symétrique à lui-même par rapport au centre de la sphère. (On verrait aisément qu'il l'est aussi par rapport à chacun des six plans bissecteurs des angles dièdres du tétraèdre.) Enfin si on le déplace de manière à amener l'un quelconque des 12 triangles $\rho$, $\rho_1$ etc. à la place occupée par $\rho$, les 12 triangles $\rho$, $\rho'_1$, ... etc. se succéderont les uns aux autres: leurs points homologues se succéderont donc mutuellement. Leurs symétriques par rapport au centre de la sphère se succéderont de même, et par suite le réseau sera superposé à lui-même.

## IV°.

## Récapitulation.

Les résultats définitifs obtenus dans ce mémoire peuvent être formulés ainsi qu'il suit:

Théorème I. La similitude de deux aspects directs entraîne celle des aspects rétrogrades correspondant aux mêmes sommets et arêtes, et réciproquement.

Théorème II. Soit $P$ un polyèdre inverse à lui-même, et qui de plus soit pareil à lui-même sous certains aspects directs en nombre $p$: on pourra déterminer d'une infinité de manières un polyèdre $\pi$, à faces planes ou gauches, pareil à $P$, superposable à lui-même sous les $p$ aspects relativement auxquels $P$ est pareil à lui-même, et qui sera, de plus, symétrique à lui-même par rapport à un plan ou à un point donné.

Lemmes. Si le polyèdre considéré $P$ présente des éléments ou arêtes inverses à eux-mêmes, ils dessinent autour du polyèdre une ou plusieurs zônes continues. Ces zônes partagent le polyèdre en un certain nombre de régions. Ces régions sont de deux espèces seulement, deux régions contiguës étant inverses l'une de l'autre.

Si $k$ zônes se coupent suivant un même élément, il y a une rotation de l'ordre $k$ autour de cet élément: réciproquement, si un élément est inverse à lui-même et doué d'une rotation de l'ordre $k$, il s'y croisera $k$ zônes.

Il ne peut se couper plus de deux zônes suivant une arête. Toute arête suivant laquelle se coupent deux zônes est douée de symétrie de retournement. Réciproquement, si une arête est inverse à elle-même et douée de symétrie de retournement, il s'y coupera deux zônes.

Théorème III. Tout polyèdre inverse à lui-même appartient à l'un des 18 types suivants:

1ère classe. *Polyèdres dont tous les aspects directs sont différents.* Cette classe présente deux types de polyèdres inverses à eux-mêmes.

1er type. Il existe des éléments et arêtes inverses à eux-mêmes et situés sur une zône unique $Z$.

2ème type. Il n'existe ni éléments ni arêtes inverses à eux-mêmes.

2ème classe. *Polyèdres symétriques par rotation.* Cette classe fournit trois types de polyèdres inverses à eux-mêmes.

1er type. Chacun des éléments uniques $S$ et $T$ est inverse à lui-même. L'ordre de la rotation étant $k$, on peut tracer autour du polyèdre $k$ zônes *méridiennes* se coupant aux deux *pôles* $S$ et $T$.

2ème type. $S$ est l'inverse de $T$ et réciproquement. Il existe des éléments ou arêtes inverses à eux-mêmes et formant autour du polyèdre une zône *équatoriale* unique.

3ème type. $S$ est l'inverse de $T$ et réciproquement. Il n'existe ni élément ni arête inverse à lui-même: $k$ lignes géodésiques pareilles $L, L_1, \ldots L_{k-1}$ convenablement tracées entre $S$ et $T$, découpent la surface du polyèdre en

$k$ fuseaux pareils, partagés chacun en deux régions inverses l'une de l'autre par l'une des lignes $\Lambda, \ldots \Lambda_{k-1}$ inverses de $L, \ldots L_{k-1}$.

3ème classe. *Polyèdres symétriques par rotation et retournement.*

Type unique. Il existe deux zônes méridiennes se croisant suivant l'élément unique, et suivant l'arête à retournement.

4ème classe. *Polyèdres symétriques par retournement.*

1er type. Chacune des arêtes uniques $S$ et $T$ est inverse à elle-même. Il existe deux zônes méridiennes se croisant suivant ces deux arêtes, et découpant la surface du polyèdre en 4 régions.

2ème type. L'arête $S$ est l'inverse de $T$ et réciproquement. Il existe des éléments ou arêtes inverses à eux-mêmes et formant autour du polyèdre une zône équatoriale.

3ème type. L'arête $S$ est inverse de $T$ et réciproquement. Il n'existe ni élément ni arête inverse à lui-même. Deux lignes géodésiques pareilles $L, L_1$, convenablement tracées entre $S$ et $T$, découpent la surface du polyèdre en deux régions pareilles, partagées chacune en deux régions inverses l'une de l'autre par l'une des lignes $\Lambda, \Lambda_1$ inverses de $L$ et $L_1$.

5ème classe. *Polyèdres symétriques par rotation et renversement.*

1er type. Il existe $k$ zônes méridiennes, se croisant aux deux pôles $S$ et $T$, et partageant la surface du polyèdre en $2k$ régions, dont chacune est homologue à elle-même sous deux aspects directs différents.

2ème type. Chacun des éléments ou arêtes remarquables est inverse à lui même. Il existe, outre les $k$ zônes méridiennes, une zône équatoriale Le nombre des régions du polyèdre est $4k$.

3ème type. Il existe un système de deux arêtes à retournement inverses à elles-mêmes: et deux systèmes, inverses l'un de l'autre, d'éléments à rotation binaire. Il existe deux zônes méridiennes, qui se croisent suivant les arêtes remarquables et partagent la surface du polyèdre en 4 régions dont chacun est homologue à elle-même sous deux aspects directs différents.

6ème classe. *Polyèdres symétriques par retournement et renversement.*

1er type. Un seul des trois systèmes d'arêtes à retournement est inverse à lui-même. Il existe deux zônes méridiennes se croisant suivant les arêtes de ce système et partageant la surface du polyèdre en 4 régions dont chacune est homologue à elle-même sous deux aspects directs différents.

2ème type. Chacun des trois systèmes d'arêtes à retournement est

inverse à lui-même. Il existe trois zônes, passant chacune par deux systèmes d'arêtes remarquables, et partageant la surface du polyèdre en 8 régions.

7ème classe. *Polyèdres à symétrie tétraédrique.*

1er type. Les deux systèmes d'éléments à symétrie de rotation ternaire sont inverses l'un de l'autre. Les éléments ou arêtes à symétrie binaire sont inverses à eux-mêmes. Il existe trois zônes pareilles, se coupant deux à deux suivant ces éléments ou arêtes, et divisant le polyèdre en 8 régions dont chacune est sa propre homologue relativement à trois aspects directs différents.

2ème type. Tous les éléments ou arêtes remarquables sont inverses à eux-mêmes. Il existe six zônes pareilles entre elles et divisant le polyèdre en 24 régions.

8ème classe. *Polyèdres à symétrie cuboctaédrique.*

Type unique. Tous les éléments ou arêtes remarquables sont inverses à eux-mêmes. Il existe deux systèmes de zônes l'un formé de 3 zônes pareilles entre elles, l'autre de 6 zônes pareilles entre elles. Ils divisent le polyèdre en 48 régions.

9ème classe. *Polyèdres à symétrie icosidodécaédrique.*

Type unique. Tous les éléments ou arêtes remarquables sont inverses à eux-mêmes. Il existe un seul système de 15 zônes pareilles, divisant le polyèdre en 120 régions.

Observation. Lorsque deux zônes se coupent suivant une arête, l'une de ces zônes est longitudinale, et l'autre transversale à cette arête. Cette distinction permettrait d'établir des divisions secondaires dans quelques-uns des types ci dessus.

Paris, 1868.

# Note sur la symétrie inverse des polyèdres non euleriens.

(Par M. *Camille Jordan* à Paris.)

---

Dans une note insérée au T. 66 de ce journal nous avons indiqué la manière de répartir les surfaces polyédriques en espèces correspondant aux diverses valeurs qui peuvent être assignées à deux paramètres $m$ et $n$: nous avons en outre indiqué que les polyèdres de l'espèce $(0, 1)$ (ceux qui présentent l'aspect général d'un tore, par exemple) sont susceptibles de trois sortes de symétrie directe, que nous avons appelées

1°. Symétrie $mn$-aire
2°. Symétrie $mn$-binaire
3°. Symétrie $mn$-quaternaire.

Les paramètres $m$ et $n$ pouvant chacun prendre toutes les valeurs entières possibles, sauf dans le dernier cas, où nous avons signalé une restriction à laquelle ces valeurs sont soumises.

En reprenant récemment la question, je viens de reconnaître, que la restriction indiquée au lieu cité n'est pas suffisante, et qu'on doit avoir nécessairement $n = m$, de sorte que la dénomination de symétrie $mn$-quaternaire doit être remplacée par la suivante: *symétrie* $m^2$*-quaternaire*. La valeur du paramètre $m$ peut d'ailleurs être un entier quelconque.

D'autre part, en appliquant la méthode exposée dans le mémoire ci-dessus à la recherche des symétries inverses de ces polyèdres, on obtient les résultats suivants.

Si un polyèdre d'espèce $(0, 1)$, et présentant la symétrie $mn$-aire, est en outre inverse à lui-même, trois cas pourront se présenter:

1°. Aucun élément ni arête n'est son propre inverse.

Soient dans ce cas $A$, $\alpha$ deux sommets inverses l'un de l'autre, et choisis aussi voisins que possible, $L$ une ligne géodésique tracée entre $A$ et $\alpha$, $L$, $L'$ etc. les diverses lignes pareilles ou inverses à $L$ que l'on peut tracer sur le polyèdre. L'ensemble de ces lignes constituera $m$ contours fermés $K$, $K'$ ... ne se coupant pas eux-mêmes ni mutuellement: sur chacun de ces contours se trouveront $n$ sommets pareils à $A$, et $n$ pareils à $\alpha$, qui se succèdent, alter-

nativement. Ces contours découperont enfin la surface du polyèdre en $m$ régions $R$, $R'$ annulaires, pareilles entre elles, et analogues à celles que $m$ cercles méridiens détermineraient sur la surface d'un tore. Chacune de ces régions $R$ est inverse à elle-même, et pareille à elle-même sous $n$ aspects. Soit $A$ une ligne tracée sur l'une des régions $R$ de manière à être la plus courte possible tout en joignant entre eux deux sommets inverses $B$ et $\beta$. Les diverses lignes pareilles ou inverses à $A$ que l'on peut tracer sur la dite région forment un contour fermé $I$, ne se coupant pas lui-même, et sur lequel se trouveront alternativement $n$ sommets pareils à $B$ et $n$ sommets pareils à $\beta$. Ce contour $I$ partagera l'anneau $R$ en deux anneaux partiels $\varrho$ et $\varrho'$ inverses l'un de l'autre et dont chacun est pareil à lui-même sous $n$ aspects. Enfin si $n$ ne se réduit pas à l'unité, on peut tracer de l'un à l'autre des deux contours qui limitent l'un de ces anneaux, tel que $\varrho$, $n$ lignes géodésiques $\lambda$, $\lambda'$, ... ne se coupant pas elles-mêmes ni mutuellement et partageant l'anneau en $n$ régions quadrangulaires pareilles entre elles, et qui prises isolément ne présentent plus aucune symétrie.

2° et 3°. Il existe des éléments ou arêtes qui sont leurs propres inverses.

Soit $A$ l'un de ces éléments: traçons toutes les zônes $Z$, $Z'$ formées d'éléments inverses à eux-mêmes et pareilles à celles qui passent par cet élément. Elles seront en nombre $m$, ne se couperont elles-mêmes ni mutuellement, passeront chacune par $m$ éléments pareils à $A$ et partageront la surface du polyèdre en $m$ régions $R$, $R'$ annulaires et pareilles entre elles. Chacune de ces régions $R$ est inverse à elle-même, et pareille à elle-même sous $n$ aspects.

Si les régions $R$ ne contiennent aucun élément qui soit son propre inverse, ce qui constituera le second cas, on pourra tracer dans chacune d'elles un contour fermé $I$ la partageant en deux anneaux partiels $\varrho$, $\varrho'$ inverses l'un de l'autre: enfin si $n > 1$, chacun d'eux pourra être décomposé en $n$ régions quadrangulaires pareilles par des lignes géodésiques joignant ensemble la zône et le contour qui le limitent respectivement.

Si les régions $R$ contiennent des éléments qui soient leurs propres inverses, ces éléments formeront dans chacune d'elles une zône $Y$, qui la partage encore en deux anneaux partiels $\varrho$, $\varrho'$ inverses l'un de l'autre et décomposables chacun en $n$ régions quadrangulaires pareilles par des lignes géodésiques joignant ensemble les deux zônes qui le limitent.

Passons aux polyèdres d'espèce (0, 1) présentant la symétrie $mn$-binaire. Cinq cas seront à distinguer.

4°. Si aucun élément n'est inverse à lui-même, on pourra tracer, comme dans le 1er cas de la symétrie $mn$-aire, $2m$ contours fermés $K, K', \ldots, I$ etc. partageant le polyèdre en $2m$ régions annulaires $\varrho, \varrho', \ldots$ dont chacune sera l'inverse de ses voisines, et sera sa propre homologue sous $2n$ aspects différents. Des lignes géodésiques en nombre $2n$ convenablement tracées d'un bord à l'autre de chacun de ces anneaux le partagent en $2n$ régions quadrangulaires pareilles de deux en deux. Chacune de ces régions sera sa propre homologue sous deux aspects différents et contiendra en son intérieur un des éléments binaires (ou des arêtes à retournement) que renferme le polyèdre.

5° et 6°. Supposons qu'aucun des éléments binaires (ou des arêtes à retournement) ne soit inverse à lui-même, mais qu'il existe d'autres éléments inverses à eux-mêmes.

Soient $A$ l'un de ces éléments, $Z, Z', \ldots$ les zônes en nombre $m$ qui passent par $A$ et ses homologues: elles partagent le polyèdre en $m$ régions annulaires $R, R', \ldots$ qui pourront être subdivisées chacune en deux régions 1°. par un contour fermé tel que $I$ si elles ne contiennent dans leur intérieur aucun élément qui soit son propre inverse: 2°. par une nouvelle zône telle que $Y$ dans le cas contraire. Dans l'un et l'autre cas, le polyèdre sera partagé en $2m$-régions $\varrho, \varrho', \ldots$ dont chacune est l'inverse de ses voisines, et qu'on peut partager comme dans le cas précédent en $2n$ régions quadrangulaires, pareilles deux à deux, et dont chacune est sa propre homologue sous deux aspects différents.

7°. Supposons que parmi les quatre systèmes $A, B, C, D$ d'éléments binaires (ou d'arêtes à retournement) il en existe deux, $A$ et $B$, inverses à eux-mêmes, les deux autres, $C$ et $D$, étant inverses l'un de l'autre. Les éléments inverses à eux-mêmes formeront deux systèmes de zônes se croisant sur la surface du polyèdre comme les méridiens et les parallèles d'un tore. Ces systèmes contiendront respectivement $m$ et $2n$ zônes. Les croisements successifs d'une zône de l'un des systèmes avec celles de l'autre système se feront alternativement suivant des éléments appartenant alternativement à l'espèce $A$ et à l'espèce $B$. Les $2mn$ régions quadrangulaires sont de deux espèces distinctes, réparties comme les cases blanches et noires sur un échiquier; chacune d'elles contient en son intérieur un élément de l'espèce $C$ ou de l'espèce $D$, et sera homologue à elle-même sous deux aspects différents.

On voit d'ailleurs aisément que pour que le cas ci-dessus puisse se présenter, ***il faut nécessairement que m soit pair.***

8°. Si chacun des 4 systèmes $A, B, C, D$ est son propre homologue, les éléments inverses à eux-mêmes formeront quatre systèmes de zônes: 1°. Un système $S$ de $m$ zônes méridiennes passant chacune par $n$ éléments $A$ et $n$ éléments $B$ qui se succèdent alternativement sur son pourtour. 2°. Un second système $S_1$ de $m$ zônes méridiennes respectivement situées dans l'intervalle des précédentes et passant chacune par $n$ éléments $C$ et $n$ éléments $D$. 3°. Un système $S_2$ de $n$ zônes parallèles coupant celles des systèmes $S$ et $S_1$ suivant des éléments $A$ et $C$. 4°. Un système $S_3$ de $n$ zônes parallèles. intermédiaires entre les précédentes, et coupant les zônes $S$ et $S_1$ suivant des éléments $B$ et $D$. Les 4 systèmes de zônes ci-dessus partagent le polyèdre en $4mn$ régions quadrangulaires ayant chacune 4 sommets appartenant respectivement à chacune des 4 espèces $A, B, C, D$. Chacune de ces régions est entièrement dissymétrique: elles sont d'ailleurs ici encore de deux espèces distinctes, réparties comme les cases blanches et noires d'un échiquier.

9°. Passons enfin aux polyèdres d'espèce $(0, 1)$ présentant la symétrie $m^2$-quaternaire. Soient $A$ le système d'éléments binaires, $B$ et $C$ les deux systèmes d'éléments quaternaires. Chacun de ces trois systèmes sera inverse à lui-même et les éléments inverses à eux-mêmes se trouveront répartis sur 3 systèmes de zônes dont le premier $S$ est formé de $m$ zônes méridiennes et $m$ zônes parallèles se coupant mutuellement suivant les éléments $B$. Le second système $S_1$ est également formé de $m$ zônes méridiennes et $m$ zônes parallèles se coupant mutuellement suivant les éléments $C$ et traversant les précédentes aux éléments $A$. Ces deux systèmes de zônes $S$ et $S_1$ partagent le polyèdre en $4m^2$ régions quadrangulaires. A deux sommets opposés de chacune d'elles se trouveront un élément $B$ et un élément $C$, aux deux autres sommets des éléments $A$. Le troisième système $S_2$ est formé de $2m$ zônes traversant diagonalement les régions précédentes de manière à couper les zônes $S$ et $S_1$ aux éléments $B$ et $C$. Les régions différentes ainsi déterminées par les trois systèmes de zônes $S, S_1, S_2$ seront triangulaires en nombre $8m^2$: aux trois sommets de chacune d'elles seront situés un élément $A$, un élément $B$ et un élément $C$: enfin deux régions contiguës de part et d'autre d'une même zône seront inverses l'un de l'autre.

Paris, 1868.

# Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten.

(Ergänzungen zu der im 66sten Bande dieses Journals enthaltenen Abhandlung.)

(Von Herrn *L. Fuchs.*)

---

## Einleitung.

Im Folgenden erlaube ich mir einige Ergänzungen zu meiner im 66sten Bande dieses Journals enthaltenen Arbeit zu liefern, und daran einige weitere Entwickelungen zu knüpfen. Die Sätze der §§. 4, 5, 6 der angeführten Abhandlung ergeben sich aus der Untersuchung beliebiger linearer homogener Differentialgleichungen, eingeschränkt auf das Gebiet eines singulären Punktes, in welchem die Coefficienten eine gewisse Gestalt annehmen. Die bei dieser Untersuchung sich ergebenden Sätze stellen sich nicht bloss als die wahre Quelle der dortigen Entwickelungen dar, sondern gestatten auch anderweitige Anwendungen. Die bei der besonderen Form der Coefficienten aus denselben auf rationale Weise abzuleitende Gleichung wird mit der „Fundamentalgleichung", welche aus den Coefficienten der Differentialgleichung auf transscendente Weise gebildet ist, in engere Beziehung gesetzt, indem die Wurzeln der ersteren in Gruppen vertheilt werden, welche Gruppen einander gleicher Wurzeln der letzteren entsprechen. Die diesen Gruppen zugehörigen Integrale verlaufen in der Umgebung des singulären Punktes gewissermassen für sich selbst, so dass die abgesonderte Betrachtung derselben zu den Fundamentaleigenschaften der Integrale führt, ein Umstand, der sich schon bei der Untersuchung der allgemeinen Form der Integrale in der Umgebung eines beliebigen singulären Punktes in der oben angeführten Abhandlung §. 3 kundgegeben. —

Es wird gezeigt, dass die linearen nicht homogenen Differentialgleichungen sich unserer Untersuchung unterwerfen lassen, wenn man ihnen gewisse lineare homogene Differentialgleichungen zuordnet. Die sich dabei ergebenden Sätze liefern auch ein wahres Kriterium dafür, ob für singuläre Punkte, in deren Umgebung die Coefficienten die oben angeführte besondere Form haben, in den Integralen einer Gruppe Logarithmen auftreten. Dieses bildet alsdann

den Ausgangspunkt zur Unterscheidung der *wirklich* singulären Punkte von den nur *scheinbaren* einer beliebigen Differentialgleichung.

Bei den Citaten aus der oben angeführten Abhandlung möge das Zeichen A. gebraucht werden.

## 1.

In der eben erwähnten Abhandlung §. 3 ist die Gestalt der Integrale der linearen Differentialgleichung

$$(1.)\qquad \frac{d^m y}{dx^m}+p_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+p_2\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}+\cdots+p_m y = 0$$

in der Umgebung eines singulären Punktes fixirt worden, in der Voraussetzung, dass die Coefficienten der Differentialgleichung in der Umgebung desselben Punktes eindeutig sind. Ist $a$ ein solcher singulärer Punkt, so gehört zu demselben eine Gleichung $A=0$ des $m^{\text{ten}}$ Grades, deren Coefficienten gewisse von der Natur der Differentialgleichung abhängige Constanten sind, welche wir Fundamentalgleichung genannt haben (A. §. 3 Gl. (6.)). Die Wurzeln derselben $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_m$ sind stets von Null verschieden. Sind nicht zwei derselben gleich, so ist gezeigt worden, dass es ein Fundamentalsystem von Integralen $y_1, y_2, \ldots y_m$ giebt von der Beschaffenheit, dass

$$(2.)\qquad y_\alpha=(x-a)^{k_\alpha}\varphi_\alpha \qquad (\alpha=1,2,\ldots m),$$

wo $k_\alpha=\frac{1}{2\pi i}\log\omega_\alpha$ und $\varphi_\alpha$ eine in der Umgebung von $a$ eindeutige Function ist. — Wenn hingegen die Fundamentalgleichung mehrfache Wurzeln enthält, wenn z. B. $\omega_1$ eine $\lambda$fache Wurzel derselben ist, so entspricht dieser Gruppe einander gleicher Wurzeln die Integralgruppe

$$(2^b.)\qquad u_\alpha=(x-a)^{k_\alpha}\sum_1^\alpha{}_b\,\varphi_{\alpha b}[\log(x-a)]^{b-1} \qquad (\alpha=1,2,\ldots\lambda),$$

wo $\varphi_{\alpha b}$ in der Umgebung von $a$ eindeutige Functionen von der Beschaffenheit sind, dass $\varphi_{\alpha b}$ als eine lineare homogene Function mit constanten Coefficienten von $\varphi_{11}, \varphi_{21}, \ldots \varphi_{\alpha 1}$ dargestellt werden kann, während die Grössen $k_1, k_2, \ldots k_\lambda$ nur um ganze Zahlen differirende Werthe des Ausdruckes $\frac{1}{2\pi i}\cdot\log\omega_1$ bedeuten. Die zu den verschiedenen Wurzelgruppen gehörigen Integralgruppen bilden zusammen ein Fundamentalsystem. Es ist daselbst ein Verfahren angedeutet worden, die lineare Abhängigkeit der Grössen $\varphi_{\alpha b}$ näher zu bestimmen. Haben nämlich die Grössen $\omega_{\alpha b}$ dieselbe Bedeutung wie in A. §. 3 Gl. (10.), so hat

man das System von Gleichungen:

$$(3.)\quad \begin{cases} \omega_1 \sum_2^{\mathfrak{a}} {}_{\mathfrak{b}} (2\pi i)^{\mathfrak{b}-1} \varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = \sum_1^{\mathfrak{a}-1} {}_{\mathfrak{b}}\, \omega_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \varphi_{\mathfrak{b}1}, \\ \omega_1 \sum_3^{\mathfrak{a}} {}_{\mathfrak{b}} (\mathfrak{b}-1)(2\pi i)^{\mathfrak{b}-2} \varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = \sum_2^{\mathfrak{a}-1} {}_{\mathfrak{b}}\, \omega_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \varphi_{\mathfrak{b}2}, \\ \omega_1 \sum_4^{\mathfrak{a}} {}_{\mathfrak{b}} \frac{(\mathfrak{b}-1)(\mathfrak{b}-2)}{2} (2\pi i)^{\mathfrak{b}-3} \varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = \sum_3^{\mathfrak{a}-1} {}_{\mathfrak{b}}\, \omega_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \varphi_{\mathfrak{b}3}, \\ \quad\vdots \\ \omega_1 (\mathfrak{a}-1)\, 2\pi i\, \varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}} = \omega_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}-1} \varphi_{\mathfrak{a}-1,\mathfrak{a}-1}, \end{cases} \qquad \mathfrak{a} = 2, 3, \ldots \lambda$$

Aus der letzten ergiebt sich $\varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}}$, aus der vorletzten $\varphi_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}-1}$, u. s. w., endlich aus der ersten $\varphi_{\mathfrak{a}2}$ als lineare homogene Function der Grössen $\varphi$, deren erster Index kleiner ist als $\mathfrak{a}$. Ist $\varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}}$ von Null verschieden, so folgt aus der letzten der Gleichungen (3.), dass auch $\varphi_{11}, \varphi_{22}, \varphi_{33}, \ldots \varphi_{\mathfrak{a}-1,\mathfrak{a}-1}$ von Null verschieden sind. Setzt man daher in dieser Gleichung successive $\mathfrak{a} = 2, 3, \ldots \mathfrak{a}$ und multiplicirt die entstandenen Gleichungen, so erhält man

$$(4.)\quad (2\pi i \omega_1)^{\mathfrak{a}-1} . 1.2 \ldots (\mathfrak{a}-1) \varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}} = \omega_{21}\omega_{32} \ldots \omega_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}-1} . \varphi_{11}, \quad \text{d. h.}$$

I. *Der Coefficient von* $[\log(x-\mathfrak{a})]^{\mathfrak{a}-1}$ *im Ausdrucke* ($2^b$.) *des Elements* $u_{\mathfrak{a}}$ *ist entweder Null oder bis auf einen constanten Factor das Integral* $u_1$.

Dieses Resultat lässt sich auch auf andere Weise herleiten, indem man direct den folgenden Satz beweist:

II. *Ist* $V = v_0 + v_1 \log(x-a) + v_2 [\log(x-a)]^2 + \cdots + v_r [\log(x-a)]^r$ *ein Integral der Differentialgleichung* (1.), *und sind die Coefficienten* $v$ *bis auf einen allen gemeinschaftlichen Factor* $(x-a)^\alpha$ *in der Umgebung von* $a$ *eindeutige Functionen, so ist auch der Coefficient der höchsten Potenz von* $\log(x-a)$ *ein Integral derselben Differentialgleichung.*

Substituirt man nämlich in der Differentialgleichung (1.) $V$ für $y$, ordnet den erhaltenen Ausdruck nach Potenzen von $\log(x-a)$ und dividirt durch $(x-a)^\alpha$, so erhält man eine Gleichung der Form:

$$(5.)\quad P_0 + P_1 \log(x-a) + P_2 [\log(x-a)]^2 + \cdots + P_r [\log(x-a)]^r = 0,$$

wo $P_0, P_1, P_2, \ldots P_r$ in der Umgebung von $a$ eindeutige Functionen sind. *Eine Gleichung dieser Form kann aber nur bestehen, wenn die Coefficienten der Potenzen von* $\log(x-a)$ *einzeln verschwinden.*

Denn da sie auch bestehen bleiben muss, wenn $x$ eine beliebige Anzahl von Umläufen um den singulären Punkt $a$ gemacht hat, so folgt:

$$(6.)\quad P_0 + P_1[\log(x-a) + 2k\pi i] + P_2[\log(x-a) + 2k\pi i]^2 + \cdots + P_r[\log(x-a) + 2k\pi i]^r = 0$$

für jeden ganzzahligen Werth von $k$. Es entsprächen demnach einem bestimmten Werthe von $x$ unzählig viele Wurzeln $z$ der Gleichung

$$P_0 + P_1 z + P_2 z^2 + \cdots + P_r z^r = 0,$$

woraus bekanntlich folgt, dass die Coefficienten $P_0$, $P_1$, $P_2$, ... $P_r$ verschwinden. — Bezeichnet man aber die linke Seite der Differentialgleichung (1.) mit $D(y)$, so ist $(x-a)^a P_r = D(v_r)$. Die Gleichung $P_r = 0$ drückt also aus, dass $v_r$ ein Integral dieser Differentialgleichung ist.

Es ist überdies $P_a = D(v_a) + \varphi_a$, $a = 1, 2, \ldots r-1$, wo $\varphi_a$ eine lineare Function der Grössen $v_{a+1}$, $v_{a+2}$, ... $v_r$ und ihrer Ableitungen ist. Die Gleichungen $P_a = 0$, $a = 0, 1, 2, \ldots r-1$ sind daher Differentialgleichungen für $v_{r-1}$, $v_{r-2}$, ... $v_0$, durch welche man successive diese Functionen ermitteln kann.

Da jedes wie $V$ beschaffene Integral eine lineare homogene Function mit constanten Coefficienten einer Integralgruppe ($2^b$.) ist, so folgt umgekehrt der Satz II. aus dem Satze I. Jedes nicht wie $V$ beschaffene Integral ist, als lineare homogene Function mit constanten Coefficienten der Integrale (2.) und ($2^b$.), eine Summe solcher wie $V$ beschaffener Integrale.

Zur Transformation eines Fundamentalsystems dient häufig der folgende Satz:

III. *Ist $y_1$, $y_2$, ... $y_m$ ein willkürliches Fundamentalsystem, und sind $v_1$, $v_2$, ... $v_n$ lineare homogene Functionen mit constanten Coefficienten von beliebigen $n$ Elementen desselben $y_1$, $y_2$, ... $y_n$:*

$$(7.)\qquad v_a = \sum_1^n {}_b\, c_{ab} \cdot y_b \qquad (a = 1, 2, \ldots n),$$

*derart, dass die Determinante*

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

*nicht verschwindet, so bilden $v_1$, $v_2$, ... $v_n$, $y_{n+1}$, ... $y_m$ ein Fundamentalsystem.*

Denn eine Gleichung

$$(8.)\qquad c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n + c_{n+1} y_{n+1} + \cdots + c_m y_m = 0$$

mit constanten Coefficienten wäre gleichbedeutend mit

$$y_1 \sum_1^n {}_b\, c_b\, c_{b1} + \cdots + y_n \sum_1^n {}_b\, c_b \cdot c_{bn} + c_{n+1} \cdot y_{n+1} + \cdots + c_m y_m = 0.$$

Da aber $y_1$, $y_2$, ... $y_m$ ein Fundamentalsystem ist, so könnte diese Gleichung nur stattfinden, wenn die Coefficienten der verschiedenen $y$ verschwinden.

Setzt man aber die Coefficienten von $y_1, y_2, \dots y_n$ der Null gleich, so folgt, dass entweder $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$, und daher auch in (8.) $c_{n+1} = \dots = c_m = 0$, oder $C = 0$. Diese letztere Gleichung widerspricht aber der Voraussetzung.

*Die Bedingung, dass die Determinante C nicht verschwindet, ist offenbar gleichbedeutend mit der Bedingung, dass eine Gleichung der Gestalt:*

$$C_1 v_1 + C_2 v_2 + \dots + C_n v_n = 0,$$

*mit constanten Coefficienten nicht stattfindet.*

## 2.

Es werde in der Differentialgleichung

$$(1.) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \dots + p_m y = 0$$

$y = (x-a)^r z$ gesetzt, wo $r$ eine beliebige Grösse, so geht dieselbe über in:

$$(2.) \quad \begin{cases} (x-a)^m \frac{d^m z}{dx^m} + (x-a)^{m-1} P_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + (x-a)^{m-2} P_2 \frac{d^{m-2} z}{dx^{m-2}} + \dots \\ \qquad + (x-a) P_{m-1} \frac{dz}{dx} + P_m z = 0, \end{cases}$$

wo

$$(3.) \begin{cases} P_{\mathfrak{a}} = \sum_0^{\mathfrak{a}-1} {}_{\mathfrak{b}} \frac{(m-\mathfrak{b})(m-\mathfrak{b}-1)\dots(m-\mathfrak{a}+1)}{\mathfrak{a}!} r(r-1)\dots(r-\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+1)(x-a)^{\mathfrak{b}} p_{\mathfrak{b}} + (x-a)^{\mathfrak{a}} p_{\mathfrak{a}} \\ \qquad (p_0 = 1). \end{cases}$$

Wenn die Coefficienten $p$ die Form haben $p_{\mathfrak{a}} = q_{\mathfrak{a}}(x-a)^{-\mathfrak{a}}$, wo $q_{\mathfrak{a}}$ in der Umgebung von $a$ eindeutig, continuirlich und endlich, so folgt aus (3.), dass $P_{\mathfrak{a}}$ ebenfalls in der Umgebung von $a$ eindeutig, continuirlich und endlich ist. Da die Differentialgleichung (2.) in die Differentialgleichung (1.) übergeht, wenn man $z = (x-a)^{-r} y$ setzt, so folgt umgekehrt, dass wenn die Grössen $P_{\mathfrak{a}}$ in der Umgebung von $a$ eindeutig, continuirlich und endlich sind, die Ausdrücke $p_{\mathfrak{a}}(x-a)^{\mathfrak{a}}$ dieselbe Eigenschaft haben. Unter derselben Voraussetzung giebt es ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (1.) $y_1, y_2, \dots y_m$, dessen Elemente wie $F$ beschaffene Functionen (A. §. 6) und resp. zu gewissen Exponenten $r_1, r_2, \dots r_m$ gehören. Diesem Fundamentalsysteme entspricht ein ähnlich beschaffenes Fundamentalsystem der Differentialgleichung (2.) $z_1, z_2, \dots z_m$, dessen Elemente resp. zu den Exponenten $\varrho_1 = r_1 - r$, $\varrho_2 = r_2 - r$, $\dots$ $\varrho_m = r_m - r$ gehören. — Wir nehmen $r$ so an, dass die letzteren Exponenten grösser als $m$ sind.

Bezeichnet man mit $\Delta_0$ die Determinante des Fundamentalsystems $y_1, y_2, \dots y_m$, so ist (A. §. 2 Gl. (3.))

$$\Delta_0 = Ce^{-\int p_1 dx}.$$

Ist ebenso $\Delta'_0$ die Determinante des Fundamentalsystems $z_1, z_2, \dots z_m$, so ist

$$\Delta'_0 = C'e^{-\int \frac{P_1}{x-a} dx},$$

wo $C$ und $C'$ nicht verschwindende Constanten bedeuten. Da nun nach (3.) $P_1 = mr + (x-a)p_1$, so folgt

$$\Delta'_0 = C'(x-a)^{-mr}e^{-\int p_1 dx},$$

daher

$$(4.)\qquad \Delta_0 = C''(x-a)^{mr}\Delta'_0,$$

wenn man $\frac{C}{C'} = C''$ setzt. Es ist von Wichtigkeit nachzuweisen, dass der Ausdruck $D_0 = \Delta_0 . (x-a)^{-\Sigma r_a + \frac{m(m-1)}{2}}$, wo $\Sigma r_a$ die Summe der Exponenten $r_1, r_2, \dots r_m$ bedeutet, für $x = a$ nicht verschwindet. Dieses ist (A. §. 4) mit Hülfe der Productenform von $\Delta_0$ geschehen. Allein der dortige Beweis erfordert einige Erörterungen für den Fall, dass einige der Exponenten $r$ kleiner als $m$ und positive ganze Zahlen sind. Um diese zu vermeiden, beweist man nach (A. §. 4) aus der Productform von $\Delta'_0$, dass $D'_0 = \Delta'_0(x-a)^{-\Sigma\varrho_a + \frac{m(m-1)}{2}}$, wo $\Sigma\varrho_a$ die Summe der Exponenten $\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_m$ bedeutet, nicht verschwindet, da wir über diese Exponenten so verfügt haben, dass sie sämmtlich grösser als $m$ sind. Aus der Gleichung $\Sigma\varrho_a = -mr + \Sigma r_a$ und Gleichung (4.) folgt aber $D_0 = C''.D'_0$, folglich ist auch $D_0$ für $x = a$ von Null verschieden.

## 3.

Sind die Coefficienten der Differentialgleichung

$$(1.)\qquad \frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \dots + p_m y = 0$$

in der Umgebung des singulären Punktes $a$ eindeutig, und die Integrale für $x = a$ nur so unstetig, dass sie mit bestimmten Potenzen von $(x-a)$ multiplicirt endlich werden, bilden ferner $y_1, y_2, \dots y_m$ das den Gleichungen (2.) und ($2^b$.) der N°. 1 entsprechende Fundamentalsystem von Integralen, so sind sie wie $F$ (A. §. 6) beschaffene Functionen, die resp. zu den Exponenten $r_1, r_2, \dots r_m$ gehören mögen. Bezeichnet man wieder mit $\Delta_0$ die Determinante dieses

Fundamentalsystems, mit $\Delta_a$ diejenige Determinante, welche man aus $\Delta_0$ erhält, wenn man die $a^{te}$ Verticalreihe durch $\frac{d^m y_1}{dx^m}, \frac{d^m y_2}{dx^m}, \dots \frac{d^m y_m}{dx^m}$ ersetzt, so ist

$$(2.)\qquad p_a = -\frac{\Delta_a}{\Delta_0} \qquad \text{(A. §. 4 Gl. (7.))}.$$

Nun aber ist (A. §. 4 II. und III.)

$$D_a = \Delta_a (x-a)^{-\Sigma r_a + \frac{m(m-1)}{2} + a} \qquad (a = 0, 1, \dots m)$$

in der Umgebung von $a$ eindeutig, endlich und continuirlich, und (s. die vor. N°.) $D_0$ für $x = a$ von Null verschieden, folglich ist

$$p_a (x-a)^a = -\frac{D_a}{D_0}$$

für $x = a$ nicht unendlich. Man hat also den Satz:

*Wenn die Integrale einer linearen homogenen Differentialgleichung für einen singulären Punkt a, in dessen Umgebung die Coefficienten derselben eindeutig sind, nur so unstetig werden, dass sie mit bestimmten Potenzen von $(x-a)$ multiplicirt nicht mehr unendlich sind, so hat die Differentialgleichung in der Umgebung des Punktes a die Gestalt:*

$$(3.)\qquad (x-a)^m \frac{d^m y}{dx^m} + (x-a)^{m-1} P_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + (x-a)^{m-2} P_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \dots + P_m y = 0,$$

*wo $P_1, P_2, \dots P_m$ in der Umgebung des Punktes a eindeutig, continuirlich und endlich sind.*

Dieser Satz setzt nichts über die Beschaffenheit der Coefficienten der Differentialgleichung und deren Integrale ausserhalb der Umgebung von $a$ voraus. Man kann aber aus demselben den Satz in N°. 4 Gl. (12.) der Abh. herleiten. Sind nämlich die Coefficienten der Differentialgleichung (1.) überall eindeutige Functionen, die in einer endlichen Anzahl von Punkten $a_1, a_2, \dots a_\varrho$ unstetig werden, und sind die Integrale für jeden dieser singulären Punkte $a_\lambda$ nur so unstetig, dass sie mit bestimmten Potenzen von $x - a_\lambda$ multiplicirt nicht mehr unendlich werden, so folgt aus dem eben bewiesenen Satze, dass $p_a . \psi^a$ für jeden endlichen Werth von $x$ endlich ist, wenn man

$$(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_\varrho) = \psi$$

setzt. Wenn die Integrale ausserdem für $x = \infty$ nur so unstetig werden, dass sie mit bestimmten Potenzen von $x$ multiplicirt nicht mehr unendlich sind, so folgt auf dieselbe Weise wie für die übrigen singulären Punkte, dass $p_a x^a$ für $x = \infty$ nicht unendlich ist. Hieraus aber ergiebt sich, wenn man

$$p_a \psi^a = Q_a$$

setzt, dass $\frac{Q_a}{x^{a(\varrho-1)}}$ für $x=\infty$ nicht unendlich ist. Da also $Q_a$ eine überall eindeutige, für jeden endlichen Werth endliche Function ist, die für $x=\infty$ höchstens von der Ordnung $a(\varrho-1)$ unendlich wird, so ist $Q_a$ eine ganze rationale Function höchstens vom Grade $a(\varrho-1)$. Hiermit ist aber die Form der Differentialgleichung (12.) in No. 4 der A. erwiesen.

## 4.

Wir haben (A. §. 5 u. 6) bewiesen, dass der Differentialgleichung

$$(1.)\quad (x-a)^m\frac{d^my}{dx^m}+(x-a)^{m-1}P_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+(x-a)^{m-2}P_2(x)\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}+\cdots+P_m(x)y=0,$$

wo $P_1(x)$, $P_2(x)$, ... $P_m(x)$ in der Umgebung von $a$ eindeutige, endliche und continuirliche Functionen sind, ein Fundamentalsystem von Integralen $\eta_1$, $\eta_2$, ... $\eta_m$ entspricht, dessen Elemente wie $F$ beschaffene Functionen sind, die resp. zu den Exponenten $r_1$, $r_2$, ... $r_m$ gehören, welche Wurzeln der Gleichung:

$$(2.)\quad \begin{cases} r(r-1)\dots(r-m+1)+P_1(a)r(r-1)\dots(r-m+2) \\ \quad +P_2(a)r(r-1)\dots(r-m+3)+\cdots+P_m(a) = 0. \end{cases}$$

Umgekehrt ist der Exponent, zu welchem irgend ein wie $F$ beschaffenes Integral der Differentialgleichung gehört, eine Wurzel der Gleichung (2.). —

Bildet man für die Differentialgleichung (1.) das Fundamentalsystem, welches in No. 1 unter (2.) und ($2^b$.) angeführt worden, so enthalten die in demselben vorkommenden Functionen $\varphi_a$ und $\varphi_{ab}$ in ihrer Entwickelung nach Potenzen von $x-a$ nur eine endliche Anzahl von Potenzen von $(x-a)^{-1}$; die Elemente des Fundamentalsystems sind daher wie $F$ beschaffene Functionen. Da nun die Grössen $k_a$ (No. 1) nur bis auf additive ganze Zahlen bestimmt sind, so wählen wir dieselben für die Differentialgleichung (1.) so, dass $k_a$ der Exponent ist, zu welchem das Element $y_a$ oder $u_a$ gehört. Hieraus folgt:

I. *Das* $\frac{1}{2\pi i}$*fache des Logarithmus jeder Wurzel der der Differentialgleichung* (1.) *zugehörigen Fundamentalgleichung* (A. §. 3 Gl. (6.)) *ist bis auf additive ganze Zahlen eine Wurzel der Gleichung* (2.).

Ist $\eta$ irgend ein Element des Fundamentalsystems $\eta_1$, $\eta_2$, ... $\eta_m$, welches zum Exponenten $r$ gehört, so ist

$$\eta(x-a)^{-r} = \psi_1+\psi_2\log(x-a)+\psi_3[\log(x-a)]^2+\cdots+\psi_\lambda[\log(x-a)]^{\lambda-1},$$

wo $\psi_1$, $\psi_2$, ... $\psi_\lambda$ in der Umgebung von $a$ eindeutig, continuirlich und endlich

sind. Daher kann die lineare homogene Function der Elemente des Fundamentalsystems (2.) und ($2^b$.) der No. 1 mit constanten Coefficienten, durch welche $\eta$ dargestellt wird, nur diejenigen Elemente dieses Fundamentalsystems enthalten, deren zugehörige Exponenten sich von $r$ nur um ganze Zahlen unterscheiden, also die Elemente einer Gruppe ($2^b$.) in No. 1. Hieraus folgt:

II. *Das $2\pi i$fache jeder Wurzel der Gleichung* (2.) *ist der Logarithmus einer Wurzel der der Differentialgleichung* (1.) *zugehörigen Fundamentalgleichung* (A. §. 3 Gl. (6.)).

Aus dem Satze I. folgt, dass verschiedenen Wurzeln der Fundamentalgleichung solche Wurzeln der Gleichung (2.) entsprechen, die weder gleich, noch um ganze Zahlen von einander verschieden sind. Umgekehrt folgt daher aus dem Satze II., dass jeder Gruppe von Wurzeln der Gleichung (2.), die entweder gleich, oder um ganze Zahlen von einander verschieden sind, eine Gruppe gleichvieler einander gleicher Wurzeln der Fundamentalgleichung entspricht. Es sei eine solche Gruppe von Wurzeln der Gleichung (2.): $r_1, r_2, \dots r_\lambda = (R)$, so geordnet, dass der reelle Theil irgend einer derselben nicht kleiner ist als der reelle Theil irgend einer nachfolgenden, so giebt es ein Integral $v_1$, der Gestalt $v_1 = (x-a)^{r_1}\varphi$, wo $\varphi$ in der Umgebung von $a$ eindeutig, continuirlich und endlich und in $a$ von Null verschieden ist. Der Beweis hierfür ist genau übereinstimmend mit dem Beweise des Satzes, dass ein derartiges Integral derjenigen Wurzel der Gleichung (2.) zugehört, deren reeller Theil nicht kleiner ist, als der reelle Theil irgend einer anderen Wurzel (A. §. 5). Denn es genügt die hier über $r_1$ gemachte Voraussetzung, um das, worauf es bei diesem Beweise ankommt, festzustellen, dass nämlich der Coefficient von $c_{k+1}$ in Gl. (5.) der A. §. 5 für keinen ganzzahligen positiven Werth von $k$ verschwindet.

Setzt man in die Differentialgleichung (1.) $y = v_1\int z\,dx$, so gehört der Differentialgleichung für $z$ ein Integral $z_1$ an, der Gestalt $z_1 = (x-a)^{r_2-r_1-1}\varphi'$, wo $\varphi'$ dieselben Eigenschaften wie $\varphi$ hat. Setzt man in die letzterhaltene Differentialgleichung $z = z_1\int t\,dx$, so gehört der Differentialgleichung für $t$ ein Integral $t_1$ an, der Gestalt $t_1 = (x-a)^{r_3-r_2-1}\varphi^{(2)}$, wo $\varphi^{(2)}$ dieselben Eigenschaften wie $\varphi$ hat. Fährt man so fort, so erhält man eine Differentialgleichung der Ordnung $m-(\lambda-1)$, der ein Integral $w_1 = (x-a)^{r_\lambda - r_{\lambda-1}-1}\varphi^{(\lambda-1)}$ angehört, wo $\varphi^{(\lambda-1)}$ dieselben Eigenschaften hat wie $\varphi$. Alsdann sind $v_2 = v_1\int z_1\,dx$, $v_3 = v_1\int z_1\,dx\int t_1\,dx, \dots\ v_\lambda = v_1\int z_1\,dx\int t_1\,dx \dots \int w_1\,dx$ Integrale der Differen-

tialgleichung (1.), welche resp. zu den Exponenten $r_2, r_3, \dots r_\lambda$ gehören (A. §. 5 u. 6).

Bezeichnet man diejenige Function, in welche eine beliebige Function $f(x)$ nach einem Umlaufe um $a$ übergeht, mit $[f(x)]'$, so ist von einer Function $F$, wie sie in der A. §. 6 charakterisirt ist, ersichtlich, dass sie die Eigenschaften

$$\frac{d}{dx}[F]' = \left[\frac{dF}{dx}\right]' \text{ und } \int [F]' dx = \left[\int F dx\right]' + \text{Const.}$$

besitzt. Da aber $v_1, z_1, t_1, \dots w_1, v_2, v_3, \dots v_\lambda$, wie $F$ beschaffene Functionen (A. §. 6) und ausserdem $v_1(x-a)^{-r_1}$ $z_1, t_1, \dots w_1$ in der Umgebung von $a$ eindeutig sind, so folgt, dass auch $\frac{v_2}{v_1}, \frac{v_3}{v_1}, \cdots$ wie $F$ beschaffene Functionen sind und daher

$$\left[\frac{d}{dx}\frac{v_2}{v_1}\right]' = \frac{d}{dx}\left[\frac{v_2}{v_1}\right]' = \frac{d}{dx}\frac{v_2}{v_1}.$$

Durch Integration ergiebt sich

$$\left[\frac{v_2}{v_1}\right]' = \frac{v_2}{v_1} + C,$$

wo $C$ eine Constante bedeutet.

Entspricht nun der Gruppe $(R)$ die Gruppe $(W)$ der gleichen Wurzeln der Fundamentalgleichung: $\omega_1 = \omega_2 = \cdots = \omega_\lambda$, so ist $v_1' = \omega_1 v_1$. Daher ergiebt die letzte Gleichung:

$$(3.) \qquad [v_2]' = \omega_{21} v_1 + \omega_1 v_2,$$

wenn man $C\omega_1 = \omega_{21}$ setzt. Ferner ist

$$\left[\frac{d}{dx}\frac{v_3}{v_1}\right]' = \frac{d}{dx}\left[\frac{v_3}{v_1}\right]' = \left[z_1 \int t_1 dx\right]' = z_1\left[\int t_1 dx\right]' = z_1\left\{\int [t_1]' dx + C_1\right\}$$
$$= z_1\left\{\int t_1 dx + C_1\right\} = z_1 \int t_1 dx + C_1 z_1,$$

wo $C_1$ eine neue Constante. Durch Integration folgt:

$$\left[\frac{v_3}{v_1}\right]' = C_1 \int z_1 dx + \int z_1 dx \int t_1 dx + C_2,$$

wo $C_2$ eine fernere Constante. Daher ist

$$(4.) \qquad [v_3]' = \omega_{31} v_1 + \omega_{32} v_2 + \omega_1 v_3,$$

wenn man $C_2\omega_1 = \omega_{31}$, $C_1\omega_1 = \omega_{32}$ setzt. So fortfahrend findet man

$$(5.) \qquad \begin{cases} [v_4]' = \omega_{41} v_1 + \omega_{42} v_2 + \omega_{43} v_3 + \omega_1 v_4 \\ \vdots \\ [v_\lambda]' = \omega_{\lambda 1} v_1 + \omega_{\lambda 2} v_2 + \cdots + \omega_1 v_\lambda. \end{cases}$$

Vergleicht man die Gleichungen (3.), (4.), (5.) mit den Gleichungen (10.) (A. §. 3), so folgt, dass man die Integralgruppe $v_1, v_2, \dots v_\lambda$ mit derjenigen der $u_1, u_2, \dots u_\lambda$ (N°. 1 ($2^b$.)), welche der Gruppe ($W$) der Wurzeln der Fundamentalgleichung entspricht, identificiren kann. Hierdurch sind aber die Exponenten $k_1, k_2, \dots k_\lambda$ bestimmt, derart, dass $k_1 = r_1$, $k_2 = r_2, \dots k_\lambda = r_\lambda$. Zwischen den Integralen $v_1, v_2, \dots v_\lambda$ findet keine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten statt. Dieses folgt ebenso wie in A. §. 2 Gl. (8.). —

Fasst man das Vorhergehende zusammen, so ergiebt sich

III. *Vertheilt man die Wurzeln der Gleichung* (2.) *in Gruppen* ($R$) *derart, dass jede Gruppe einander gleiche oder von einander um ganze Zahlen verschiedene Wurzeln enthält, so entspricht jeder dieser Gruppen eine Gruppe* ($W$) *gleich vieler einander gleicher Wurzeln der Fundamentalgleichung. Das* $2\pi i$-*fache der Wurzeln einer Gruppe* ($R$) *ist ein Logarithmus der Wurzel der entsprechenden Gruppe* ($W$).

Ferner:

IV. *Jeder Gruppe* ($R$) *mit den Wurzeln* $r_1, r_2, \dots r_\lambda$ *entspricht eine Gruppe von wie F beschaffenen Integralen* $u_1, u_2, \dots u_\lambda$ *derart, dass* $u_\mathfrak{a}$ *zum Exponenten* $r_\mathfrak{a}$ *gehört. Sind die Wurzeln r so geordnet, dass der reelle Theil irgend einer derselben nicht kleiner ist als der reelle Theil irgend einer nachfolgenden, und ist* $\omega$ *eine der gleichen Wurzeln der dieser Gruppe entsprechenden Gruppe* ($W$), *so ist es möglich das System der Integrale* $u_1, u_2, \dots u_\lambda$ *so zu gestalten, dass*

$$(6.)\quad [u_\mathfrak{a}]' = \omega_{\mathfrak{a}1} u_1 + \omega_{\mathfrak{a}2} u_2 + \cdots + \omega_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}-1} u_{\mathfrak{a}-1} + \omega_1 u_\mathfrak{a} \qquad (\mathfrak{a} = 1, 2, \dots \lambda),$$

*wo* $\omega_{\mathfrak{a}1}, \omega_{\mathfrak{a}2}, \dots$ *Constanten sind. Die Integrale selbst haben die Gestalt*

$$(7.)\quad u_\mathfrak{a} = (x-a)^{r_\mathfrak{a}} \sum_1^\mathfrak{a}{}_\mathfrak{b} \varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} [\log(x-a)]^{\mathfrak{b}-1} \qquad (\mathfrak{a} = 1, 2, \dots \lambda),$$

*wo* $\varphi_{\mathfrak{a}1}, \dots \varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}}$ *in der Umgebung von a endlich, eindeutig und continuirlich und für* $x = a$ *nicht sämmtlich Null sind. Die Functionen* $(x-a)^{r_\mathfrak{a}} \varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ ($\mathfrak{b} = 2, \dots \lambda$) *lassen sich durch die Functionen* $(x-a)^{r_{\mathfrak{a}'}} \varphi_{\mathfrak{a}'\mathfrak{b}}$ ($\mathfrak{b} = 1, \dots \lambda$), *wo* $\mathfrak{a}' < \mathfrak{a}$, *linear, homogen und mit constanten Coefficienten ausdrücken. Insbesondere ist* $\varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}} = \text{Const.}\, \varphi_{11}$.

*Zwischen den Integralen ein und derselben Gruppe findet keine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten statt; die Gesammtheit der Gruppen bildet ein Fundamentalsystem.*

Aus dem Umstande, dass die Functionen $(x-a)^{r_a}\varphi_{ab}$ $(b=2, \dots \lambda)$ sich linear, homogen und mit constanten Coefficienten durch die Functionen $(x-a)^{r_{a'}}\varphi_{a'b}$ $(b=1, \dots \lambda)$, wo $a' < a$, ausdrücken lassen, folgert man, dass dieselben zu Wurzeln der Gruppe $(R)$ als Exponenten gehören, deren Index kleiner ist als $a$, deren reeller Theil also grösser ist als der reelle Theil von $r_a$, wenn *nicht* Wurzeln derselben Gruppe $(R)$ einander gleich sind. Da nun $u_a$ zum Exponenten $r_a$ gehört, so gehört nothwendigerweise $\varphi_{a1}(x-a)^{r_a}$ zum Exponenten $r_a$, und $\varphi_{a1}$ kann nur verschwinden, wenn Wurzeln derselben Gruppe einander gleich sind, da ausserdem die Integrale (7.) nicht identisch Null sind. Man hat daher den Satz:

V. *Sind die Wurzeln einer Gruppe $(R)$ von einander verschieden, so fehlt in keinem Elemente der zugehörigen Integralgruppe* (7.) *das vom Logarithmus freie Glied, und zwar gehört dasselbe zu demjenigen Exponenten, welchem das Integral selbst zugeordnet ist.*

Ist $\eta$ ein wie $F$ beschaffenes Integral, so ist dasselbe offenbar eine lineare homogene Function mit constanten Coefficienten nur von denjenigen Elementen des Fundamentalsystems des Satzes IV., welche ein und derselben Wurzelgruppe $(R)$ entsprechen, und zwar derjenigen, welche den Exponenten, zu welchem $\eta$ gehört, enthält. Ist derselbe $r_\beta$, während $r_1, r_2, \dots r_{\beta-1}, r_{\beta+1}, \dots r_\lambda$ die übrigen Wurzeln der Gruppe $(R)$ vorstellen, deren Elemente wie im Satze IV. geordnet sind, sind ferner $u_1, u_2, \dots u_\lambda$ die der Gruppe $(R)$ entsprechende Integralgruppe (Gl. (7.)), so ist zunächst

$$(8.)\qquad \eta = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_\lambda u_\lambda.$$

wo $c_1, c_2, \dots c_\lambda$ Constanten sind. Sind nicht zwei Wurzeln der Gruppe einander gleich, und multiplicirt man diese Gleichung mit $(x-a)^{-r_\lambda}$, und setzt $x=a$, so erhält man $0 = c_\lambda u_\lambda (x-a)^{-r_\lambda}$ (für $x=a$). Da aber der Factor von $c_\lambda$ von Null verschieden ist, so folgt, dass $c_\lambda$ verschwindet. Dieses vorausgesetzt folgt durch Multiplication der Gleichung (8.) mit $(x-a)^{-r_{\lambda-1}}$ auf dieselbe Weise, dass $c_{\lambda-1}$ verschwindet. Und so fort bis $c_{\beta+1}$. Man hat daher:

$$(9.)\qquad \eta = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_\beta u_\beta. \quad \text{D. h.}$$

VI. *Ist $(R)$ diejenige Wurzelgruppe des Satzes* IV., *welche den Exponenten $r_\beta$ enthält, zu dem ein wie $F$ beschaffenes Integral $\eta$ gehört, und sind nicht zwei Wurzeln in $(R)$ einander gleich, so ist $\eta$ eine lineare homogene Function mit constanten Coefficienten nur von denjenigen Elementen der der*

*Gruppe* $(R)$ *entsprechenden Integralgruppe des Satzes* IV., *deren zugehörige Exponenten einen nicht kleineren reellen Theil als* $r_\beta$ *haben.*

Da die vom Logarithmus freien Glieder in $u_1, u_2, \dots u_\beta$ sämmtlich von Null verschieden sind und zu verschiedenen Exponenten gehören, so folgt auch:

VII. *Sind nicht zwei Wurzeln in* $(R)$ *einander gleich, so ist der vom Logarithmus freie Theil von* $\eta$ *von Null verschieden, und gehört mit* $\eta$ *zu demselben Exponenten.*

Da jedes Integral, als lineare homogene Function mit constanten Coefficienten der Elemente des Fundamentalsystems des Satzes IV., eine Summe von wie $F$ beschaffenen Integralen ist, die zu verschiedenen Exponenten gehören, so ergiebt sich ferner:

VIII. *Sind die Wurzeln der Gleichung* (2.) *von einander verschieden, so enthält jedes Integral ein von Logarithmen freies Glied.*

Eine unmittelbare Folgerung aus dem Satze VII. ist der Satz:

IX. *Sind die Wurzeln in* $(R)$ *von einander verschieden, so ist der vom Logarithmus freie Theil eines mit Logarithmen behafteten wie F beschaffenen Integrals* $\eta$, *dessen Exponent in* $(R)$ *enthalten ist, kein Integral der Differentialgleichung* (1.).

Denn ist dieser vom Logarithmus freie Theil $\zeta$, so würde $\eta-\zeta$ zugleich mit $\zeta$ ein Integral der Differentialgleichung (1.) sein; dieses ist aber nach S. VII. nicht möglich, da in $\eta-\zeta$ der vom Logarithmus freie Theil verschwindet.

Eine ähnliche Folgerung für den vom Logarithmus freien Theil eines beliebigen mit Logarithmen behafteten Integrals ergiebt sich aus Satz VIII., wenn die *sämmtlichen* Wurzeln der Gleichung (2.) von einander verschieden sind.

X. *Sind die Wurzeln* $r_1, r_2, \dots r_\lambda$ *einer Gruppe* $(R)$ *von einander verschieden, und* $v_1, v_2, \dots v_\lambda$ *irgend welche wie F beschaffene Integrale, welche resp. zu diesen Wurzeln als zu ihren Exponenten gehören, so ist eine Gleichung:*

$$(10.)\qquad c_1v_1+c_2v_2+\dots+c_\lambda v_\lambda = 0$$

*mit constanten Coefficienten nicht möglich.*

Denn sind die Wurzeln $r_1, r_2, \dots r_\lambda$ wie im Satze IV. geordnet, und multiplicirt man die Gleichung (10.) mit $(x-a)^{-r_\lambda}$, so verschwinden für $x=a$ alle Glieder bis auf $(x-a)^{-r_\lambda}v_\lambda$, da $r_1-r_\lambda, r_2-r_\lambda, \dots r_{\lambda-1}-r_\lambda$ positive ganze Zahlen sind. Daher ist $c_\lambda=0$, und die Gleichung (10.) geht in eine

ähnliche Gleichung zwischen $v_1, v_2, \dots v_{\lambda-1}$ über. Es wird nun ebenso gezeigt, dass in dieser $c_{\lambda-1}$ verschwindet; u. s. w.

Da ein wie $F$ beschaffenes Integral eine lineare homogene Function mit constanten Coefficienten der einer Wurzelgruppe $(R)$ entsprechenden Integrale des Satzes IV. ist, welche den Exponenten, zu dem $F$ gehört, enthält, so kann man nach Satz III. §. 1 und Satz X. d. § in dem Fundamentalsystem des Satzes IV. diese Integralgruppe durch eine beliebige Gruppe gleichvieler wie $F$ beschaffener Integrale ersetzen, deren zugehörige Exponenten resp. mit den Wurzeln in $(R)$ identisch sind, vorausgesetzt, dass nicht zwei dieser Wurzeln einander gleich sind.

Aus den Gleichungen

$$u_1 = v_1, \quad u_2 = v_2 = v_1\int z_1\,dx, \quad u_3 = v_3 = v_1\int z_1\,dx\int t_1\,dx, \quad \dots$$
$$u_\lambda = v_\lambda = v_1\int z_1\,dx\int t_1\,dx \dots \int w_1\,dx$$

ergiebt sich analog wie (A. §. 6 No. 2):

XI. *Sind zwei Wurzeln in* $(R)$ *einander gleich, so ist die dieser Gruppe entsprechende Integralgruppe des Satzes* IV. *nothwendig mit Logarithmen behaftet.*

Eine Integralgruppe dagegen, welche einer nur verschiedene Wurzeln enthaltenden Gruppe $(R)$ entspricht, kann von Logarithmen frei sein.

Die Coefficienten der Fundamentalgleichung (A. §. 3 Gl. (6.)) hangen von den Constanten der Differentialgleichung im Allgemeinen auf transscendente Weise ab. Es ist bemerkenswerth, dass für einen singulären Punkt $a$, in dessen Umgebung die Differentialgleichung die Form der Differentialgleichung (1.) hat, die Fundamentalgleichung durch die Gleichung (2.) ersetzt werden kann, deren Coefficienten auf algebraische, rationale Weise aus den Constanten der Differentialgleichung gebildet sind. Der Zusammenhang zwischen beiden Gleichungen ist derart, dass das $2\pi i$fache der Wurzeln der Gleichung (2.) als die Logarithmen der Wurzeln der Fundamentalgleichung angesehen werden können. — Da die Exponenten, zu welchen die Integrale (7.) gehören, aus der Fundamentalgleichung (A. §. 3 Gl. (6.)) nur bis auf additive ganze Zahlen sich ergeben, und erst aus der Gleichung (2.) vollkommen bestimmt werden, so scheint es zweckmässig, die Gleichung (2.) *die determinirende Fundamentalgleichung der Differentialgleichung* (1.) zu nennen.

## 5.

Es sei

$$(1.)\qquad p_0\frac{d^m y}{dx^m}+p_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+p_2\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}+\cdots+p_m y+q = 0$$

eine nicht homogene lineare Differentialgleichung mit veränderlichen Coefficienten, und es werde zur Abkürzung

$$p_0\frac{d^m y}{dx^m}+p_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+p_2\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}+\cdots+p_m y = Y$$

gesetzt. Differentiirt man die Gleichung (1.), multiplicirt die entstandene Gleichung mit $q$ und subtrahirt von derselben die mit $\frac{dq}{dx}$ multiplicirte Gleichung (1.), so erhält man

$$(2.)\qquad \frac{dY}{dx}q-Y\frac{dq}{dx} = 0,$$

oder

$$(3.)\qquad r_0\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}}+r_1\frac{d^m y}{dx^m}+r_2\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+r_{m+1}y = 0,$$

eine homogene lineare Differentialgleichung der $m+1^{\text{ten}}$ Ordnung, deren Coefficienten bestimmt sind durch die Gleichungen:

$$(4.)\qquad \begin{cases} r_{a+1}=\left(\frac{dp_a}{dx}+p_{a+1}-p_a\frac{d\log q}{dx}\right)(x-a), \qquad (a=0,1,\dots m-1), \\ r_0=p_0(x-a), \qquad r_{m+1}=\left(\frac{dp_m}{dx}-p_m\frac{d\log q}{dx}\right)(x-a). \end{cases}$$

Aus der Differentialgleichung (2.) folgt durch Integration:

$$(5.)\qquad Y = Cq,$$

wo $C$ eine willkürliche Constante. — Ist $y$ ein Integral der Differentialgleichung (2.) oder (3.), und ist der ihm entsprechende Werth der Constante $C$ in der Gleichung (5.) gleich Null, so ist $y$ auch ein Integral der Differentialgleichung:

$$(6.)\qquad Y = p_0\frac{d^m y}{dx^m}+p_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+p_m y = 0.$$

Ist die dem $y$ entsprechende Constante $C$ von Null verschieden, so ist $-\frac{y}{C}$ ein Integral der Differentialgleichung (1.). Umgekehrt sind die Integrale der letzteren Differentialgleichung Integrale der Differentialgleichung (3.), welche dem Werthe der Constanten $C=-1$ der Gleichung (5.) entsprechen; und die Integrale der Differentialgleichung (6.) sind Integrale der Differentialgleichung (3.), welche dem Werthe der Constanten $C=0$ der Gleichung (5.) entsprechen. Demnach hat man den Satz:

I. *Jedes Integral der Differentialgleichungen* (1.) *und* (6.) *ist ein Integral der Differentialgleichung* (3.). *Umgekehrt ist jedes Integral der Differentialgleichung* (3.) *entweder ein Integral der Differentialgleichung* (6.) *oder bis auf einen constanten Factor ein Integral der Differentialgleichung* (1.).

Die Untersuchung der nicht homogenen Differentialgleichung (1.) ist hierdurch auf die Untersuchung der beiden homogenen Differentialgleichungen (3.) und (6.) zurückgeführt.

Es seien nunmehr die Coefficienten der Differentialgleichung (6.) in der Umgebung eines singulären Punktes $a$ eindeutig, und die Integrale derselben für $x=a$ nur so unstetig, dass sie mit bestimmten Potenzen von $x-a$ multiplicirt nicht unendlich sind, so ist:

$$(7.)\qquad p_0=(x-a)^m,\qquad p_\alpha=(x-a)^{m-\alpha}P_\alpha\quad(\alpha=1,2,\dots m),$$

wo $P_\alpha$ in der Umgebung von $a$ eindeutig, continuirlich und endlich ist (§. 3). Ist $\frac{d\log q}{dx}$ in der Umgebung von $a$ eindeutig, so sind die Coefficienten der Differentialgleichung (3.) ebenfalls eindeutig. Sollen die Integrale der Differentialgleichung (1.) dieselbe Eigenschaft wie die Integrale der Differentialgleichung (6.) haben, so gehört dieselbe Eigenschaft nach Satz I. auch den Integralen der Differentialgleichung (3.) an. Es ist daher (nach §. 3):

$$(8.)\qquad r_0=(x-a)^{m+1},\quad r_{\alpha+1}=(x-a)^{m-\alpha}.R_{\alpha+1}\quad(\alpha=0,1,\dots m),$$

wo $R_{\alpha+1}$ in der Umgebung von $a$ eindeutig, continuirlich und endlich ist. Aus den Gleichungen (4.), (7.), (8.) folgt:

$$R_{\alpha+1}=(x-a)\Big[\frac{dP_\alpha}{dx}-P_\alpha\frac{d\log q}{dx}\Big]+(m-\alpha)P_\alpha+P_{\alpha+1}\quad(\alpha=0,1,\dots m-1),\quad P_0=1,$$

$$R_{m+1}=(x-a)\Big[\frac{dP_m}{dx}-P_m\frac{d\log q}{dx}\Big].$$

Insbesondere ist für $\alpha=0$, $R_1=-(x-a)\frac{d\log q}{dx}+m+P_1$, also $\frac{d\log q}{dx}=\frac{m+P_1-R_1}{x-a}$. Daher hat $q$ die Gestalt:

$$(9.)\qquad q=(x-a)^\mu.Q,$$

wo $Q$ in der Umgebung von $a$ eindeutig, endlich und continuirlich und in $a$ von Null verschieden ist. Setzt man $\frac{d\log Q}{dx}=s$, so hat man

$$(10.)\begin{cases}R_{\alpha+1}=P_{\alpha+1}+(m-\alpha-\mu)P_\alpha+\Big(\frac{dP_\alpha}{dx}-sP_\alpha\Big)(x-a)\quad(\alpha=0,1,\dots m-1)\\ R_{m+1}=-\mu P_m+\Big(\frac{dP_m}{dx}-sP_m\Big)(x-a).\end{cases}$$

Man hat daher den Satz:

II. *Sollen die Integrale der Differentialgleichungen* (1.) *und* (6.), *in welchen* $p_0, p_1, \dots p_m, \frac{d\log q}{dx}$ *in der Umgebung von a eindeutig sind, für* $x=a$ *nur so unstetig sein, dass sie mit bestimmten Potenzen von* $x-a$ *multiplicirt nicht mehr unendlich werden, so haben die Integrale der Differentialgleichung* (3.) *dieselbe Eigenschaft. Die Coefficienten der Differentialgleichungen* (1.) *und* (6.) *sind alsdann durch die Gleichungen* (7.) *und* (9.), *die Coefficienten der Differentialgleichung* (3.) *durch die Gleichungen* (8.) *und* (10.) *bestimmt. Sind umgekehrt die Coefficienten der Differentialgleichung* (1.) *durch die Gleichungen* (7.) *und* (9.) *bestimmt, so haben die Integrale derselben zugleich mit den Integralen der Differentialgleichungen* (6.) *und* (3.) *die Eigenschaft mit bestimmten Potenzen von* $x-a$ *multiplicirt für* $x=a$ *nicht unendlich zu werden.*

Aus dem Vorhergehenden ergeben sich noch folgende Sätze, welche Verallgemeinerungen von No. 4. und 5. der A. sind:

III. *Sind die Coefficienten der Differentialgleichung* (1.) *nur für eine endliche Anzahl von Punkten* $a_1, a_2, \dots a_\varrho$ *unstetig, überdiess* $p_0, p_1, p_2, \dots p_m$, $\frac{d\log q}{dx}$ *überall eindeutig, und sollen die Integrale der Differentialgleichungen* (1.) *und* (6.) *mit bestimmten Potenzen von* $x-a_s$ *und* $x$ *multiplicirt resp. für* $x=a_s$ *und* $x=\infty$ *nicht unendlich werden, so ist:*

$$(11.)\quad \begin{cases} p_0 = \psi^m, \quad p_\alpha = \psi^{m-\alpha}.F_{\alpha(\varrho-1)} \quad (\alpha=1,2,\dots m), \\ q = C(x-a_1)^{\mu_1}(x-a_2)^{\mu_2}\dots(x-a_\varrho)^{\mu_\varrho}, \end{cases}$$

*wo* $\psi=(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_\varrho)$, $C$, $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_\varrho$ *constante Grössen und* $F_n$ *eine ganze Function höchstens von dem Grade* $n$ *bezeichnet.*

Denn da die Integrale der Differentialgleichung (6.) die verlangte Eigenschaft haben sollen, so müssen zunächst nach §. 4 der A. $p_0$ und $p_\alpha$ die in den Gleichungen (11.) angegebene Form haben. Nach Satz II. haben aber auch die Integrale der Differentialgleichung (3.) die im Satze angegebene Beschaffenheit, daher ist wieder nach §. 4 der A.

$$r_1 = \psi^m.F'_{\varrho-1}, \qquad r_0 = \psi^{m+1},$$

wo $F'_{\varrho-1}$ eine ganze Function höchstens von dem Grade $\varrho-1$ bezeichnet. Es ist aber

$$r_1 = \left[\frac{dp_0}{dx}+p_1-p_0\frac{d\log q}{dx}\right]\psi = \left[m\frac{d\psi}{dx}+F_{\varrho-1}-\psi\frac{d\log q}{dx}\right]\psi^m.$$

Also

$$F'_{\varrho-1} = \left[m\frac{d\psi}{dx} + F_{\varrho-1} - \psi\frac{d\log q}{dx}\right],$$

oder

$$(12.)\quad \frac{d\log q}{dx} = \frac{F_{\varrho-1} - F'_{\varrho-1}}{\psi} + m\frac{d\log\psi}{dx},$$

woraus die im Satze für $q$ angegebene Form hervorgeht.

Umgekehrt: IV. *Jedes Integral der Differentialgleichungen* (1.) *und* (6.), *deren Coefficienten durch die Gleichungen* (11.) *bestimmt sind, hat die Eigenschaft mit bestimmten Potenzen von $x-a_s$ und $x$ multiplicirt für $x=a_s$ und $x=\infty$ resp. nicht unendlich zu werden.*

Der Nachweis wird geführt, wenn man den Satz II. für jeden der singulären Punkte $a_1, a_2, \dots a_\varrho$ anwendet, und um ihn auch für $x=\infty$ anwenden zu können, in der Differentialgleichung (1.) mit den durch Gl. (11.) bestimmten Coefficienten $x=\frac{1}{u}$ substituirt, und alsdann den singulären Punkt Null betrachtet.

## 6.

Setzt man in dem Ausdrucke

$$Y = (x-a)^m\frac{d^my}{dx^m} + (x-a)^{m-1}P_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + (x-a)^{m-2}P_2(x)\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \cdots + P_m(x).y,$$

wo die Grössen $P$ in der Umgebung von $a$ eindeutig, continuirlich und endlich sind, $y=(x-a)^\varepsilon f(x)$, wo $\varepsilon$ eine beliebige Grösse und $f(x)$ eine in der Umgebung von $a$ eindeutige, continuirliche und endliche Function von der Beschaffenheit ist, dass $\eta=(x-a)^\varepsilon f(x)$ kein Integral der Differentialgleichung $Y=0$ ist, so lässt sich die resultirende Function auf die Gestalt $(x-a)^\mu.Q$ bringen, wo $\mu$ eine bestimmte Grösse und $Q$ in der Umgebung von $a$ eindeutig, continuirlich und endlich und in $a$ von Null verschieden ist. — Die Differentialgleichung

$$(1.)\quad Y-(x-a)^\mu.Q = 0$$

hat alsdann das Integral $\eta=(x-a)^\varepsilon f(x)$.

I. *Es sei $y_1, y_2, \dots y_m$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung*

$$(2.)\quad Y = 0,$$

*so ist das System der Integrale $\eta, y_1, y_2, \dots y_m$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung $m+1^{\text{ter}}$ Ordnung*

$$(3.)\quad \begin{cases}(x-a)^{m+1}\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} + (x-a)^m R_1(x)\frac{d^my}{dx^m} + (x-a)^{m-1}R_2(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots \\ \qquad \cdots + R_{m+1}(x).y = 0,\end{cases}$$

*wo*

$$(4.)\begin{cases} R_{\mathfrak{a}+1}(x) = P_{\mathfrak{a}+1}(x) + (m-\mathfrak{a}-\mu)P_{\mathfrak{a}}(x) + \left[\dfrac{dP_{\mathfrak{a}}(x)}{dx} - sP_{\mathfrak{a}}(x)\right](x-a) \quad (\mathfrak{a}=0,1,\dots m-1) \\ R_{m+1} = -\mu P_m(x) + \left[\dfrac{dP_m(x)}{dx} - sP_m(x)\right](x-a), \qquad s = \dfrac{d\log Q}{dx}. \end{cases}$$

Denn nach dem Satze I. des vorigen §. ist zunächst jedes der Integrale $\eta, y_1, y_2, \dots y_m$ ein Integral der Differentialgleichung (3.). Es kann aber eine Gleichung der Form $C\eta + c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_m y_m = 0$ nicht bestehen, ohne dass die constanten Coefficienten derselben verschwinden, da $\eta$ kein Integral der Differentialgleichung (2.) und $y_1, y_2, \dots y_m$ ein Fundamentalsystem derselben sind. —

Von der Differentialgleichung (1.) wollen wir sagen, *sie sei der Differentialgleichung* (2.) *durch die Substitution* $y = (x-a)^{\varepsilon} f(x)$ *zugeordnet. Die Grösse* $\mu$ *heisse der Index der Substitution.*

Die zum singulären Punkte $a$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (3.) ist:

$$(5.) \qquad \sum_{0}^{m}{}_{\mathfrak{a}}\, r(r-1)(r-2)\dots(r-m+\mathfrak{a})R_{\mathfrak{a}}(a) + R_{m+1}(a) = 0,$$

wo $R_0(a) = 1$ zu setzen ist. Diese Gleichung ist nach den Gleichungen (4.) gleichbedeutend mit:

$$\sum_{0}^{m}{}_{\mathfrak{a}}\, r(r-1)(r-2)\dots(r-m+\mathfrak{a})[P_{\mathfrak{a}}(a) + (m-\mathfrak{a}-\mu+1)P_{\mathfrak{a}-1}(a)] - \mu P_m(a) = 0,$$

wo wieder $P_0(a) = 1$ zu setzen ist. Diese Gleichung lässt sich umformen in:

$$(6.) \qquad (r-\mu)\left[\sum_{0}^{m-1}{}_{\mathfrak{b}}\, r(r-1)(r-2)\dots(r-m+\mathfrak{b}+1)P_{\mathfrak{b}}(a) + P_m(a)\right] = 0.$$

Nun aber ist

$$(7.) \qquad \sum_{0}^{m-1}{}_{\mathfrak{b}}\, r(r-1)(r-2)\dots(r-m+\mathfrak{b}+1)P_{\mathfrak{b}}(a) + P_m(a) = 0$$

die determinirende Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (2.). Also:

II. *Eine Wurzel der determinirenden Fundamentalgleichung der Differentialgleichung* (3.) *ist gleich* $\mu$, *die übrigen* $m$ *Wurzeln genügen der determinirenden Fundamentalgleichung der Differentialgleichung* (2.).

Das Resultat der Substitution von $y = (x-a)^{\varepsilon} f(x)$ in $Y$ hat die Form $(x-a)^{\varepsilon}\psi(x)$, wo $\psi(x)$ eine nach positiven ganzzahligen Potenzen von $x-a$ fortschreitende Reihe ist, in welcher der Coefficient von $(x-a)^0$ mit der linken Seite der Gleichung (7.) übereinstimmt, wenn man in dieselbe $r = \varepsilon$ setzt. Dieser Coefficient ist Null oder von Null verschieden, je nachdem $\varepsilon$ eine Wurzel der Gleichung (7.) ist oder nicht. Daher:

III. *Ist $\varepsilon$ nicht einer Wurzel der Gleichung* (7.) *gleich, so ist der Index der Substitution $\mu$ gleich $\varepsilon$; ist dagegen $\varepsilon$ eine Wurzel der Gleichung* (7.), *so ist der reelle Theil von $\mu$ grösser als der reelle Theil von $\varepsilon$, so dass $\mu-\varepsilon$ eine positive ganze Zahl wird.*

Aus Satz I. folgt:

IV. *Enthalten die Ausdrücke irgend welcher Integrale der Differentialgleichung* (2.) *in der Umgebung von a Logarithmen, so giebt es auch Integrale der Differentialgleichung* (3.), *deren Ausdrücke in der Umgebung von a mit Logarithmen behaftet sind. Und umgekehrt.*

Ist $\varepsilon$ eine Wurzel der Gleichung (7.), und vertheilt man nach Vorschrift des Satzes IV. in No. 4 sowohl die Wurzeln der Gleichung (5.) als die der Gleichung (7.) in Gruppen, und ist $(R)$ diejenige Gruppe der Wurzeln der letzteren Gleichung, zu welcher $\varepsilon$ gehört, so entspricht dieser die Gruppe $(S)$ der Wurzeln der Gleichung (5.), welcher ausser den in $R$ enthaltenen Wurzeln die Wurzel $\mu$ angehört. Die übrigen Gruppen der Wurzeln der Gleichung (7.) sind mit den übrigen Gruppen der Wurzeln der Gleichung (5.) identisch (nach Satz II.).

Ist der Index der Substitution $\mu$ einer der Wurzeln in $(R)$ gleich, so enthält die Gruppe $(S)$ gleiche Wurzeln, daher ist die dieser Gruppe entsprechende nach dem Satze IV. §. 4 gebildete Integralgruppe mit Logarithmen behaftet (Satz XI. §. 4). — Diese Integralgruppe in dem nach Satz IV. §. 4 gebildeten Fundamentalsysteme der Differentialgleichung (3.) lässt sich aber nach Satz III. §. 1 durch das System $\eta$, $u_1$, $u_2$, ... $u_\lambda$ ersetzen, wenn $\eta=(x-a)^\varepsilon f(x)$ und $u_1$, $u_2$, ... $u_\lambda$ die der Gruppe $(R)$ entsprechenden nach Satz IV. §. 4 gebildeten Integrale der Differentialgleichung (2.) sind, da zwischen $\eta$, $u_1$, $u_2$, .... $u_\lambda$ zu Folge des Satzes I. d. §. keine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten stattfinden kann. Da aber $\eta$ keinen Logarithmus enthält, so sind irgend welche der Grössen $u_1$, $u_2$, ... $u_\lambda$, d. h. die der Gruppe $(R)$ entprechende Integralgruppe der Differentialgleichung (2.) mit Logarithmen behaftet.

Es werde jetzt umgekehrt vorausgesetzt, dass die einer Gruppe $(R)$ von Wurzeln der Gleichung (7.) entsprechende nach S. IV. §. 4 gebildete Integralgruppe der Differentialgleichung (2.) mit Logarithmen behaftet ist. Die Wurzeln dieser Gruppe in der Reihenfolge des Satzes IV. §. 4 seien $r_1$, $r_2$, ... $r_\lambda$ und die ihnen entsprechenden Integrale resp. $u_1$, $u_2$, ... $u_\lambda$. Sind nicht zwei der Wurzeln in $(R)$ einander gleich, und ist $u_\alpha$ mit Logarithmen behaftet, so ist der vom

Logarithmus freie Theil desselben $(x-a)^{r_a}\varphi_{a1}$, welcher nach §. 4 S. V. nicht verschwindet, kein Integral der Differentialgleichung (2.) (§. 4 S. IX.). Ordnet man daher der Differentialgleichung (2.) die Differentialgleichung (3.) durch die Substitution $y=(x-a)^{r_a}\varphi_{a1}$ zu, so ist nach Satz I. $v_a = u_a-(x-a)^{r_a}\varphi_{a1}$ ein Integral der Differentialgleichung (3.). Da in diesem mit Logarithmen behafteten Integral das vom Logarithmus freie Glied verschwindet, so sind nach S. VII. §. 4 nothwendig zwei Wurzeln der Gruppe $(S)$ einander gleich, d. h. $\mu$ mit einer der Wurzeln der Gruppe $(R)$ übereinstimmend.

Wird der Differentialgleichung (2.) durch die Substitution $y=(x-a)^r f(x)$ die Differentialgleichung (3.) zugeordnet, wo $f(x)$ eine nach ganzen positiven Potenzen von $x-a$ fortschreitende Reihe und $r$ ein Glied einer nach §. 4 S. IV. gebildeten Gruppe $(R)$ von Wurzeln der Gleichung (7.): $r_1, r_2, \dots r_\lambda$ ist, so werde die Differenz $r_1-r_\lambda$ mit $s$ und die Summe der Glieder von $f(x)$, welche niedrigere Potenzen von $x-a$ als $(x-a)^{s+1}$ enthalten, mit $g(x)$, endlich die Differenz $f(x)-g(x)$ mit $\varphi(x)$ bezeichnet. Das Resultat der Substitution von $(x-a)^r\varphi(x)$ in $Y$ liefert nur Potenzen von $x-a$, deren Exponenten einen grösseren reellen Theil haben als $r_1$. Ist daher der Index $\mu$ der Substitution $y=(x-a)^r f(x)$ einer Wurzel der Gruppe $(R)$ gleich, so ist der Index der Substitution $y=(x-a)^r g(x)$ derselben Wurzel gleich; d. h. giebt es überhaupt eine Substitution $y=(x-a)^r f(x)$, deren Index mit $r$ Wurzel derselben Gruppe $(R)$ ist, so giebt es eine *ganze* Function $g(x)$ von der Beschaffenheit, dass der Index der Substitution $y=(x-a)^r g(x)$ mit $r$ Wurzel derselben Gruppe ist. — Man hat daher den Satz:

V. *Es werde der Differentialgleichung* (2.) *die Differentialgleichung* (3.) *durch die Substitution* $y=(x-a)^r f(x)$, *in der* $f(x)$ *eine ganze Function und* $r$ *eine Wurzel der zur Differentialgleichung* (2.) *gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung* (7.) *ist, zugeordnet; es werden ferner sowohl die Wurzeln dieser Gleichung als auch die Wurzeln der zur Differentialgleichung* (3.) *gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung* (5.) *nach* S. IV. §. 4 *in Gruppen vertheilt. Ist alsdann* $(R)$ *diejenige Gruppe von Wurzeln der Gleichung* (7.), *welche* $r$ *enthält, so entspricht dieser die Gruppe* $(S)$ *der Wurzeln der Gleichung* (5.), *welcher ausser den in* $(R)$ *enthaltenen Wurzeln der Index der Substitution* $\mu$ *als Glied angehört. Die nach Satz* IV. §. 4 *gebildete der Gruppe* $(R)$ *entsprechende Integralgruppe der Differentialgleichung* (2.) *ist mit Logarithmen behaftet oder nicht behaftet, je nachdem für irgend eine Wurzel*

*$r$ der Gruppe $(R)$ oder **für keine** derselben die ganze Function $f(x)$ so bestimmt werden kann, dass die Gruppe $(S)$ gleiche Wurzeln enthält.*

In diesem Satze ist die *nothwendige und hinreichende* Bedingung für das Auftreten von Logarithmen in den Ausdrücken der Integrale in der Umgebung des singulären Punktes $a$ enthalten. Er bildet demnach eine wesentliche Ergänzung zu den Sätzen XI. §. 4 und A. §. 6, welche nur eine hinreichende aber keine nothwendige Bedingung enthalten.

## 7.

Es sei wieder

$$Y = (x-a)^m \frac{d^m y}{dx^m} + (x-a)^{m-1} P_1(x) \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + (x-a)^{m-2} P_2(x) \frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \cdots + P_m(x).y,$$

wo $P_1(x)$, $P_2(x)$, ... $P_m(x)$ in der Umgebung von $a$ eindeutig, continuirlich und endliche Functionen sind; ferner sei $(R)$: $r_1, r_2, \ldots r_\lambda$ eine nach S. IV. §. 4 gebildete Gruppe von Wurzeln der zur Differentialgleichung

$$(1.) \qquad Y = 0$$

gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung:

$$(2.) \qquad \sum_0^{m-1}{}_\mathfrak{b}\, r(r-1)\ldots(r-m+\mathfrak{b}+1) P_\mathfrak{b}(a) + P_m(a) = 0 \qquad P_0(a) = 1.$$

Wir wollen nunmehr die analytische Bedingung dafür entwickeln, dass für irgend eine Wurzel $r_\varrho$, welche der Gruppe $(R)$ angehört, eine ganze Function $f(x)$ bestimmt werden kann, derart dass der Index der Substitution $y = (x-a)^{r_\varrho} f(x)$ mit einer Wurzel der Gruppe $(R)$ übereinstimmt. —

Zu dem Ende sei die Reihenfolge der Grössen $r_1, r_2, \ldots r_\lambda$ dieselbe wie im Satze IV. §. 4 und $g(x)$ eine beliebige rationale ganze Function $g(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n$, und man substituire $y = (x-a)^{r_\lambda} g(x)$ in $Y$, so erhält man

$$(3.) \qquad Z = (x-a)^{r_\lambda} \sum_0^n{}_k\, \varphi(x,k)(x-a)^k c_k,$$

wo

$$\varphi(x,k) = \sum_0^{m-1}{}_\mathfrak{b} (r_\lambda+k)(r_\lambda+k-1)\ldots(r_\lambda+k-m+\mathfrak{b}+1) P_\mathfrak{b}(x) + P_m(x), \quad P_0(x) = 1$$

gesetzt ist. Die Wurzeln $r_{\lambda-1}, r_{\lambda-2}, \ldots r_1$ haben resp. die Werthe $r_\lambda + k_1$, $r_\lambda + k_2$, ... $r_\lambda + k_{\lambda-1}$, wo $k_1, k_2, \ldots k_{\lambda-1}$ eine nicht abnehmende Reihe positiver ganzer Zahlen ist. Da nun die Grössen $\varphi(a,k)$ mit der linken Seite der Gleichung (2.) übereinstimmen, wenn man in derselben $r_\lambda + k$ an die Stelle

von $r$ setzt, so hat man die Gleichungen:

$$(4.)\qquad \varphi(a,0)=0,\quad \varphi(a,k_1)=0,\ \varphi(a,k_2)=0,\ \dots\ \varphi(a,k_{\lambda-1})=0,$$

während $\varphi(a,k)$ für jeden positiven Werth von $k$, der nicht mit $k_1,\ k_2,\ \dots\ k_{\lambda-1}$ übereinstimmt, von Null verschieden ist. Um $Z$ nach Potenzen von $x-a$ zu entwickeln, setzen wir $\frac{d^\lambda\varphi(x,k)}{dx^\lambda}=\varphi^{(\lambda)}(x,k)$, $\varphi^{(\mathfrak{a}-k)}(a,k)=1.2.3\dots(\mathfrak{a}-k)(\mathfrak{a},k)$ und $A_\mathfrak{a}=\sum_0^{\mathfrak{a}}{}_k(\mathfrak{a},k)c_k$; es ist alsdann, weil $A_0=\varphi(a,0)=0$,

$$(5.)\qquad Z=(x-a)^{r_\lambda}\sum_1^\infty{}_\mathfrak{a} A_\mathfrak{a}(x-a)^\mathfrak{a}.$$

Soll es unter den Indices 1, 2, ... $\lambda-1$, wenigstens *einen* $\alpha$ geben, für den die Bedingungen

$$(6.)\qquad A_1=0,\quad A_2=0,\quad \dots\quad A_{k_\alpha-1}=0,\quad A_{k_\alpha}\ \text{nicht gleich Null,}$$

erfüllt werden, so ist es mit Rücksicht auf die Gleichungen (4.), wie leicht zu sehen, nothwendig und hinreichend, dass wenigstens für einen der Indices $\alpha=1,\ 2,\ \dots\ \lambda-1$ nicht zugleich die Determinanten

$$D(\mathfrak{b},\alpha)=$$

$$\begin{vmatrix}
(k_\mathfrak{b}+1,k_\mathfrak{b}) & (k_\mathfrak{b}+1,k_\mathfrak{b}+1) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
(k_\mathfrak{b}+2,k_\mathfrak{b}) & (k_\mathfrak{b}+2,k_\mathfrak{b}+1) & (k_\mathfrak{b}+2,k_\mathfrak{b}+2) & 0 & \dots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots\\
(k_{\mathfrak{b}+1}-1,k_\mathfrak{b}) & (k_{\mathfrak{b}+1}-1,k_\mathfrak{b}+1) & (k_{\mathfrak{b}+1}-1,k_\mathfrak{b}+2) & (k_{\mathfrak{b}+1}-1,k_\mathfrak{b}+3) & \dots & (k_{\mathfrak{b}+1}-1,k_{\mathfrak{b}+1}-2) & (k_{\mathfrak{b}+1}-1,k_{\mathfrak{b}+1}-1)\\
(k_\alpha,k_\mathfrak{b}) & (k_\alpha,k_\mathfrak{b}+1) & (k_\alpha,k_\mathfrak{b}+2) & (k_\alpha,k_\mathfrak{b}+3) & \dots & (k_\alpha,k_{\mathfrak{b}+1}-2) & (k_\alpha,k_{\mathfrak{b}+1}-1)
\end{vmatrix}$$

für $\mathfrak{b}=0,1,2,\dots\alpha-1$ verschwinden, wo $k_0=0$ zu setzen ist. — Ist diese Bedingung für einen bestimmten Werth von $\alpha$ zum ersten Male erfüllt, so sind die Grössen $c_\mathfrak{a}$ für die Werthe des Index $\mathfrak{a}=0,\ k_1,\ k_2,\ \dots\ k_{\alpha-1}$ willkürlich und von einander unabhängig geblieben. Es wird daher $\alpha$ ganze Functionen $g_0(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$, ... $g_{\alpha-1}(x)$, welche für $x=a$ nicht verschwinden, geben von der Beschaffenheit, dass die Indices der Substitutionen $y=(x-a)^{r_\lambda}g_0(x)$, $y=(x-a)^{r_{\lambda-1}}g_1(x)$, $y=(x-a)^{r_{\lambda-2}}g_2(x)$, ... $y=(x-a)^{r_{\lambda-\alpha+1}}g_{\alpha-1}(x)$ sämmtlich den Werth $r_{\lambda-\alpha}$ haben. — Der Satz V. im vorigen §. lässt sich daher auch durch den folgenden ersetzen:

I. *Es seien die Glieder einer nach* S. IV. §. 4 *gebildeten Gruppe von Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung* (2.): $r_\lambda,\ r_\lambda+k_1,\ r_\lambda+k_2,\ \dots\ r_\lambda+k_{\lambda-1}$, *wo* $k_1,\ k_2,\ \dots\ k_{\lambda-1}$ *eine nicht abnehmende Reihe positiver ganzer Zahlen ist, und bildet man die zu dieser Gruppe gehörigen Determinanten* $D(\mathfrak{b},\alpha)$, *so ist die nach* §. 4 S. IV. *der Gruppe* $(R)$ *zugeordnete Integralgruppe*

*mit Logarithmen behaftet, oder nicht behaftet, je nachdem für wenigstens einen der Indices $\alpha = 1, 2, \ldots \lambda-1$ oder keinen derselben in der Reihe der Determinanten $D(0, \alpha)$, $D(1, \alpha)$, ... $D(\alpha-1, \alpha)$ sich solche befinden, welche von Null verschieden sind.*

Dieser Satz kann auch folgendermassen hergeleitet werden. Setzt man in No. 5 der A. $a_i = a$ und $r_\lambda$ statt $r_n$, so verschwindet der Coefficient von $c_{k+1}$ in Gleichung (5.) daselbst, wenn $k$ einen der Werthe $k_1-1, k_2-1, \ldots k_{\lambda-1}-1$ annimmt. Damit nun, für diese Werthe von $k$, $c_{k+1}$ endlich bleibe, müssen die zugehörigen Ausdrücke auf der rechten Seite der Gleichung (5.) daselbst verschwinden. Damit ferner Reihenentwickelungen der Gestalt $(x-a)^r \sum_0^\infty {}_\mathfrak{a} \mathfrak{b}_\mathfrak{a} (x-a)^\mathfrak{a}$ möglich sind, wenn $r$ eine beliebige der Wurzeln $r_\lambda$, $r_\lambda+k_1$, $r_\lambda+k_2$, ... $r_\lambda+k_{\lambda-1}$ und der jedesmalige Werth von $\mathfrak{b}_0$ von Null verschieden sein soll, dürfen durch die Gleichungen, welche durch das Verschwinden der rechten Seite der Gleichung (5.) daselbst für die angegebenen Werthe von $k$ erhalten werden, keine Relationen zwischen den Grössen $c_\mathfrak{a}$ mit den Indices $\mathfrak{a} = 0, k_1, k_2, \ldots k_{\lambda-1}$ herbeigeführt werden. Es lässt sich nun zeigen, dass diesen beiden Bedingungen Genüge geschieht, wenn für jeden Werth von $\alpha = 1, 2, \ldots \lambda-1$, die Determinanten $D(0, \alpha)$, $D(1, \alpha)$, ... $D(\alpha-1, \alpha)$ verschwinden. Tritt dieses ein, so kann man durch ähnliche Schlüsse wie in §. 5 der A. zeigen, dass es zu jedem Werth von $r$ aus der Reihe $r_\lambda$, $r_\lambda+k_1$, $r_\lambda+k_2$, ... $r_\lambda+k_{\lambda-1}$ ein Integral der Form $(x-a)^r \sum_0^\infty {}_\mathfrak{a} b_{r\mathfrak{a}} (x-a)^\mathfrak{a}$ giebt, worin $b_{r0}$ von Null verschieden ist. Diese Gruppe von Integralen kann man in dem Fundamentalsysteme des Satzes IV. in §. 4 (nach S. X. in §. 4 und S. III. in §. 1) der Integralgruppe, welche $(R)$ entspricht, substituiren, so dass diese Gruppe nicht mit Logarithmen behaftet ist. —

Die Differenz $r_1 - r_\lambda = \delta$ ist eine ganze Zahl, welche die Ordnung der höchsten in den Determinanten $D(\mathfrak{b}, \alpha)$ auftretenden Ableitung von $\varphi(x, k)$ (für $x = a$) nicht überschreitet. Jeder Gruppe $(R)$ entspricht eine solche Zahl $\delta$. Ist unter allen diesen den verschiedenen Gruppen entsprechenden Zahlen $d$ die grösste, und entwickelt man die Functionen $P_\mathfrak{a}(x)$ in Reihen nach Potenzen von $(x-a)$, so treten in keiner der irgend einer Gruppe $(R)$ entsprechenden Determinanten $D(\mathfrak{b}, \alpha)$ die Coefficienten derjenigen Potenzen von $x-a$ auf, deren Exponenten grösser sind als $d$. Diese Coefficienten üben daher auch keinen Einfluss aus auf die Beurtheilung der Frage, ob die irgend einer Gruppe

$(R)$ zugehörige Integralgruppe mit Logarithmen behaftet ist oder nicht. — Man hat daher folgenden Satz:

II. *Sind $F_1, F_2, \dots F_m$ ganze Functionen, welche resp. aus $P_1(x)$, $P_2(x)$, … $P_m(x)$ erhalten werden, wenn man in der Entwickelung derselben nach Potenzen von $x-a$ nur diejenigen Glieder beibehält, welche mit nicht höheren Potenzen von $x-a$ als der $d^{ten}$ multiplicirt sind, so sind die irgend einer Gruppe $(R)$ entsprechenden Integrale der Differentialgleichung (1.) mit Logarithmen behaftet oder nicht, je nachdem die derselben Gruppe $(R)$ entsprechenden Integrale der Differentialgleichung:*

$$(7.)\qquad (x-a)^m\frac{d^my}{dx^m}+F_1(x-a)^{m-1}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+F_2(x-a)^{m-2}\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}+\dots+F_my = 0$$

*mit Logarithmen behaftet sind oder nicht.*

Der Differentialgleichung (7.) gehört die Gleichung (2.) als determinirende Fundamentalgleichung an. Sind die Grössen $P_a(x)$ gleich constanten Grössen $a_a$, so dass die Differentialgleichung (1.) die Gestalt:

$$(8.)\qquad (x-a)^m\frac{d^my}{dx^m}+a_1(x-a)^{m-1}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+a_2(x-a)^{m-2}\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}+\dots+a_my = 0$$

hat, und die Wurzeln der Gleichung:

$$(9.)\qquad \sum_0^{m-1}{}_a r(r-1)\dots(r-m+a+1)a_a+a_m=0\qquad a_0=1$$

verschieden, so sind für jede Gruppe $(R)$ die sämmtlichen Determinanten $D(\mathfrak{b},\alpha)$ gleich Null, da die erste Verticalreihe derselben nur verschwindende Elemente enthält, folglich sind die Integrale nicht mit Logarithmen behaftet (s. A. §. 6).

## 8.

Wenn die Coefficienten einer linearen Differentialgleichung

$$(1.)\qquad \frac{d^my}{dx^m}+p_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+p_2\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}+\dots+p_my = 0$$

für einen Werth $x=a$ unendlich werden, übrigens aber in dessen Umgebung eindeutig sind, so hören im Allgemeinen die Integrale der Differentialgleichung auf in der Umgebung dieses Punktes eindeutig, stetig und endlich zu sein. Wenn dieses eintritt, so wollen wir den Punkt $a$ einen *wesentlich* singulären Punkt der Differentialgleichung (1.) nennen. Wenn aber die Integrale in der Umgebung des Punktes $a$ eindeutig, endlich und continuirlich bleiben, so soll $a$ ein *ausserwesentlich* singulärer Punkt heissen *).

*) Diese Benennung hat Herr *Weierstrass* bereits in seiner Vorlesung, welche ich in der A. (Einleitung) angeführt habe, gebraucht.

Ist $\Delta_0$ die Determinante eines Fundamentalsystems $y_1, y_2, \dots y_m$ und $\Delta_\alpha$ diejenige Determinante, welche aus $\Delta_0$ entsteht, wenn man die $\alpha^{\text{te}}$ Vertikalreihe durch $\frac{d^m y_1}{dx^m}, \frac{d^m y_2}{dx^m}, \dots \frac{d^m y_m}{dx^m}$ ersetzt, so ist (§. 4 Gl. (7.) der A.)

$$(2.)\qquad p_\alpha = -\frac{\Delta_\alpha}{\Delta_0}.$$

Da nun die Integrale der Differentialgleichung (1.) in der Umgebung eines ausserwesentlich singulären Punktes $a$ eindeutig, continuirlich und endlich sind, so gilt dasselbe für ihre sämmtlichen Ableitungen, folglich auch für die Determinanten $\Delta_0$ und $\Delta_\alpha$. Nun aber sollen für gewisse Werthe von $\alpha = 1, 2, \dots m$ Coefficienten $p_\alpha$ für $x = a$ unendlich werden, folglich zeigt die Gleichung (2.), dass $\Delta_0$ für $x = a$ verschwindet. Da aber (A. §. 4 Gl. (8.)) $\Delta_0$ bis auf einen nicht verschwindenden constanten Factor von der Wahl des Fundamentalsystems unabhängig ist, so folgt:

I. *Für einen ausserwesentlich singulären Punkt muss die Determinante jedes Fundamentalsystems verschwinden.*

Es seien $b_0, b_1, \dots b_{m-1}$ willkürliche Grössen und $x_0$ ein nicht singulärer Punkt, so kann man ein Integral $\eta$ der Differentialgleichung (1.) bestimmen, von der Beschaffenheit, dass $b_0, b_1, b_2, \dots b_{m-1}$ resp. die Werthe von $\eta, \frac{d\eta}{dx}, \frac{d^2\eta}{dx^2}, \dots \frac{d^{m-1}\eta}{dx^{m-1}}$ für $x = x_0$ sind. — Denn man hat das System von Gleichungen:

$$(3.)\qquad \begin{cases} \eta = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_m y_m, \\ \frac{d\eta}{dx} = c_1 \frac{dy_1}{dx} + c_2 \frac{dy_2}{dx} + \cdots + c_m \frac{dy_m}{dx}, \\ \frac{d^2\eta}{dx^2} = c_1 \frac{d^2 y_1}{dx^2} + c_2 \frac{d^2 y_2}{dx^2} + \cdots + c_m \frac{d^2 y_m}{dx^2}, \\ \vdots \\ \frac{d^{m-1}\eta}{dx^{m-1}} = c_1 \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}} + c_2 \frac{d^{m-1} y_2}{dx^{m-1}} + \cdots + c_m \frac{d^{m-1} y_m}{dx^{m-1}}, \end{cases}$$

wo $c_1, c_2, \dots c_m$ Constanten sind. Setzt man rechterhand $x = x_0$ und linkerhand statt $\eta, \frac{d\eta}{dx}, \dots \frac{d^{m-1}\eta}{dx^{m-1}}$ resp. $b_0, b_1, \dots b_{m-1}$, so hat man zur Bestimmung der Grössen $c$ ein System linearer Gleichungen, dessen Determinante nicht verschwindet.

Ist dagegen $x_0$ ein *ausserwesentlich singulärer* Punkt, so würde diese Determinante verschwinden, es müssten also die Grössen $b$ *eine lineare homogene Relation erfüllen*, um resp. als Werthe eines Integrals und dessen $m-1$ ersten Ableitungen für $x = x_0$ angesehen werden zu können.

48*

Das Verschwinden der Determinante eines Fundamentalsystems in den ausserwesentlich singulären Punkten macht also den characteristischen Unterschied zwischen solchen Punkten und den nicht singulären aus.

Da in der Umgebung des ausserwesentlich singulären Punktes $a$ die Coefficienten der Differentialgleichung (1.) eindeutig, die Integrale derselben aber eindeutig, endlich und continuirlich sind, so folgt aus dem Satze in §. 3, dass in der Umgebung von $a$ die Coefficienten die Gestalt:

$$(4.)\qquad p_\alpha = \frac{P_\alpha(x)}{(x-a)^\alpha}, \qquad (\alpha = 1, \dots m)$$

haben, wo $P_\alpha(x)$ in derselben Umgebung eindeutig, endlich und continuirlich ist. Aus der Gleichung:

$$(5.)\qquad \Delta_0 = C.e^{-\int p_1 dx}, \qquad (\text{A. §. 2 Gl. (3.)}),$$

wo $C$ eine nicht verschwindende Constante bedeutet, und aus Gleichung (4.) folgt:

$$(6.)\qquad \Delta_0 = (x-a)^{-P_1(a)}.G(x),$$

wo $G(x)$ in der Umgebung von $a$ eindeutig, endlich und continuirlich und in $a$ von Null verschieden ist. Da nun $\Delta_0$ in der Umgebung von $a$ eindeutig, endlich und continuirlich und in $a$ gleich Null ist, so ergieht sich, dass $P_1(a)$ eine negative ganze Zahl ist, wenn $a$ einen ausserwesentlich singulären Punkt bedeutet. — Die zum Punkte $a$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (1.), deren Coefficienten durch die Gleichungen (4.) bestimmt werden, ist:

$$(7.)\qquad \sum_0^{m-1}{}_\alpha\, r(r-1)\dots(r-m+\alpha+1)P_\alpha(a)+P_m(a) = 0 \qquad P_0(a) = 1.$$

Jeder Wurzel $r$ dieser Gleichung entspricht (nach A. §. 6) ein wie $F$ beschaffenes Integral $y$ derart, dass $(x-a)^{-r}y$ für $x=a$ nicht verschwindet, da aber in der Umgehung eines ausserwesentlich singulären Punktes die Integrale eindeutig, endlich und continnirlich sind, so müssen die Wurzeln der Gleichung (7.) positive ganze Zahlen oder Null sein, daher auch $P_1(a)$, $P_2(a)$, ... $P_m(a)$ ganze Zahlen, oder, mit Ausnahme von $P_1(a)$, Null. Aus S. XI. §. 4 folgt ferner, dass die Wurzeln derselben Gleichung von einander verschieden sind, es kann daher auch nur *eine* derselben, folglich nicht gleichzeitig $P_m(a)$ und $\sum_0^{m-1}{}_\alpha 1.2.3\dots(m-\alpha-1)P_\alpha(a)$ verschwinden.

Die Wurzeln der Gleichung (7.) bilden in diesem Falle eine einzige Gruppe. Sind dieselben $r_1$, $r_2$, ... $r_m$ so geordnet, dass jede folgende kleiner

ist, als die vorhergehende, und setzt man $r_{m-a} = r_m + k_a$, und bildet mit $r_m$ statt $r_2$ die Determinanten $D(\mathfrak{b}, \alpha)$ der vorigen No., so hat man den Satz:

II. *Damit a ein ausserwesentlich singulärer Punkt der Differentialgleichung* (1.) *sei, ist erforderlich und hinreichend:*

1) *dass die Differentialgleichung in der Umgebung dieses Punktes die Gestalt:*

$$(8.)\qquad (x-a)^m \frac{d^m y}{dx^m} + P_1(x).(x-a)^{m-1}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + P_m(x).y = 0$$

*habe, wo die Functionen $P_1(x), \dots P_m(x)$ in der Umgebung von a eindeutig, continuirlich und endlich sind;*

2) *dass $P_1(a)$ eine negative ganze Zahl ist;*

3) *dass die Wurzeln der Gleichung* (7.) *von einander verschieden und, bis auf eine etwa verschwindende, positive ganze Zahlen sind;*

4) *dass für keinen Werth von $\alpha = 1, 2, \dots m-1$ irgend eine der Determinanten $D(0, \alpha)$, $D(1, \alpha)$, $\dots$ $D(\alpha-1, \alpha)$ von Null verschieden ist.*

Ist $d = r_1 - r_m$, so kann man nach dem Satze II. des vor. § bei der Beurtheilung der Art der Singularität des Punktes $a$ in den nach Potenzen von $x-a$ fortschreitenden Reihen $P_a(x)$ die Glieder mit höheren Potenzen als die $d^{te}$ unterdrücken, so dass der Punkt $a$ ein wesentlich oder ausserwesentlich singulärer Punkt der Differentialgleichung (8.) ist, je nachdem er ein wesentlich oder ausserwesentlich singulärer Punkt der Differentialgleichung

$$(9.)\qquad (x-a)^m \frac{d^m y}{dx^m} + F_1.(x-a)^{m-1}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + F_m.y = 0$$

ist, wo $F_1, F_2, \dots F_m$ die durch die Abkürzung von $P_1, P_2, \dots P_m$ erhaltenen ganzen Functionen sind.

## 9.

Wenn die Coefficienten der Differentialgleichung:

$$(1.)\qquad (x-a)^m \frac{d^m y}{dx^m} + P_1(x).(x-a)^{m-1}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + P_m(x).y = 0$$

die in S. II. unter No. 1—3 (vor. §.) angegebenen Bedingungen erfüllen, so können die Ausdrücke der Integrale in der Umgebung des Punktes $a$ (nach §. 4) noch mit Logarithmen behaftet sein. Ob dieses stattfindet oder nicht, lässt sich nach §. 7 beurtheilen, wie dieses in der That im Satze II. vor. §. unter No. 4 geschehen ist. Diese Frage lässt sich noch auf eine andere Weise entscheiden, wie wir jetzt zeigen wollen.

Die Integrale der Differentialgleichung (1.) sind unter den gemachten Voraussetzungen wie $F$ beschaffene Functionen, welche zu ganzzahligen positiven Exponenten gehören, nämlich den Wurzeln der Gleichung:

$$(2.)\qquad \sum_0^{m-1}{}_\alpha\, r(r-1)\dots(r-m+\alpha+1)P_\alpha(a)+P_m(a)=0,\qquad P_0(a)=1.$$

Ist $r_1$ wieder die grösste Wurzel dieser Gleichung, so sind die Ableitungen eines mit Logarithmen behafteten Integrals spätestens der $r_1+1^{\text{ten}}$ Ordnung wie $F$ beschaffene Functionen, welche zu *negativen* Exponenten gehören. Dieses ergiebt sich aus der Form des Fundamentalsystems §. 4 S. IV. Dagegen sind die Exponenten, zu welchen die Ableitungen beliebiger Ordnung eines von Logarithmen freien Integrals gehören, stets positiv.

Bildet man aber eine lineare Differentialgleichung für die abhängige Variable $z$ von der Art, dass ihr die $s^{\text{ten}}$ Ableitungen sämmtlicher Integrale der Differentialgleichung (1.) und nur diese genügen, so hat dieselbe nach dem Satze in §. 3 die Gestalt:

$$(3.)\qquad (x-a)^n\frac{d^nz}{dx^n}+Q_1(x).(x-a)^{n-1}\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}+\dots+Q_n(x).z = 0,$$

wo $Q_1(x), \dots Q_n(x)$ in der Umgebung von $a$ eindeutig, continuirlich und endlich sind.

Wählt man $s=r_1+1$, und ist die determinirende Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (3.)

$$(4.)\qquad \sum_0^{n-1}{}_\alpha\, r(r-1)\dots(r-n+\alpha+1)Q_\alpha(a)+Q_n(a)=0,\qquad Q_0(a)=1,$$

I. *so ist a ein wesentlich oder ausserwesentlich singulärer Punkt, je nachdem diese Gleichung negative Wurzeln enthält oder nicht.*

Es ist daher noch eine Methode anzugeben, wonach eine lineare homogene Differentialgleichung für die abhängige Variabeln $z$ hergestellt wird, der die $s^{\text{ten}}$ Ableitungen sämmtlicher Integrale einer gegebenen Differentialgleichung:

$$(5.)\qquad p_0\frac{d^my}{dx^m}+p_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\dots+p_my = 0$$

und nur diese genügen. Eine solche wollen wir nunmehr aufsuchen.

Eliminirt man aus dem Systeme von Gleichungen, welches man erhält, wenn man die Differentialgleichung (5.) mit den durch $s$ aufeinanderfolgende Differentiationen derselben entstandenen verbindet, die Grössen $y$, $\frac{dy}{dx}, \dots \frac{d^{s-1}y}{dx^{s-1}}$, so ist das Resultat der Elimination allerdings eine lineare homogene

Differentialgleichung $m^{\text{ter}}$ Ordnung für $\frac{d^s y}{dx^s} = z$, und es genügen derselben die $s^{\text{ten}}$ Ableitungen sämmtlicher Integrale der Differentialgleichung (5.). Allein die Ordnung derjenigen Differentialgleichung für $z$, der nur die $s^{\text{ten}}$ Ableitungen der Integrale der Differentialgleichung (5.) genügen, kann niedriger als die $m^{\text{te}}$ sein. In der That hat jedes Integral derselben $z$ die Gestalt:

$$(6.)\qquad z = c_1 \frac{d^s y_1}{dx^s} + c_2 \frac{d^s y_2}{dx^s} + \cdots + c_m \frac{d^s y_m}{dx^s},$$

wo $c_1, c_2, \ldots c_m$ Constanten, und $y_1, y_2, \ldots y_m$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (5.) ist. Genügt nun der Differentialgleichung (5.) eine ganze rationale Function $f(x)$, von niedrigerem als dem $s^{\text{ten}}$ Grade, so ist

$$f(x) = k_1 y_1 + k_2 y_2 + \cdots + k_m y_m,$$

wo $k_1, k_2, \ldots k_m$ bestimmte Constanten sind. Aus dieser Gleichung folgt:

$$(7.)\qquad k_1 \frac{d^s y_1}{dx^s} + k_2 \frac{d^s y_2}{dx^s} + \cdots + k_m \frac{d^s y_m}{dx^s} = 0.$$

Genügen der Differentialgleichung (5.) noch mehrere andere ganze rationale Functionen von niedrigerem Grade als dem $s^{\text{ten}}$, so bestehen noch mehrere der Gleichung (7.) analoge Gleichungen. Es lassen sich alsdann nicht $m$ Integrale $z$ der Form (6.) angeben, zwischen denen keine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten bestände.

Man muss daher einen anderen Weg einschlagen, um diejenige Differentialgleichung herzustellen, welcher die $s^{\text{ten}}$ Ableitungen sämmtlicher Integrale der Differentialgleichung (5.) und *nur diese* genügen.

Es sei $p_{m-\lambda}$ in der Reihe der Coefficienten der Differentialgleichung (5.) $p_m, p_{m-1}, \ldots p_0$ der erste, welcher nicht verschwindet, und setzt man $\frac{d^\lambda y}{dx^\lambda} = u$ und $m-\lambda = \beta$, so geht (5.) über in

$$(8.)\qquad p_0 \frac{d^\beta u}{dx^\beta} + p_1 \frac{d^{\beta-1} u}{dx^{\beta-1}} + p_2 \frac{d^{\beta-2} u}{dx^{\beta-2}} + \cdots + p_\beta u = 0.$$

Ist $y_1, y_2, \ldots y_m$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (5.), $u_1, u_2, \ldots u_\beta$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (8.), und bezeichnet man das Resultat einer auf eine Function $f(x)$ $\alpha$mal wiederholte Integration in üblicher Weise mit $\int^{(\alpha)} f(x)dx$, so sind $\int^{(\lambda)} u_1 dx, \int^{(\lambda)} u_2 dx, \ldots \int^{(\lambda)} u_\beta dx$ Integrale der Differentialgleichung (5.). Es lassen sich daher diese Grössen linear, homogen und mit constanten Coefficienten durch $y_1, y_2, \ldots y_m$ darstellen. Differentiirt man die $\beta$ Gleichungen, welche diese Darstellungen

liefern, $\lambda$ mal, so folgt, dass $u_1, u_2, \dots u_\beta$ sich linear, homogen und mit constanten Coefficienten durch die $\lambda^{\text{ten}}$ Ableitungen von $y_1, y_2, \dots y_m$ darstellen lassen.

II. *Der Differentialgleichung* (8.) *genügen daher die $\lambda^{\text{ten}}$ Ableitungen sämmtlicher Integrale der Differentialgleichung* (5.) *und nur diese.*

Dividirt man Gleichung (8.) durch $p_\beta$ und differentiirt, so erhält man eine Gleichung der Form

$$(9.)\qquad q_0\frac{d^\beta v}{dx^\beta}+q_1\frac{d^{\beta-1}v}{dx^{\beta-1}}+\cdots+q_\beta v = 0,$$

wenn man $\frac{du}{dx}=v$ setzt. Sie wird befriedigt durch $v_1=\frac{du_1}{dx}, v_2=\frac{du_2}{dx}, \dots v_\beta=\frac{du_\beta}{dx}$, wo $u_1, u_2, \dots u_\beta$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (8.) ist. Nun aber ist eine Gleichung der Form $c_1v_1+c_2v_2+\cdots+c_\beta u_\beta=0$, wo $c_1, c_2, \dots c_\beta$ Constanten sind, unmöglich. Denn aus dieser würde sich ergeben $c_1u_1+c_2u_2+\cdots+c_\beta u_\beta=C$, wo $C$ eine Constante, und zwar eine von Null verschiedene, weil $u_1, u_2, \dots u_\beta$ Fundamentalsystem von (8.) ist. Es müsste demnach die Differentialgleichung (8.) eine nicht verschwindende Constante zum Integral haben, was unmöglich ist, weil $p_\beta$ von Null verschieden ist. Man hat daher den Satz:

III. *Der Differentialgleichung* (9.) *genügen die ersten Ableitungen sämmtlicher Integrale der Differentialgleichung* (8.), *und nur diese.*

Der Differentialgleichung (9.) genügen also die $\lambda+1^{\text{ten}}$ Ableitungen sämmtlicher Integrale der Differentialgleichung (5.) und nur diese. Daher ergiebt sich folgendes Verfahren, um eine lineare homogene Differentialgleichung herzustellen, welcher die $s^{\text{ten}}$ Ableitungen sämmtlicher Integrale der Differentialgleichung (5.) und nur diese genügen:

Man dividire die Differentialgleichung (5.) durch den Coefficienten der niedrigsten der wirklich darin enthaltenen Ableitungen, abgesehen von einem constanten Factor, und differentiire die so erhaltene Gleichung. Auf die alsdann entstandene Differentialgleichung wende man dasselbe Verfahren an, auf die nunmehr entstandene wiederum dasselbe Verfahren, und fahre nur so lange fort, bis man zum ersten Male eine Differentialgleichung erhält, in welcher die niedrigste der wirklich darin enthaltenen Differentialquotienten gleicher oder höherer Ordnung als $\frac{d^s y}{dx^s}$ ist, so ist diese Differentialgleichung die gesuchte. —

Es ist noch zu bemerken, dass in dem Systeme von Differentialgleichungen, welches man erhält, wenn man $s=r_1+1$ annimmt und dieses Verfahren auf die Differentialgleichung (1.) anwendet, jede Differentialgleichung

als Differentialgleichung für die niedrigste der wirklich darin enthaltenen Ableitungen aufgefasst, die Gestalt der Differentialgleichung (3.) hat, wenn man in dieser statt $y$ diese niedrigste Ableitung setzt. Die derselben zugehörige determinirende Fundamentalgleichung (4.) darf keine negativen Wurzeln enthalten, wenn $a$ ein ausserwesentlich singulärer Punkt der Differentialgleichung (1.) ist. Zieht man es daher vor, successive die einzelnen den verschiedenen Differentialgleichungen des Systems angehörigen Fundamentalgleichungen zu untersuchen, so wird man häufig nicht erst bis zur Differentialgleichung für $\frac{d^{r_1+1}y}{dx^{r_1+1}}$ vorzuschreiten brauchen, um zu entscheiden, ob $a$ ein wesentlich oder ausserwesentlich singulärer Punkt der Differentialgleichung (1.) ist, nämlich dann, wenn eine der erwähnten Fundamentalgleichungen negative Wurzeln enthält. —

Berlin, im Januar 1868.

# Geometrische Bedeutung der Kugelfunctionen.

(Von Herrn *E. Heine* zu Halle.)

§. 1. Unter dieser Ueberschrift enthält die zweite Hälfte der 631sten Seite im 5ten Bande von *Gauss* Werken einige Aufzeichnungen, deren Verständniss das Folgende erleichtern wird.

Auf der Peripherie eines mit dem Radius 1 beschriebenen Kreises $K$ wähle man $n$ feste Punkte $A_1$, $A_2$, etc. $A_n$; die Bogenentfernung eines jeden von dem vorhergehenden soll $\frac{2\pi}{n}$ bei ungradem $n$, bei gradem $n$ aber $\frac{\pi}{n}$ betragen. In dem letzteren Falle halbire man noch *den* Bogen $A_1A_n$, welcher kleiner als $\pi$ ist in $A$. Bezeichnet $P$ einen unbestimmten Punkt auf der Peripherie des Kreises, und heissen seine Bogenentfernungen von $A_1$, $A_2$, etc. $PA_1$, $PA_2$, etc., so ist das Product

$$\Pi = 2^{n-1}\cos PA_1 . \cos PA_2 \dots \cos PA_n$$

bei ungradem $n$ gleich $\cos(n.PA_1)$, oder, was dasselbe ist, $\cos(n.PA_2)$, $\cos(n.PA_3)$, etc., bei gradem $n$ aber $\cos(n.PA)$. Dies ist der Satz, welcher in den beiden Formeln

$$\cos n\theta = 2^{n-1}\cos\theta\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{n}\right)\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{n}\right)\dots\cos\left(\theta+\frac{\overline{n-1}.2\pi}{n}\right),$$

$$\cos n\theta = 2^{n-1}\left[\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2n}\right)\cos\left(\theta+\frac{3\pi}{2n}\right)\dots\cos\left(\theta+\frac{\overline{n-1}\pi}{n}\right)\right].$$
$$\left[\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2n}\right)\cos\left(\theta-\frac{3\pi}{2n}\right)\dots\cos\left(\theta-\frac{\overline{n-1}\pi}{n}\right)\right]$$

enthalten ist, von denen die erste für ungrade, die zweite für grade $n$ gilt.

§. 2. Indem man diesen Satz von einem Punkte $P$ der Kreisperipherie auf einen Punkt $P$ der Kugeloberfläche überträgt, kommt man nicht mehr auf den Cosinus des $n$fachen Winkels, sondern auf die $n^{te}$ Kugelfunction.

Der nach Angabe des §. 1 getheilte Kreis $K$ sei grösster Kreis einer Kugel, auf welcher irgend wo ein Punkt $P$ liegt. Die sphärische Entfernung des Punktes $P$, bei ungradem $n$ von $A_1$, bei gradem $n$ von $A$ sei $\theta$, gemessen auf einem Hauptkreise, welcher mit $K$ den Winkel $\varphi$ bilde. Im ersten Falle,

für ein ungrades $n$, ist demnach

$$\cos\left(PA_{m+1}\right) = \cos\theta\cos\frac{2m\pi}{n} + \sin\theta\sin\frac{2m\pi}{n}\cos\varphi$$

und dies gleich $M\cos\left(\psi - \frac{2m\pi}{n}\right)$, wenn man

$$\cos\theta = M\cos\psi, \qquad \sin\theta\cos\varphi = M\sin\psi$$

setzt. Im zweiten Falle, für ein grades $n$, wird

$$\cos PA_m = \cos\theta\cos(n+1-2m)\frac{\pi}{n} + \sin\theta\sin(n+1-2m)\frac{\pi}{n}\cos\varphi$$

$$= M\cos\left(\psi - \overline{n+1-2m}\,\frac{\pi}{n}\right),$$

in beiden Fällen daher

$$\Pi = 2^{n-1}\cos PA_1 . \cos PA_2 \ldots \cos PA_n = M^n \cos n\psi.$$

Setzt man für $M$ und $\psi$ ihre Werthe in $\theta$ und $\varphi$ zurück, so entsteht

$$\Pi = \tfrac{1}{2}(\cos\theta + i\sin\theta\cos\varphi)^n + \tfrac{1}{2}(\cos\theta - i\sin\theta\cos\varphi)^n.$$

Man kennt (Handb. d. Kugelf. §. 43, Form. 33) die vollständige Entwickelung der rechten Seite nach Cosinus der Vielfachen von $2\varphi$; hier genügt aber die Kenntniss des ersten, von $\varphi$ unabhängigen Gliedes, welches nach *Laplace* (Handb. §. 7, Form. 5) die $n^{\text{te}}$ Kugelfunction $P^n(\cos\theta)$ ist. *Die $n^{\text{te}}$ Kugelfunction ist demnach das Mittel aus den Werthen, welche $\Pi$ annimmt, wenn der Punkt $P$ festgehalten wird, während der Kreis $K$ sich um seinen in $A_1$ resp. $A$ mündenden Durchmesser dreht. Dies ist die geometrische Bedeutung der Kugelfunction.*

§. 3. Das Aufsuchen des Mittelwerthes einer Function von $\varphi$, die nach Cosinus der Vielfachen von $\varphi$ geordnet ist und mit dem Cosinus des $m-1$ fachen Winkels schliesst, erfordert nicht die Ausführung einer Integration: das Mittel ist bekanntlich genau gleich dem arithmetischen Mittel von den $m$ Werthen der Function (den Ordinaten), welche eben so vielen Werthen von $\varphi$ (den Abscissen), nämlich

$$\frac{\pi}{m},\quad \frac{2\pi}{m},\quad \frac{3\pi}{m},\quad \ldots\quad \frac{m\pi}{m}$$

entsprechen. *Man kann aber den mittleren Werth solcher Function, durch geeignete Wahl der Abscissen, etwa aus der Hälfte, nämlich aus $\frac{m}{2}$ oder $\frac{m+1}{2}$ Ordinaten bestimmen.* Ist nämlich eine eindeutige Function $f(\varphi)$ in die endliche oder unendliche Reihe

$$f(\varphi) = a_0 + a_1\cos\varphi + a_2\cos 2\varphi +$$

entwickelt, so wird *für jedes grade* $\nu$

$$f\frac{\pi}{\nu}+f\frac{3\pi}{\nu}+\cdots+f\frac{(\nu-1)\pi}{\nu} = \frac{\nu}{2}(a_0-a_\nu+a_{2\nu}+\cdots),$$

$$fo+f\pi+2f\frac{2\pi}{\nu}+2f\frac{4\pi}{\nu}+\cdots+2f\frac{(\nu-2)\pi}{\nu} = \nu(a_0+a_\nu+a_{2\nu}+\cdots).$$

Bricht die Reihe, wie oben, an der $m^{ten}$ Stelle ab, d. h. so dass schon $a_m$ Null ist, so wird man $\nu$ gleich $m+1$ oder $m$ setzen, je nachdem $m$ ungrade oder grade ist, und findet den mittleren Werth durch die erste Formel aus $\frac{\nu}{2}$, durch die zweite aus $\frac{\nu}{2}+1$ Ordinaten.

Mit dieser Bemerkung gehe man auf den Schluss des §. 2 zurück, und berücksichtige noch, dass $\Pi$ nur grade Vielfache von $\varphi$ enthält; man erhält dann folgendes Resultat:

*Wenn ein Kreis K mit dem durch P gehenden Kreise K den Winkel $\varphi$ bildet, wo $\varphi \leqq \frac{1}{2}\pi$, so werde das auf ihn bezogene Product $\Pi$ durch $\Pi\varphi$ bezeichnet. Ferner sei $2\nu$ die kleinste durch 4 theilbare Zahl, welche grösser als n ist. Alsdann findet man für die $n^{te}$ Kugelfunction die beiden Gleichungen*

$$\frac{\nu}{2}P^n(\cos\theta) = \Pi\frac{\pi}{2\nu}+\Pi\frac{3\pi}{2\nu}+\Pi\frac{5\pi}{2\nu}+\cdots+\Pi\frac{(\nu-1)\pi}{2\nu},$$

$$\frac{\nu}{2}P^n(\cos\theta) = \tfrac{1}{2}\Pi o+\tfrac{1}{2}\Pi\frac{\pi}{2}+\Pi\frac{\pi}{\nu}+\Pi\frac{2\pi}{\nu}+\cdots+\Pi\frac{\nu-2}{2}\frac{\pi}{\nu}.$$

§. 4. Für $n=1, 2, 3$ ist $\nu=2$, also nach dem ersten Ausdrucke die $n^{te}$ Kugelfunction gleich $\Pi\frac{\pi}{4}$, für $n=4, 5, 6, 7$ aber gleich dem arithmetischen Mittel aus $\Pi\frac{\pi}{8}$ und $\Pi\frac{3\pi}{8}$. Es ist ganz unwesentlich, dass durch Anwendung dieser Formel die Darstellung der Kugelfunctionen sich noch etwas einfacher gestaltet als bei *Gauss*, der für $n=1$ *ein* Product $\Pi$, für $n=2, 3$ zwei Producte, für $n=4, 5$ drei Producte benutzt. Es entsteht solch ein Unterschied durch eine andere Art, den Mittelwerth von $\Pi$ zu bestimmen (§. 2); z. B. für $n=2$ wählt *Gauss*, entsprechend der zweiten Formel des §. 3, für $P^n$ den Werth von $\Pi$ auf zwei sich unter rechten Winkeln schneidenden Kreisen; von ihrem Durchschnitte $A$ aus sind nach §. 1 zwei Punkte $A_1$ und $A_2$ auf jedem Kreise zu bestimmen, welche von $A$ um $\frac{\pi}{4}$ entfernt liegen*).

*) Das Octaeder, auf welches sich, nach *Gauss*, diese zweimal zwei Punkte beziehen, hat eine Ecke im Mittelpunkte der Kugel; jede von den vier dort zusammentreffenden Seiten geht durch zwei Punkte $A_1$, $A_2$, welche nicht auf demselben Kreise liegen.

Da *Gauss* seine Angaben nur bis $n=5$ fortsetzt, so treffen *verschiedene* Methoden zur Bestimmung des Mittels zu. Interessant ist, dass er bei den Werthen von $n$, welche durch 4 theilbar sind (wenigstens bei $n=4$) das letzte Glied in $\Pi$, welches (Handb. §. 43, Form. 33.), abgesehen von einem constanten Factor, $\sin^n\theta\cos n\varphi$ ist, mit Hülfe eines Kreises $L$ eliminirt, der die Schaar der Kreise $K$ senkrecht schneidet. Fügt man zu dem Kreise $K$ am Anfange des §. 2 noch $L$ hinzu, so dass $A$ der Pol von $L$ ist, bezeichnet den Durchschnitt von $K$ und $L$ mit $B$, und trägt von $B$ rechts und links auf $L$ Stücke $\frac{\pi}{2n}$, $\frac{3\pi}{2n}$, $\frac{5\pi}{2n}$, etc. nach $B_1$, $B_2$, etc. $B_n$ ab, so wird nämlich

$$2^{n-1}\cos PB_1 . \cos PB_2 \dots \cos PB_n = \sin^n\theta\cos n\varphi.$$

Den Functionen, welchen ich den Namen der *Lamé*schen gab, musste später (Bd. 60 dieses Journals) eine bestimmte, die zweite *Ordnung* beigelegt werden, als allgemeinere Functionen gefunden waren, welche ihre Haupteigenschaften theilten. Wurden gewissen Constanten besondere Werthe ertheilt, so führten die Functionen verschiedener Ordnungen (Bd. 60 und 62) auf einfachere, den Kugelfunctionen verwandte, die zweite Ordnung auf die Kugelfunction selbst, während die erste Ordnung den Cosinus eines vielfachen Winkels gab, und so das hier geometrisch betrachtete Verhältniss auch analytisch hervortrat. Es wird hiernach gerechtfertigt erscheinen, wenn ich den Ausdruck Kugelfunctionen $n^{\text{ter}}$ *Ordnung*, den *Gauss* in der vorliegenden kurzen Notiz gebraucht, vermied und vorschlage, $P^n(\cos\theta)$ entweder wie bisher $n^{\text{te}}$ Kugelfunction oder Kugelfunction $n^{\text{ten}}$ *Grades* zu nennen, was sie ja in der That in Bezug auf $\cos\theta$ ist.

Halle, den 29. Februar 1868.

---

# Ueber das Problem der drei Körper.

## (Auszug aus einem Schreiben an den Herausgeber.)

(Von Herrn *Scheibner* in Leipzig.)

---

In einer früheren Notiz über einen Satz aus der Störungstheorie (siehe den 65sten Band dieses Journals S. 291) habe ich die Differentialgleichungen des Problems der drei Körper in einer eigenthümlichen Form für den Fall aufgestellt, dass die Masse des bewegten Körpers als verschwindend angesehen werden darf. Es ergab sich dabei, dass um die Aufgabe auf Quadraturen zurückzuführen, noch *fünf* Integrationen erforderlich sind, deren Anzahl auf *drei* verringert werden kann, wenn die Excentricität des störenden Körpers verschwindet. Da gegen die Richtigkeit dieser Angaben kürzlich Bedenken erhoben worden sind, so erlaube ich mir heute eine Mittheilung über die allgemeinste Form der Differentialgleichungen des Problems der drei Körper zu machen, aus welcher ich damals jene speciellen Formeln hergeleitet hatte.

Diese neue und symmetrische Form beruht im Wesentlichen auf der Einführung der gegenseitigen Entfernungen der drei Massen

$$\overline{m_1 m_2} = \varrho, \quad \overline{m_2 m} = \varrho_1, \quad \overline{m m_1} = \varrho_2,$$

nebst drei Winkelgrössen $\Omega$, $i$ und $\omega$, als der Variabeln des Problems. Sei

$$2T = \Sigma \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \varpi\varpi + \Sigma \frac{\varrho_1^2 + \varrho_2^2 - \varrho^2}{m \varrho_1 \varrho_2} \varpi_1 \varpi_2 - \frac{2 \varDelta\gamma}{M(A-B)^2} \Sigma \frac{m E \varpi}{\varrho} +$$

$$+ \left\{ \frac{C}{(A-B)^2} - \frac{A\cos^2\omega + B\sin^2\omega}{AB} \right\} \gamma\gamma,$$

$$U = \Sigma \frac{m_1 m_2}{\varrho} - \frac{k^2}{2AB}(A\cos^2\omega + B\sin^2\omega), \qquad H = T - U,$$

so hat man das canonische System Differentialgleichungen

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \varpi}, \quad \frac{d\varrho_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \varpi_1}, \quad \frac{d\varrho_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \varpi_2}, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \gamma},$$

$$\frac{d\varpi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varrho}, \quad \frac{d\varpi_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varrho_1}, \quad \frac{d\varpi_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varrho_2}, \quad \frac{d\gamma}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \omega}.$$

Da $H = h$ das Integral der lebendigen Kraft darstellt, der letzte Multiplicator bekannt ist, und die Zeit $t$ nicht explicite vorkommt, so bleiben noch *fünf Integrationen* zu leisten, um den *allgemeinen* Fall auf Quadraturen zurückzuführen.

Zum Verständniss der obigen Ausdrücke sind folgende Angaben erforderlich: $A$ und $B$ sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\lambda\lambda - C\lambda + \frac{mm_1m_2}{M}\Delta^2 = 0;$$

$$MC = \Sigma m_1 m_2 \varrho^2, \quad \text{nebst} \quad M = m + m_1 + m_2;$$

$\Delta$ bedeutet den doppelten Inhalt des Dreiecks $\overline{mm_1m_2}$;

$E = m_1(\varrho_2^2 + \varrho^2 - \varrho_1^2) - m_2(\varrho^2 + \varrho_1^2 - \varrho_2^2)$, woraus die analogen Ausdrücke für $E_1$ und $E_2$ durch Vertauschung der Indices erhalten werden;

$\gamma = k\cos i$, wo $k$ die Constante des Flächensatzes in Bezug auf die invariable Ebene ausdrückt;

$i$ ist die Neigung von $\Delta$ gegen die invariable Ebene;

die Länge der Knotenlinie durch den Schwerpunkt wird durch die Quadratur

$$\Omega = k\int \frac{A\cos^2\omega + B\sin^2\omega}{AB}\,dt$$

gefunden; endlich $\omega$ bezeichnet den Winkel zwischen der Knotenlinie und einer in der Ebene der drei Körper als variabler $xy$-Ebene durch den Schwerpunkt gelegten freien Axe, für welche $\Sigma mxy = 0$. Mit diesen Daten sind die Positionen der drei Körper völlig bestimmt.

Wenn man in $T$ die Grössen $\varpi$, $\varpi_1$, $\varpi_2$, $\gamma$ mittelst der Differentialquotienten $\varrho'$, $\varrho_1'$, $\varrho_2'$, $\omega'$ eliminirt, so gelten die Gleichungen

$$\varpi = \frac{\partial T}{\partial \varrho'}, \quad \varpi_1 = \frac{\partial T}{\partial \varrho_1'}, \quad \varpi_2 = \frac{\partial T}{\partial \varrho_2'}, \quad \gamma = \frac{\partial T}{\partial \omega'}$$

und die Differentialgleichungen nehmen die *Lagrange*sche *Form* an

$$\frac{d\varpi}{dt} = \frac{\partial(T+U)}{\partial\varrho}, \quad \frac{d\varpi_1}{dt} = \frac{\partial(T+U)}{\partial\varrho_1}, \quad \frac{d\varpi_2}{dt} = \frac{\partial(T+U)}{\partial\varrho_2}, \quad \frac{d\gamma}{dt} = \frac{\partial(T+U)}{\partial\omega}.$$

Ebenso darf man, um die *Jacobi-Hamilton*sche *partielle Differentialgleichung* zu bilden,

$$\varpi = \frac{\partial V}{\partial\varrho}, \quad \varpi_1 = \frac{\partial V}{\partial\varrho_1}, \quad \varpi_2 = \frac{\partial V}{\partial\varrho_2}, \quad \gamma = \frac{\partial V}{\partial\omega}$$

setzen.

Für die *Bewegung der drei Körper in einer Ebene* tritt eine Vereinfachung ein, sobald man $\Omega + \omega = \varphi$ einführt. Alsdann wird

$$H = \Sigma \frac{1}{2m}\left\{\varpi_1^2 + \frac{\varrho_1^2 + \varrho_2^2 - \varrho^2}{\varrho_1\varrho_2}\varpi_1\varpi_2 + \varpi_2^2 - \frac{2mm_1m_2}{\varrho}\right\} + \frac{k^2}{2C} = h$$

und es kommt zu den sechs Differentialgleichungen

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{\partial H}{\partial\varpi} \quad \cdots \quad \text{und} \quad \frac{d\varpi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial\varrho} \quad \cdots,$$

welche *drei* Integrationen und zwei Quadraturen erfordern, die dritte Quadratur

$$\varphi = \Omega + \omega = \int \frac{k dt - \sqrt{AB}\, d\psi}{C}$$

hinzu. Hier ist der Winkel $\psi$ durch die Gleichung

$$\operatorname{tg}(\psi - \psi_0) = \frac{\Sigma m(m_1 - m_2)\varrho\varrho}{\Sigma \sqrt{\frac{m_1 m_2}{Mm}}(m_1 m_2 - mm)\varrho\varrho}$$

als Functionen der Distanzen $\varrho$, $\varrho_1$, $\varrho_2$ bestimmt.

Man erkennt aus dem Vorstehenden, dass es möglich gewesen ist, die Flächensätze zur Reduction der Aufgabe zu benutzen, ohne der canonischen Form der mechanischen Differentialgleichungen Abbruch zu thun.

Ich füge schliesslich eine Transformation der obigen *Differentialgleichungen des allgemeinen Falles* hinzu, welche zur Ableitung der betreffenden Formeln für die Annahme $m = 0$ geeignet ist.

$$T = 2AA_1^2 + 2BB_1^2 + \frac{2C}{(A-B)^2}\psi_1^2 - \frac{4\sqrt{AB}}{(A-B)^2}\psi_1\omega_1 + \tfrac{1}{2}\left\{\frac{C}{(A-B)^2} - \frac{A\cos^2\omega + B\sin^2\omega}{AB}\right\}\omega_1^2,$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial H}{\partial A_1}, \quad \frac{\partial B}{dt} = \frac{\partial H}{\partial B_1}, \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi_1}, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \omega_1},$$

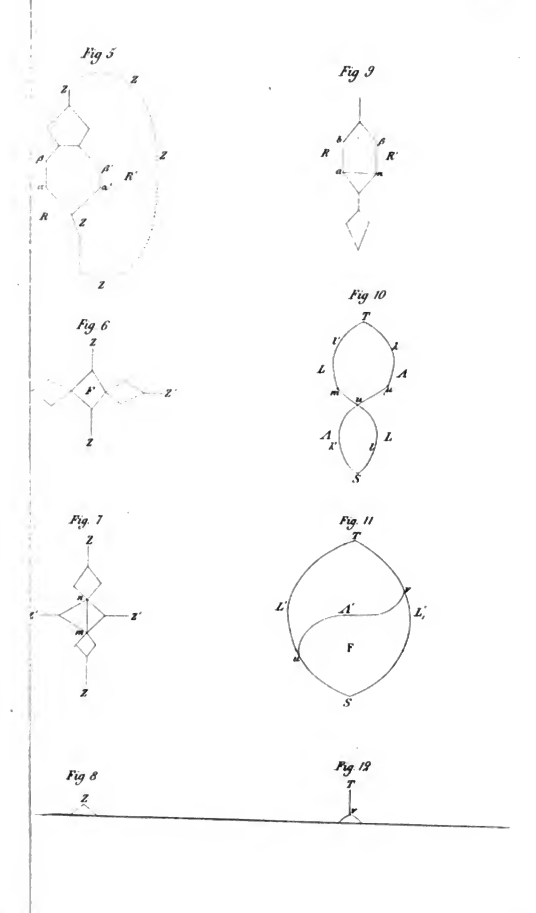
$$\frac{dA_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial A}, \quad \frac{dB_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial B}, \quad \frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \psi}, \quad \frac{d\omega_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \omega}.$$

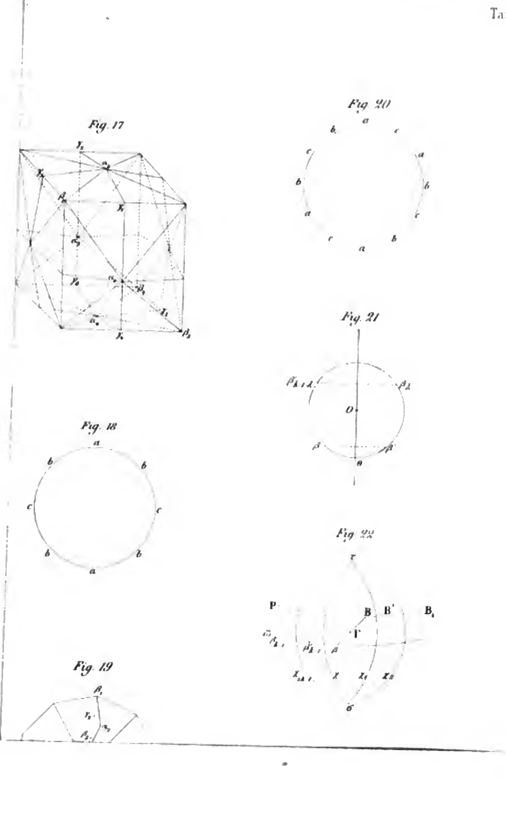
Der Symmetrie halber ist hier $\omega_1$ für $\gamma$ geschrieben, die übrigen Bezeichnungen sind beibehalten und

$$A_1 = \frac{\partial T}{\partial A'}, \quad B_1 = \frac{\partial T}{\partial B'}, \quad \psi_1 = \frac{\partial T}{\partial \psi'}, \quad \omega_1 = \frac{\partial T}{\partial \omega'}$$

gesetzt, letzteres selbstverständlich unter der Voraussetzung, dass $A_1$, $B_1$, $\psi_1$, $\omega_1$, mittelst der Differentialquotienten $A'$, $B'$, $\psi'$, $\omega'$ aus $T$ eliminirt werden.

Leipzig, den 3. Mai 1868.


Taf I
Fig 5
Fig 9
Fig 10
Fig 6
Fig. 7
Fig. 11
Fig 8
Fig 12


Fig. 17
Fig. 18
Fig. 19
Fig. 20
Fig. 21
Fig. 22
P
B
B'
T

Inhaltsverzeichniss des acht und sechzigsten Bandes vierten Hefts.



